Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

41761

Unter Mitwirkung der Herren

Weierstrass und **von Helmholtz**

herausgegeben

von

L. Fuchs.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich Preussischer Behörden.

Band 110.

In vier Heften.

Berlin, 1892.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

Inhaltsverzeichniss des Bandes 110.

Seite

Appell, P. Sur des transformations de mouvements. . . . . 37— 41

Busche, E. Ueber die Function $E(x)$ mit complexem Argument. . . . 338—348

Frobenius, G. Ueber die in der Theorie der Flächen auftretenden Differentialparameter. . . . . 1— 36

Gutzmer, A. Bemerkung über die *Jacobi*sche Thetaformel. . . . . 177—179

Hamburger, M. Erweiterung eines *Pfaff*schen Satzes auf simultane totale Differentialgleichungen erster Ordnung und Integration einer Klasse von simultanen partiellen Differentialgleichungen. . . . . 158—176

Hensel, K. Ueber die Gleichungen, mit deren Hülfe man die säcularen Störungen der Planeten bestimmt. . . . . 180—183

Hilbert, D. Ueber die Irreducibilität ganzer rationaler Functionen mit ganzzahligen Coefficienten. . . . . 104—129

Kötter, E. Ueber diejenigen Polyeder, die bei gegebener Gattung und gegebenem Volumen die kleinste Oberfläche besitzen. Erste Abhandlung. 198—229

Krimphoff, W. Neue geometrische Darstellung der lemniskatischen Function. 73— 77

Netto, E. Anwendung der Modul-Systeme auf einen geometrischen Satz und auf das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen. . . . . 184—187

— — Bemerkungen zu dem Aufsatze des Herrn *G. Landsberg* („Zur Theorie der periodischen Kettenbrüche“). . . . . 349—352

Pareto, V. Sur les fonctions génératrices d'*Abel*. . . . . 290—323

Pochhammer, L. Ueber die Reduction der Differentialgleichung der Reihe $\mathfrak{F}(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1}; x)$. . . . . 188—197

Schlesinger, L. Ueber die bei den linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung auftretenden Primformen. . . . . 130—157

— — Ueber lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung, für welche die Umkehrungsfunction von endlicher Vieldeutigkeit ist. . 265—289

Seite

Schottky, F. Ueber das Additionstheorem der Cotangente und der Function $\zeta(u) = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}$. . . . . 324—337

Schumacher, R. Die Punktsysteme auf der Geraden und ihre Anwendung zur Erzeugung der algebraischen ebenen Curven. . . . . 230—264

Schwering, K. Zerfällung der lemniskatischen Theilungsgleichung in vier Factoren. . . . . 42— 72

Thomae, J. Ueber die Function $W\left(\begin{matrix}\alpha, & \beta, & \gamma, \\ \alpha', & \beta', & \gamma', \end{matrix} n\right)$ für singuläre Werthe ihrer Parameter. . . . . 78—103

Inhaltsverzeichniss der Bände 101—110. . . . . 353—362

Ueber die in der Theorie der Flächen auftretenden Differentialparameter.

(Von Herrn *G. Frobenius* in Zürich.)

Die zugehörigen Formen der quadratischen Form zweier Differentiale, welche das Quadrat des Linienelementes einer Fläche darstellt, sind von Herrn *Beltrami* als Differentialparameter bezeichnet und in einer Reihe von Arbeiten untersucht worden. Ist $\varphi(p, q) = \text{const.}$ die Gleichung eines Systems von Curven auf der Fläche und δn das von dem Punkte p, q ausgehende Linienelement der Fläche, welches zu der durch p, q gehenden Curve des Systems normal ist, so ist, wie er zeigt, der quadratische Differentialparameter erster Ordnung gleich $\left(\frac{\delta\varphi}{\delta n}\right)^2$. (Math. Annalen, Bd. 1, Seite 576). Construirt man nun eine gerade Strecke, deren Länge $\frac{\delta\varphi}{\delta n}$ und deren Richtung die von δn ist, so sind ihre Projectionen auf die Axen eines orthogonalen Coordinatensystems drei lineare Differentialparameter, die ich mit $\Delta_x\varphi$, $\Delta_y\varphi$, $\Delta_z\varphi$ bezeichne, und deren Untersuchung den Hauptgegenstand der vorliegenden Arbeit bildet. Wenn man die gegebene Fläche mittelst paralleler Normalen auf die Einheitskugel abbildet, und auf dieser dem Punkte x, y, z der Punkt ξ, η, ζ entspricht, so kann man für die Kugelfläche drei analoge Differentialparameter berechnen, welche ich mit $\Delta_\xi\varphi$, $\Delta_\eta\varphi$, $\Delta_\zeta\varphi$ bezeichne. Die drei bilinearen Differentialparameter, welche den drei quadratischen Formen

$$\Sigma dx^2, \qquad \Sigma dx\,d\xi, \qquad \Sigma d\xi^2$$

von dp und dq entsprechen, können dann auf die Gestalt

$$\Sigma\Delta_x\varphi.\Delta_x\psi, \quad \Sigma\Delta_x\varphi.\Delta_\xi\psi = \Sigma\Delta_\xi\varphi.\Delta_x\psi, \quad \Sigma\Delta_\xi\varphi.\Delta_\xi\psi,$$

die drei ihnen zugehörigen Differentialparameter zweiter Ordnung aber auf

die Gestalt

$$\Sigma \Delta_x^2 \varphi, \quad \frac{1}{\sqrt{k}} \Sigma \Delta_x (\sqrt{k} \Delta_\xi \varphi) = \sqrt{k} \Sigma \Delta_\xi \Big(\frac{1}{\sqrt{k}} \Delta_x \varphi \Big), \quad \Sigma \Delta_\xi^2 \varphi$$

gebracht werden, wo k das Krümmungsmass ist. Der bilinearen Form $\Sigma \pm \xi dy \delta\zeta$, welche in der Theorie der Krümmungslinien auftritt, entspricht endlich der bilineare Differentialparameter $\Sigma \pm \xi \Delta_y \varphi . \Delta_\zeta \psi$ und zwei verschiedene Differentialparameter zweiter Ordnung,

$$\Sigma \pm \xi \Delta_\eta (\Delta_z \varphi), \quad \Sigma \pm \xi \Delta_y (\Delta_\zeta \varphi),$$

von denen der erste für $\varphi = x, y, z$ und Σx^2 verschwindet, der zweite für $\varphi = \xi, \eta, \zeta$ und $\Sigma x \xi$. Nachdem ich diese verschiedenen Differentialparameter in den §§ 1—5 definirt und ihre gegenseitigen Beziehungen untersucht habe, benutze ich die erhaltenen Resultate in § 6 zur Ermittelung der Differentialgleichung dritter Ordnung, welcher der Parameter einer Flächenschaar genügen muss, damit dieselbe einem orthogonalen Flächensystem angehöre, und in § 8 zur Entwickelung der Bedingung für die Isometrie der Krümmungslinien. Endlich untersuche ich in § 7 die Beziehungen der eingeführten Differentialparameter zu dem Krümmungsmass und der geodätischen Krümmung.

§ 1.

Ueber die Form $A = dx^2 + dy^2 + dz^2$.

Sind ξ, η, ζ die Richtungscosinus der Normale der Fläche $\Phi(x, y, z) = 0$ im Punkte x, y, z, so ist beim Uebergange zu einem unendlich nahen Punkte einer Krümmungslinie

$$(1.) \qquad d\xi = r\,dx, \quad d\eta = r\,dy, \quad d\zeta = r\,dz,$$

wo r die entsprechende Hauptkrümmung der Fläche ist. Mithin sind die beiden Hauptkrümmungen r' und r'' zwei Wurzeln der kubischen Gleichung (vgl. z. B. *Lipschitz*, dieses Journal Bd. 78, Seite 25)

$$(2.) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} - r & \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} - r & \frac{\partial \eta}{\partial z} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} - r \end{vmatrix} = 0.$$

Quadratische Gleichungen für r erhält man, wenn man zu den Gleichungen

(1.) noch die Relation

$$\xi dx+\eta dy+\zeta dz = 0 \tag{3.}$$

hinzufügt. Die dritte Wurzel der Gleichung (2.) ergiebt sich aus der Betrachtung einer dieser quadratischen Gleichungen oder auch durch folgende Ueberlegung: Die Grössen ξ, η, ζ können mittelst der Gleichung $\Phi = 0$ auf unendlich viele Arten als Functionen der Coordinaten x, y, z dargestellt werden. Benutzt man irgend eine dieser Darstellungen, so wird die Gleichung

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2 = 1 \tag{4.}$$

nicht identisch erfüllt sein, sondern nur vermöge der Gleichung $\Phi = 0$. Die Ableitung ihrer linken Seite nach x ist also im allgemeinen nicht Null sondern proportional $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ oder ξ, und demnach ergiebt sich die Gleichung

$$\xi \frac{\partial \xi}{\partial x}+\eta \frac{\partial \eta}{\partial x}+\zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x} = r_0 \xi$$

und die beiden analogen. Der so definirte Proportionalitätsfactor r_0, dessen Werth wesentlich von der Darstellung von ξ, η, ζ durch x, y, z abhängt, genügt folglich der Gleichung (2.) und ist, weil r' und r'' von jener Darstellung unabhängig sind, die gesuchte dritte Wurzel.

Diese Bemerkung veranlasste mich, statt der Ableitungen nach x, y und z Ausdrücke in die Rechnung einzuführen, welche nicht von der Form der Darstellung abhängen. Zu diesem Zwecke benutze ich die drei linearen Differentialparameter

$$\begin{cases} \Delta_x \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \xi\left(\xi \frac{\partial \varphi}{\partial x}+\eta \frac{\partial \varphi}{\partial y}+\zeta \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right), \\ \Delta_y \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \eta\left(\xi \frac{\partial \varphi}{\partial x}+\eta \frac{\partial \varphi}{\partial y}+\zeta \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right), \\ \Delta_z \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \zeta\left(\xi \frac{\partial \varphi}{\partial x}+\eta \frac{\partial \varphi}{\partial y}+\zeta \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right), \end{cases} \tag{5.}$$

zwischen denen die Gleichung

$$\xi \Delta_x \varphi+\eta \Delta_y \varphi+\zeta \Delta_z \varphi = 0 \tag{6.}$$

besteht. Projicirt man die Strecke, deren Axenprojectionen $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ sind, oder irgend eine der Strecken, deren Axenprojectionen $\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}+\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z}+\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial z}$ sind, auf die Tangentialebene der Fläche $\Phi = 0$ im Punkte x, y, z, so erhält man die Strecke, deren Axenprojectionen

$\Delta_x\varphi$, $\Delta_y\varphi$, $\Delta_z\varphi$ sind, und daher könnte man diese Ausdrücke die *tangentialen Derivirten* von φ nennen. Aus der Proportion

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}:\frac{\partial\Phi}{\partial y}:\frac{\partial\Phi}{\partial z}=\xi\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\eta\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\zeta\frac{\partial\Phi}{\partial z}:\xi^2+\eta^2+\zeta^2$$

folgt, dass $\Delta_x\Phi=\Delta_y\Phi=\Delta_z\Phi=0$ ist. Ist also die Gleichung $\varphi=\psi$ eine Folge der Gleichung $\Phi=0$, so ist auch die Gleichung $\Delta_x\varphi=\Delta_x\psi$ eine Folge derselben Gleichung. Nach (3.) ist

$$(7.)\qquad d\varphi=\Delta_x\varphi.dx+\Delta_y\varphi.dy+\Delta_z\varphi.dz,$$

und mithin verschwindet nach (1.) die Function

$$(8.)\quad\begin{vmatrix}\Delta_x\xi-r & \Delta_y\xi & \Delta_z\xi\\ \Delta_x\eta & \Delta_y\eta-r & \Delta_z\eta\\ \Delta_x\zeta & \Delta_y\zeta & \Delta_z\zeta-r\end{vmatrix}=-r(r-r')(r-r'')=-r(r^2-hr+k)$$

für die beiden Hauptkrümmungen r' und r'' und ausserdem für $r=0$, wie man aus (6.) erkennt, indem man $\varphi=\xi$, η und ζ setzt. Daher ist

$$(9.)\qquad h=r'+r''=\Delta_x\xi+\Delta_y\eta+\Delta_z\zeta=\Sigma\Delta_x\xi.$$

Ich werde unten zeigen, dass die Determinante (8.) symmetrisch ist, d. h. dass $\Delta_x\eta=\Delta_y\xi$ u. s. w. ist.

Nun seien p und q zwei von einander und von Φ unabhängige Functionen von x, y, z, und seien umgekehrt x, y, z als Functionen von p und q dargestellt. Dann ist nach (7.)

$$(10.)\qquad\frac{\partial\varphi}{\partial p}=\Sigma\Delta_x(\varphi)\frac{\partial x}{\partial p},\quad\frac{\partial\varphi}{\partial q}=\Sigma\Delta_x(\varphi)\frac{\partial x}{\partial q},$$

und daraus erhält man, wenn man $\varphi=p$ oder q setzt, die Relationen

$$(11.)\qquad\begin{cases}\Sigma\dfrac{\partial x}{\partial p}\Delta_x p=1, & \Sigma\dfrac{\partial x}{\partial p}\Delta_x q=0,\\ \Sigma\dfrac{\partial x}{\partial q}\Delta_x p=0, & \Sigma\dfrac{\partial x}{\partial q}\Delta_x q=1,\end{cases}$$

auf denen die folgende Entwickelung wesentlich beruht. Demnach sind die beiden Determinanten*)

$$(12.)\quad\begin{vmatrix}\xi & \eta & \zeta\\ \dfrac{\partial x}{\partial p} & \dfrac{\partial y}{\partial p} & \dfrac{\partial z}{\partial p}\\ \dfrac{\partial x}{\partial q} & \dfrac{\partial y}{\partial q} & \dfrac{\partial z}{\partial q}\end{vmatrix}=\sqrt{a},\qquad\begin{vmatrix}\xi & \eta & \zeta\\ \Delta_x p & \Delta_y p & \Delta_z p\\ \Delta_x q & \Delta_y q & \Delta_z q\end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt{a}}$$

*) Es ist praktisch, die beiden unabhängigen Variabeln in einer solchen Reihenfolge mit p und q zu bezeichnen, dass $\sqrt{a}$ positiv wird.

reciprok, d. h. jedes Element der einen ist gleich der entsprechenden Unterdeterminante der anderen, dividirt durch diese Determinante. Ist aber in einer Determinante $A = |a_{\alpha\beta}|$ der Coefficient von $a_{\alpha\beta}$ gleich $A_{\alpha\beta}$, so ist $\frac{\partial \log A}{\partial p} = \Sigma \frac{A_{\alpha\beta}}{A} \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial p}$. Wendet man diese Formel auf die erste Determinante (12.) an, so erhält man

$$\tfrac{1}{2} \frac{\partial \log a}{\partial p} = \Sigma \xi \frac{\partial \xi}{\partial p} + \Sigma \Big(\Delta_x p \cdot \frac{\partial}{\partial p} \Big(\frac{\partial x}{\partial p} \Big) + \Delta_x q \cdot \frac{\partial}{\partial q} \Big(\frac{\partial x}{\partial p} \Big) \Big).$$

Da nun

$$\Delta_x \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial p} \Delta_x p + \frac{\partial \varphi}{\partial q} \Delta_x q \tag{13.}$$

ist, so folgt daraus

$$\frac{1}{2a} \frac{\partial a}{\partial p} = \Sigma \Delta_x \Big(\frac{\partial x}{\partial p} \Big), \quad \frac{1}{2a} \frac{\partial a}{\partial q} = \Sigma \Delta_x \Big(\frac{\partial x}{\partial q} \Big). \tag{14.}$$

Ist also R irgend eine Function von p und q, so ist

$$\sqrt{a} \Sigma \Delta_x \Big(R \frac{\partial x}{\partial p} \Big) = \sqrt{a} \Sigma \frac{\partial x}{\partial p} \Delta_x(R) + R \sqrt{a} \Sigma \Delta_x \Big(\frac{\partial x}{\partial p} \Big)$$

$$= \sqrt{a} \frac{\partial R}{\partial p} + R \frac{\partial \sqrt{a}}{\partial p} = \frac{\partial (R \sqrt{a})}{\partial p},$$

also wenn man $R\sqrt{a}$ durch R ersetzt,

$$\Sigma \Delta_x \Big(\frac{1}{\sqrt{a}} R \frac{\partial x}{\partial p} \Big) = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial R}{\partial p}, \quad \Sigma \Delta_x \Big(\frac{1}{\sqrt{a}} R \frac{\partial x}{\partial q} \Big) = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial R}{\partial q}. \tag{15.}$$

Sind X, Y, Z irgend drei Functionen von p und q, welche der Gleichung

$$\Sigma \xi X = 0 \tag{16.}$$

genügen, und ist

$$\sqrt{a} \Sigma X \Delta_x p = P, \quad \sqrt{a} \Sigma X \Delta_x q = Q, \tag{17.}$$

so folgt daraus nach (12.)

$$\sqrt{a} X = P \frac{\partial x}{\partial p} + Q \frac{\partial x}{\partial q}, \quad \sqrt{a} Y = P \frac{\partial y}{\partial p} + Q \frac{\partial y}{\partial q}, \quad \sqrt{a} Z = P \frac{\partial z}{\partial p} + Q \frac{\partial z}{\partial q} \tag{18.}$$

und mithin nach (15.)

$$\Sigma \Delta_x(X) = \frac{1}{\sqrt{a}} \Big(\frac{\partial P}{\partial p} + \frac{\partial Q}{\partial q} \Big). \tag{19.}$$

Ist $\Sigma \xi X$ nicht Null, sondern gleich R, so ist $\Sigma \xi (X - \xi R) = 0$ und nach (6.) und (9.)

$$\Sigma \Delta_x(\xi R) = \Sigma \xi \Delta_x(R) + R \Sigma \Delta_x(\xi) = hR$$

und folglich, wenn man in (19.) X durch $X-\xi R$ ersetzt,

$$(20.)\quad \Sigma \Delta_x X = \frac{1}{\sqrt{a}}\Big(\frac{\partial}{\partial p}(\sqrt{a}\,\Sigma X \Delta_x p)+\frac{\partial}{\partial q}(\sqrt{a}\,\Sigma X \Delta_x q)\Big)+h\Sigma \xi X.$$

Die beiden letzten Zeilen jeder der Determinanten (12.) enthalten je zwei von einander unabhängige Lösungen der linearen Gleichung (16.) zwischen den Unbekannten X, Y, Z. Da dieselbe aber nicht mehr als zwei unabhängige Lösungen hat, so lassen sich zwei Paare von Coefficienten a_{11}, a_{12} und a_{21}, a_{22} so bestimmen, dass

$$(21.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial p} = a_{11}\Delta_x p + a_{12}\Delta_x q, & \dfrac{\partial x}{\partial q} = a_{21}\Delta_x p + a_{22}\Delta_x q, \\ \dfrac{\partial y}{\partial p} = a_{11}\Delta_y p + a_{12}\Delta_y q, & \dfrac{\partial y}{\partial q} = a_{21}\Delta_y p + a_{22}\Delta_y q, \\ \dfrac{\partial z}{\partial p} = a_{11}\Delta_z p + a_{12}\Delta_z q, & \dfrac{\partial z}{\partial q} = a_{21}\Delta_z p + a_{22}\Delta_z q \end{cases}$$

wird. Multiplicirt man diese Gleichungen mit $\frac{\partial x}{\partial p}$, $\frac{\partial y}{\partial p}$, $\frac{\partial z}{\partial p}$ oder mit $\frac{\partial x}{\partial q}$, $\frac{\partial y}{\partial q}$, $\frac{\partial z}{\partial q}$ und addirt sie, so findet man nach (11.), dass $a_{12} = a_{21}$ und

$$(22.)\qquad \Sigma dx^2 = a_{11}dp^2 + 2a_{12}dp\,dq + a_{22}dq^2 = A$$

ist. Erhebt man die erste Determinante (12.) ins Quadrat, so ergiebt sich

$$(23.)\qquad a = a_{11}a_{22} - a_{12}^2.$$

Durch Auflösung der Gleichungen (21.) erhält man demnach

$$(24.)\quad a\Delta_x p = a_{22}\frac{\partial x}{\partial p} - a_{12}\frac{\partial x}{\partial q}, \quad a\Delta_x q = -a_{21}\frac{\partial x}{\partial p} + a_{11}\frac{\partial x}{\partial q}$$

und folglich nach (10.)

$$P = \frac{1}{\sqrt{a}}\Big(a_{22}\frac{\partial \varphi}{\partial p} - a_{12}\frac{\partial \varphi}{\partial q}\Big) = \sqrt{a}\,\Sigma \Delta_x(p)\Delta_x(\varphi),$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{a}}\Big(-a_{21}\frac{\partial \varphi}{\partial p} + a_{11}\frac{\partial \varphi}{\partial q}\Big) = \sqrt{a}\,\Sigma \Delta_x(q)\Delta_x(\varphi).$$

Sind also φ und ψ zwei unbestimmte Functionen, so ist

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\Big(P\frac{\partial \psi}{\partial p} + Q\frac{\partial \psi}{\partial q}\Big) = \Sigma \Delta_x(\varphi)\Big(\frac{\partial \psi}{\partial p}\Delta_x p + \frac{\partial \psi}{\partial q}\Delta_x q\Big) = \Sigma \Delta_x(\varphi)\Delta_x(\psi).$$

Setzt man nun

$$(25.)\quad a\,\mathsf{A}(\varphi, \psi) = a_{22}\frac{\partial \varphi}{\partial p}\frac{\partial \psi}{\partial p} - a_{12}\Big(\frac{\partial \varphi}{\partial p}\frac{\partial \psi}{\partial q} + \frac{\partial \varphi}{\partial q}\frac{\partial \psi}{\partial p}\Big) + a_{11}\frac{\partial \varphi}{\partial q}\frac{\partial \psi}{\partial q},$$

so ist (vgl. *Beltrami*, Math. Ann. Bd. 1, Seite 581)

$$(26.) \qquad \mathsf{A}(\varphi, \psi) = \Sigma \Delta_x(\varphi)\Delta_x(\psi).$$

Ferner ist nach (19.)

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{\partial P}{\partial p}+\frac{\partial Q}{\partial q}\right) = \Sigma \Delta_x(\Delta_x\varphi) = \Sigma \Delta_x^2(\varphi).$$

Setzt man also

$$(27.) \quad \sqrt{a}\,\mathsf{A}(\varphi) = \frac{\partial}{\partial p}\frac{1}{\sqrt{a}}\left(a_{22}\frac{\partial \varphi}{\partial p}-a_{12}\frac{\partial \varphi}{\partial q}\right)+\frac{\partial}{\partial q}\frac{1}{\sqrt{a}}\left(-a_{21}\frac{\partial \varphi}{\partial p}+a_{11}\frac{\partial \varphi}{\partial q}\right),$$

so ist

$$(28.) \qquad \mathsf{A}(\varphi) = \Sigma \Delta_x^2(\varphi).$$

Diese elegante Darstellung des zweiten Differentialparameters der Form $A = \Sigma dx^2$ ist eine Umformung der von Herrn *Beltrami* angegebenen Formel*)

$$(29.) \quad \mathsf{A}(\varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}-\left(\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial y}+\zeta\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\varphi-(r'+r'')\left(\xi\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\eta\frac{\partial \varphi}{\partial y}+\zeta\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right).$$

Da die Ausdrücke (26.) und (28.) offenbar von der Wahl des orthogonalen Coordinatensystems unabhängig sind, so zeigen diese Formeln, dass $\mathsf{A}(\varphi, \psi)$ und $\mathsf{A}(\varphi)$ *zugehörige Formen* des Differentialausdrucks A sind, d. h. sich bei jeder Transformation desselben invariant verhalten.

Anmerkung: Um die analytische Bedeutung der Formel (19.) ins Licht zu setzen, bemerke ich Folgendes: Seien $y_1, y_2, \ldots, y_n$ n von einander unabhängige Functionen der n unabhängigen Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$, seien $A_1, A_2, \ldots, A_n$ irgend n Functionen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$, und, wenn φ eine unbestimmte Function dieser Variabeln ist,

$$(30.) \qquad \Sigma A_a \frac{\partial \varphi}{\partial x_a} = \Sigma B_a \frac{\partial \varphi}{\partial y_a}.$$

Setzt man dann $\frac{\partial y_a}{\partial x_\beta} = y_{a\beta}$ und $\frac{\partial x_a}{\partial y_\beta} = x_{a\beta}$, so sind die beiden Determinanten $n$ten Grades

$$(31.) \qquad |y_{a\beta}| = D, \quad |x_{\beta a}| = \frac{1}{D}$$

---

*) In dieser Formel, in der ich die Schreibweise des Herrn *Beltrami* beibehalten habe, ist das zweite Glied symbolisch aufzufassen, also gleich $-\xi^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-2\xi\eta\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}-\cdots$. Dagegen bedeutet $\Delta_x^2(\varphi)$ in der Formel (28.), dass die durch das Zeichen Δ_x ausgedrückte Operation auf den Ausdruck $\Delta_x(\varphi)$ angewendet werden soll.

in dem obigen Sinne reciprok, und folglich ist

$$\frac{\partial \log D}{\partial x_\gamma} = \sum_{\alpha,\beta} x_{\beta\alpha} \frac{\partial y_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} = \Sigma \frac{\partial x_\beta}{\partial y_\alpha} \frac{\partial^2 y_\alpha}{\partial x_\beta \partial x_\gamma} = \Sigma \frac{\partial y_{\alpha\gamma}}{\partial x_\beta} \frac{\partial x_\beta}{\partial y_\alpha}$$

also (vgl. *Jacobi*, de determin. funct. § 9, (1.); Ges. Werke Bd. 3, S. 412)

$$\frac{\partial \log D}{\partial x_\gamma} = \sum_\alpha \frac{\partial y_{\alpha\gamma}}{\partial y_\alpha}. \tag{32.}$$

Mithin ist

$$A_\gamma \frac{\partial \log(A_\gamma D)}{\partial x_\gamma} = A_\gamma \sum_\alpha \frac{\partial y_{\alpha\gamma}}{\partial y_\alpha} + \sum_\alpha \frac{\partial A_\gamma}{\partial y_\alpha} y_{\alpha\gamma} = \sum_\alpha \frac{\partial (A_\gamma y_{\alpha\gamma})}{\partial y_\alpha}.$$

Da nun nach (30.) $\sum_\gamma A_\gamma y_{\alpha\gamma} = B_\alpha$ ist, so folgt daraus

$$\Sigma \frac{\partial (A_\alpha D)}{\partial x_\alpha} = D \Sigma \frac{\partial B_\alpha}{\partial y_\alpha}. \tag{33.}$$

Dies ist die bekannte Formel *Jacobi*s, welche seinem Princip des letzten Multiplicators zu Grunde liegt (Ges. Werke, Bd. 4, Seite 367, (12.)).

§ 2.

Ueber die Form $C = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2$.

Ist das Krümmungsmass $k = r'r''$ von Null verschieden, also die betrachtete Fläche keine abwickelbare, so kann man eine Function der Grössen p und q auch durch die Grössen ξ, η, ζ ausdrücken. Dann besteht zwischen dem Differentialparameter

$$\Delta_\xi \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \xi \Sigma \xi \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \tag{1.}$$

und den beiden analogen die Beziehung

$$\Sigma \xi \Delta_\xi \varphi = 0, \tag{2.}$$

und man erkennt aus den Gleichungen (1.) § 1, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} \Delta_\xi x - \varrho & \Delta_\eta x & \Delta_\zeta x \\ \Delta_\xi y & \Delta_\eta y - \varrho & \Delta_\zeta y \\ \Delta_\xi z & \Delta_\eta z & \Delta_\zeta z - \varrho \end{vmatrix} = -\varrho(\varrho-\varrho')(\varrho-\varrho'') = -\frac{\varrho}{k}(k\varrho^2 - h\varrho + 1) \tag{3.}$$

für die beiden Hauptkrümmungsradien $\varrho' = \frac{1}{r'}$ und $\varrho'' = \frac{1}{r''}$ verschwindet. Da ferner

$$\begin{cases} \Sigma \frac{\partial \xi}{\partial p} \Delta_\xi p = 1, & \Sigma \frac{\partial \xi}{\partial p} \Delta_\xi q = 0, \\ \Sigma \frac{\partial \xi}{\partial q} \Delta_\xi p = 0, & \Sigma \frac{\partial \xi}{\partial q} \Delta_\xi q = 1 \end{cases} \tag{4.}$$

ist, so sind die beiden Determinanten

$$(5.)\qquad \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \frac{\partial\xi}{\partial p} & \frac{\partial\eta}{\partial p} & \frac{\partial\zeta}{\partial p} \\ \frac{\partial\xi}{\partial q} & \frac{\partial\eta}{\partial q} & \frac{\partial\zeta}{\partial q} \end{vmatrix} = \sqrt{c}, \qquad \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \Delta_\xi p & \Delta_\eta p & \Delta_\zeta p \\ \Delta_\xi q & \Delta_\eta q & \Delta_\zeta q \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{c}}$$

reciprok, und daraus ergiebt sich

$$(6.)\qquad \frac{1}{2c}\frac{\partial c}{\partial p} = \Sigma\Delta_\xi\Big(\frac{\partial\xi}{\partial p}\Big), \quad \frac{1}{2c}\frac{\partial c}{\partial q} = \Sigma\Delta_\xi\Big(\frac{\partial\xi}{\partial q}\Big)$$

und allgemein

$$(7.)\quad \Sigma\Delta_\xi X = \frac{1}{\sqrt{c}}\Big(\frac{\partial}{\partial p}(\sqrt{c}\Sigma X\Delta_\xi p)+\frac{\partial}{\partial q}(\sqrt{c}\Sigma X\Delta_\xi q)\Big)+2\Sigma\xi X.$$

In derselben Weise wie in § 1 findet man sechs Gleichungen von der Form

$$(8.)\qquad \begin{cases} \frac{\partial\xi}{\partial p} = c_{11}\Delta_\xi p+c_{12}\Delta_\xi q, & \frac{\partial\xi}{\partial q} = c_{21}\Delta_\xi p+c_{22}\Delta_\xi q, \\ \frac{\partial\eta}{\partial p} = c_{11}\Delta_\eta p+c_{12}\Delta_\eta q, & \frac{\partial\eta}{\partial q} = c_{21}\Delta_\eta p+c_{22}\Delta_\eta q, \\ \frac{\partial\zeta}{\partial p} = c_{11}\Delta_\zeta p+c_{12}\Delta_\zeta q, & \frac{\partial\zeta}{\partial q} = c_{21}\Delta_\zeta p+c_{22}\Delta_\zeta q \end{cases}$$

und erkennt mittelst der Formeln (4.), dass $c_{12} = c_{21}$ und

$$(9.)\qquad \Sigma d\xi^2 = c_{11}dp^2+2c_{12}dp\,dq+c_{22}dq^2 = C$$

und

$$(10.)\qquad c = c_{11}c_{22}-c_{12}^2$$

ist. Setzt man nun

$$(11.)\quad c\Gamma(\varphi,\,\psi) = c_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial\psi}{\partial p}-c_{12}\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial\psi}{\partial q}+\frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial\psi}{\partial p}\Big)+c_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial\psi}{\partial q}$$

und

$$(12.)\quad \sqrt{c}\Gamma(\varphi) = \frac{\partial}{\partial p}\frac{1}{\sqrt{c}}\Big(c_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial p}-c_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial q}\Big)+\frac{\partial}{\partial q}\frac{1}{\sqrt{c}}\Big(-c_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial p}+c_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial q}\Big),$$

so findet man wie oben

$$(13.)\qquad \Gamma(\varphi,\,\psi) = \Sigma\Delta_\xi(\varphi)\Delta_\xi(\psi)$$

und

$$(14.)\qquad \Gamma(\varphi) = \Sigma\Delta_\xi^2(\varphi).$$

Diese Formeln sind übrigens sämmtlich specielle Fälle der Formeln des § 1, nämlich Anwendungen derselben auf den Fall, wo die Fläche $\Phi = 0$ eine Kugel vom Radius 1 ist.

§ 3.

Ueber die Form $B = dx\,d\xi + dy\,d\eta + dz\,d\zeta$.

Da die beiden letzten Zeilen jeder der Determinanten (12.) § 1 und (5.) § 2 zwei von einander unabhängige Lösungen der linearen Gleichung (16.) § 1 enthalten, so bestehen sechs Gleichungen von der Form

$$(1.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\xi}{\partial p} = b_{11}\Delta_x p + b_{12}\Delta_x q, & \dfrac{\partial\xi}{\partial q} = b_{21}\Delta_x p + b_{22}\Delta_x q, \\ \dfrac{\partial\eta}{\partial p} = b_{11}\Delta_y p + b_{12}\Delta_y q, & \dfrac{\partial\eta}{\partial q} = b_{21}\Delta_y p + b_{22}\Delta_y q, \\ \dfrac{\partial\zeta}{\partial p} = b_{11}\Delta_z p + b_{12}\Delta_z q, & \dfrac{\partial\zeta}{\partial q} = b_{21}\Delta_z p + b_{22}\Delta_z q. \end{cases}$$

Multiplicirt man dieselben mit $\frac{\partial x}{\partial p}$, $\frac{\partial y}{\partial p}$, $\frac{\partial z}{\partial p}$, oder mit $\frac{\partial x}{\partial q}$, $\frac{\partial y}{\partial q}$, $\frac{\partial z}{\partial q}$ und addirt sie, so findet man nach (11.) § 1

$$b_{12} = b_{21} = \Sigma\frac{\partial\xi}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q} = \Sigma\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial\xi}{\partial q} = -\Sigma\xi\frac{\partial^2 x}{\partial p\partial q}$$

und

$$(2.)\qquad \Sigma d\xi . dx = b_{11}dp^2 + 2b_{12}dp\,dq + b_{22}dq^2 = B.$$

In derselben Weise erhält man die Gleichungen

$$(3.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial p} = b_{11}\Delta_\xi p + b_{12}\Delta_\xi q, & \dfrac{\partial x}{\partial q} = b_{21}\Delta_\xi p + b_{22}\Delta_\xi q, \\ \dfrac{\partial y}{\partial p} = b_{11}\Delta_\eta p + b_{12}\Delta_\eta q, & \dfrac{\partial y}{\partial q} = b_{21}\Delta_\eta p + b_{22}\Delta_\eta q, \\ \dfrac{\partial z}{\partial p} = b_{11}\Delta_\zeta p + b_{12}\Delta_\zeta q, & \dfrac{\partial z}{\partial q} = b_{21}\Delta_\zeta p + b_{22}\Delta_\zeta q \end{cases}$$

und überzeugt sich mittelst (4.) § 2, dass in ihnen die nämlichen Coefficienten $b_{\varkappa\lambda}$ auftreten, wie in (1.). Setzt man

$$(4.)\qquad \sqrt{a}[\varphi, \psi] = \frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial\psi}{\partial q} - \frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial\psi}{\partial p},$$

so ist nach (12.) § 1 $[y, z] = \xi$ und mithin nach (1.) § 1

$$(5.)\qquad [ry-\eta, rz-\zeta] = \xi(r-r')(r-r'') = \xi(r^2 - hr + k),$$

wo r eine Constante ist, und speciell

$$(6.)\qquad [y, z] = \xi, \quad [y, \zeta] + [\eta, z] = h\xi, \quad [\eta, \zeta] = k\xi.$$

Sind r und s zwei Constanten, so ergiebt sich durch Berechnung der Summe $\Sigma[ry-\eta, rz-\zeta][sy-\eta, sz-\zeta]$ nach abgeänderter Bezeichnung

die Gleichung

$$(7.)\quad \begin{cases} |\alpha a_{\varkappa\lambda}+\beta b_{\varkappa\lambda}+\gamma c_{\varkappa\lambda}| &= a(\alpha+r'\beta+r'^2\gamma)(\alpha+r''\beta+r''^2\gamma) \\ &= a(\alpha^2+h\alpha\beta+k\beta^2+(h^2-2k)\alpha\gamma+hk\beta\gamma+k^2\gamma^2), \end{cases}$$

wo α, β, γ drei Unbestimmte sind. Speciell ist, wenn man $b_{11}b_{22}-b_{12}^2=b$ setzt,

$$(8.)\qquad b=ak,\quad c=ak^2,\quad \sqrt{c}=k\sqrt{a},$$

wo $\sqrt{a}$ und $\sqrt{c}$ durch die Gleichungen (12.) § 1 und (5.) § 2 definirt sind.

Durch Auflösung der Gleichungen (3.) findet man

$$b\Delta_\xi p=b_{22}\frac{\partial x}{\partial p}-b_{12}\frac{\partial x}{\partial q},\quad b\Delta_\xi q=-b_{21}\frac{\partial x}{\partial p}+b_{11}\frac{\partial x}{\partial q}$$

und allgemeiner

$$\frac{1}{\sqrt{b}}\Big(b_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial p}-b_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial q}\Big)=\sqrt{a}\Sigma\Delta_x p(\sqrt{k}\Delta_\xi\varphi)=\sqrt{c}\Sigma\Delta_\xi p\Big(\frac{1}{\sqrt{k}}\Delta_x\varphi\Big),$$

$$\frac{1}{\sqrt{b}}\Big(-b_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial p}+b_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial q}\Big)=\sqrt{a}\Sigma\Delta_x q(\sqrt{k}\Delta_\xi\varphi)=\sqrt{c}\Sigma\Delta_\xi q\Big(\frac{1}{\sqrt{k}}\Delta_x\varphi\Big).$$

Setzt man also

$$(9.)\quad b\mathsf{B}(\varphi,\ \psi)=b_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial\psi}{\partial p}-b_{12}\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial\psi}{\partial q}+\frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial\psi}{\partial p}\Big)+b_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial\psi}{\partial q}$$

und

$$(10.)\quad \sqrt{b}\mathsf{B}(\varphi)=\frac{\partial}{\partial p}\frac{1}{\sqrt{b}}\Big(b_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial p}-b_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial q}\Big)+\frac{\partial}{\partial q}\frac{1}{\sqrt{b}}\Big(-b_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial p}+b_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial q}\Big),$$

so erhält man

$$(11.)\qquad \mathsf{B}(\varphi,\ \psi)=\Sigma\Delta_x(\varphi)\Delta_\xi(\psi)=\Sigma\Delta_\xi(\varphi)\Delta_x(\psi)$$

und nach (19.) § 1 und (7.) § 2

$$(12.)\qquad \mathsf{B}(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{k}}\Sigma\Delta_x(\sqrt{k}\Delta_\xi\varphi)=\sqrt{k}\Sigma\Delta_\xi\Big(\frac{1}{\sqrt{k}}\Delta_x\varphi\Big).$$

Daher ist

$$(13.)\quad \begin{cases} \mathsf{B}(\varphi)+\frac{1}{2k}\mathsf{B}(k,\ \varphi)=\Sigma\Delta_\xi\Delta_x\varphi \\ =\frac{1}{\sqrt{a}k}\Big(\frac{\partial}{\partial p}\frac{1}{\sqrt{a}}\Big(b_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial p}-b_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial q}\Big)+\frac{\partial}{\partial q}\frac{1}{\sqrt{a}}\Big(-b_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial p}+b_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial q}\Big)\Big) \end{cases}$$

und

$$(14.)\quad \begin{cases} \mathsf{B}(\varphi)-\frac{1}{2k}\mathsf{B}(k,\ \varphi)=\Sigma\Delta_x\Delta_\xi\varphi \\ =\frac{1}{\sqrt{a}}\Big(\frac{\partial}{\partial p}\frac{1}{\sqrt{a}k}\Big(b_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial p}-b_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial q}\Big)+\frac{\partial}{\partial q}\frac{1}{\sqrt{a}k}\Big(-b_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial p}+b_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial q}\Big)\Big). \end{cases}$$

§ 4.

Ueber den Zusammenhang zwischen den Formen A, B und C.

Um die entwickelten Formeln anwenden zu können, muss man die Relationen kennen, welche zwischen den Differentialparametern (5.) § 1 und (1.) § 2 stattfinden. Bezeichnet man die (symmetrischen) Matricen

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

mit A, B und C, so ergiebt sich aus den Gleichungen (21.) § 1 und (1.) § 3 (vgl. *Weingarten*, dieses Journal Bd. 59, S. 382)

$$(1.) \qquad \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial p} & \frac{\partial \eta}{\partial p} & \frac{\partial \zeta}{\partial p} \\ \frac{\partial \xi}{\partial q} & \frac{\partial \eta}{\partial q} & \frac{\partial \zeta}{\partial q} \end{bmatrix} = BA^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial p} & \frac{\partial y}{\partial p} & \frac{\partial z}{\partial p} \\ \frac{\partial x}{\partial q} & \frac{\partial y}{\partial q} & \frac{\partial z}{\partial q} \end{bmatrix}.$$

Aus den Gleichungen (8.) § 2 und (3.) § 3 erkennt man, dass in dieser Formel an Stelle von BA^{-1} auch CB^{-1} treten kann. Mithin ist $CB^{-1} = BA^{-1}$ oder

$$(2.) \qquad C = BA^{-1}B, \quad A = BC^{-1}B.$$

Da die charakteristische Function von BA^{-1} nach (7.) § 3 gleich $r^2 - hr + k$ ist, so genügt diese Matrix der Gleichung $(BA^{-1})^2 - hBA^{-1} + k = 0$, und folglich ist nach (2.)

$$(3.) \qquad C - hB + kA = 0.$$

Schreibt man diese Beziehung in der Form $\frac{A}{a} - h\frac{B}{b} + k\frac{C}{c} = 0$, so erhält man zwischen den Differentialparametern (25.) § 1, (11.) § 2 und (9.) § 3 die identische Gleichung

$$(4.) \qquad \mathsf{A}(\varphi, \psi) - h\mathsf{B}(\varphi, \psi) + k\mathsf{\Gamma}(\varphi, \psi) = 0.$$

Aus den Definitionen (5.) § 1 und (1.) § 2 ergiebt sich

$$(5.) \qquad \begin{cases} \begin{bmatrix} \Delta_x x & \Delta_y x & \Delta_z x \\ \Delta_x y & \Delta_y y & \Delta_z y \\ \Delta_x z & \Delta_y z & \Delta_z z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_\xi \xi & \Delta_\eta \xi & \Delta_\zeta \xi \\ \Delta_\xi \eta & \Delta_\eta \eta & \Delta_\zeta \eta \\ \Delta_\xi \zeta & \Delta_\eta \zeta & \Delta_\zeta \zeta \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 1-\xi^2 & -\xi\eta & -\xi\zeta \\ -\eta\xi & 1-\eta^2 & -\eta\zeta \\ -\zeta\xi & -\zeta\eta & 1-\zeta^2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & \zeta & -\eta \\ -\zeta & 0 & \xi \\ \eta & -\xi & 0 \end{bmatrix}^2. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (26.) § 1, (13.) § 2 und (11.) § 3 folgt daher*)

$$(6.)\qquad \Delta_x\varphi = \mathsf{A}(x,\ \varphi) = \mathsf{B}(\xi,\ \varphi),\quad \Delta_\xi\varphi = \Gamma(\xi,\ \varphi) = \mathsf{B}(x,\ \varphi),$$

und demnach erhält man aus (4.) die Relationen

$$(7.)\qquad \mathsf{A}(\xi,\ \varphi) = h\Delta_x\varphi - k\Delta_\xi\varphi,\quad k\Gamma(x,\ \varphi) = h\Delta_\xi\varphi - \Delta_x\varphi,$$

mittelst deren man die Operationen (5.) § 1 und (1.) § 2 auf einander zurückführen kann. Nach der ersten und der Gleichung (26.) § 1 ist

$$(8.)\qquad k\Delta_\xi\varphi = h\Delta_x\varphi - \Delta_x\xi.\Delta_x\varphi - \Delta_y\xi.\Delta_y\varphi - \Delta_z\xi.\Delta_z\varphi.$$

Diese Gleichung und die beiden analogen sind die Auflösungen der Gleichung $\Delta_x\varphi = \mathsf{B}(\xi,\ \varphi)$ oder nach (11.) § 3

$$(9.)\qquad \Delta_x\varphi = \Delta_x\xi.\Delta_\xi\varphi + \Delta_y\xi.\Delta_\eta\varphi + \Delta_z\xi.\Delta_\zeta\varphi$$

und der analogen. Dass die Auflösung dieser drei Gleichungen möglich ist, trotzdem ihre Determinante verschwindet, liegt daran, dass ausserdem noch die Gleichung (2.) § 2 besteht.

Ebenso wie nach (5.) $\Delta_x y = \Delta_y x$ und $\Delta_\xi\eta = \Delta_\eta\xi$ ist, ist auch nach (6.) $\Delta_x\eta = \mathsf{B}(\xi,\eta) = \Delta_y\xi$ und $\Delta_\xi y = \mathsf{B}(x,y) = \Delta_\eta x$. Setzt man ferner in (8.) $\varphi = x$ oder y, so erhält man

$$\Delta_x\xi + k\Delta_\xi x = h(1-\xi^2),\quad \Delta_y\xi + k\Delta_\xi y = -h\xi\eta,$$

oder zusammengefasst

$$(10.)\quad \begin{bmatrix} \Delta_x\xi & \Delta_y\xi & \Delta_z\xi \\ \Delta_x\eta & \Delta_y\eta & \Delta_z\eta \\ \Delta_x\zeta & \Delta_y\zeta & \Delta_z\zeta \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} \Delta_\xi x & \Delta_\eta x & \Delta_\zeta x \\ \Delta_\xi y & \Delta_\eta y & \Delta_\zeta y \\ \Delta_\xi z & \Delta_\eta z & \Delta_\zeta z \end{bmatrix} = h\begin{bmatrix} 1-\xi^2 & -\xi\eta & -\xi\zeta \\ -\eta\xi & 1-\eta^2 & -\eta\zeta \\ -\zeta\xi & -\zeta\eta & 1-\zeta^2 \end{bmatrix}.$$

Endlich besteht zwischen diesen drei symmetrischen Matricen die Beziehung

$$(11.)\quad \begin{bmatrix} \Delta_x\xi & \Delta_y\xi & \Delta_z\xi \\ \Delta_x\eta & \Delta_y\eta & \Delta_z\eta \\ \Delta_x\zeta & \Delta_y\zeta & \Delta_z\zeta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta_\xi x & \Delta_\eta x & \Delta_\zeta x \\ \Delta_\xi y & \Delta_\eta y & \Delta_\zeta y \\ \Delta_\xi z & \Delta_\eta z & \Delta_\zeta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\xi^2 & -\xi\eta & -\xi\zeta \\ -\eta\xi & 1-\eta^2 & -\eta\zeta \\ -\zeta\xi & -\zeta\eta & 1-\zeta^2 \end{bmatrix}.$$

Die Relationen (8.) und (9.) lassen sich auf eine besonders einfache Form bringen, indem man die Richtungscosinus der Tangenten der Krümmungslinien ξ', η', ζ' und ξ'', η'', ζ'' benutzt, welche wir uns so gewählt denken, dass die Determinante

---

*) Die Formel $\Delta_x\varphi = \mathsf{A}(x,\varphi)$ ist ein specieller Fall der Formel $\Delta_1\varphi\psi = \sqrt{\Delta_1\varphi}\cdot\frac{\delta\psi}{\delta n}$ des Herrn *Beltrami*. (Math. Ann. Bd. 1, S. 576.)

$$(12.)\qquad \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi' & \eta' & \zeta' \\ \xi'' & \eta'' & \zeta'' \end{vmatrix} = +1$$

wird. Setzt man zur Abkürzung

$$(13.)\quad \Delta'\varphi = \Sigma\xi' \Delta_x\varphi = \Sigma\xi' \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \Delta''\varphi = \Sigma\xi'' \Delta_x\varphi = \Sigma\xi'' \frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

so ist nach (1.) und (7.) § 1

$$(14.)\qquad \begin{cases} \xi' \Delta_x\xi + \eta' \Delta_y\xi + \zeta' \Delta_z\xi = r'\xi', & \Delta'\xi = r'\xi', \\ \xi'' \Delta_x\xi + \eta'' \Delta_y\xi + \zeta'' \Delta_z\xi = r''\xi'', & \Delta''\xi = r''\xi'', \end{cases}$$

und daher folgt aus (9.)

$$(15.)\quad \Delta'\varphi = \Sigma\xi' \Delta_x\varphi = r'\Sigma\xi' \Delta_\xi\varphi, \quad \Delta''\varphi = \Sigma\xi'' \Delta_x\varphi = r''\Sigma\xi'' \Delta_\xi\varphi.$$

Nimmt man dazu die Gleichung $0 = \Sigma\xi \Delta_x\varphi = \Sigma\xi \Delta_\xi\varphi$, so kann man daraus umgekehrt die Relationen (8.) und (9.) herleiten. Setzt man in diesen Gleichungen $\varphi = x$, so findet man

$$(16.)\quad \xi' \Delta_\xi x + \eta' \Delta_\eta x + \zeta' \Delta_\zeta x = \frac{1}{r'}\xi', \quad \xi'' \Delta_\xi x + \eta'' \Delta_\eta x + \zeta'' \Delta_\zeta x = \frac{1}{r''}\xi''.$$

Mit Hülfe der entwickelten Relationen kann man die Ausdrücke berechnen, in welche die Differentialparameter $\mathsf{A}(\varphi, \psi)$, $\mathsf{B}(\varphi, \psi)$ und $\Gamma(\varphi, \psi)$ übergehen, wenn für φ und ψ irgend zwei der sechs Grössen x, y, z, ξ, η, ζ gesetzt werden.

Ich will nun auch die Werthe der Differentialparameter zweiter Ordnung für diese Grössen bestimmen. Nach der Definition (27.) § 1 ist

$$\sqrt{a}\,\mathsf{A}(\varphi) = \frac{\partial}{\partial p}(\sqrt{a}\,\mathsf{A}(p, \varphi)) + \frac{\partial}{\partial q}(\sqrt{a}\,\mathsf{A}(q, \varphi))$$

$$= \frac{\partial}{\partial p}\Big(\frac{\sqrt{c}}{k}\Sigma\mathsf{A}(\xi, \varphi)\Delta_\xi p\Big) + \frac{\partial}{\partial q}\Big(\frac{\sqrt{c}}{k}\Sigma\mathsf{A}(\xi, \varphi)\Delta_\xi q\Big)$$

und mithin nach (7.) § 2

$$\mathsf{A}(\varphi) = k\Sigma\Delta_\xi\Big(\frac{1}{k}\mathsf{A}(\xi, \varphi)\Big), \quad \Gamma(\varphi) = \frac{1}{k}\Sigma\Delta_x(k\Gamma(x, \varphi)).$$

Nach (7.) ist daher

$$k\Gamma(\varphi) = \Sigma\Delta_x(h\Delta_\xi\varphi - \Delta_x\varphi),$$

also

$$k\Gamma(\varphi) + \mathsf{A}(\varphi) = \Sigma\Delta_x\Big(\frac{h}{\sqrt{k}}(\sqrt{k}\Delta_\xi\varphi)\Big) = \frac{h}{\sqrt{k}}\Sigma\Delta_x(\sqrt{k}\Delta_\xi\varphi) + \sqrt{k}\Sigma\Delta_\xi\varphi.\Delta_x\frac{h}{\sqrt{k}}$$

und folglich

$$(17.) \qquad \mathsf{A}(\varphi)-h\mathsf{B}(\varphi)+k\Gamma(\varphi) = \sqrt{k}\,\mathsf{B}\Big(\frac{h}{\sqrt{k}},\ \varphi\Big).$$

Ist l eine der drei Grössen x, y, z und λ die entsprechende der Grössen ξ, η, ζ, so ist nach (5.) $\Delta_x l = -\xi\lambda$ oder $1-\xi\lambda$ und folglich

$$\mathsf{A}(l) = \Sigma\Delta_x(\Delta_x l) = -\Sigma\Delta_x(\xi\lambda) = -\Sigma\xi\Delta_x\lambda-\lambda\Sigma\Delta_x\xi = -h\lambda$$

nach (6.) und (9.) § 1. Ebenso erhält man $\mathsf{B}(l)$ mittelst der Relation (13.) § 3 und findet dann $\Gamma(l)$ aus der Formel (17.). In derselben Weise berechnet man $\Gamma(\lambda)$ und mittelst der Relation (14.) § 3 $\mathsf{B}(\lambda)$ und dann $\mathsf{A}(\lambda)$ aus der Formel (17.). So gelangt man zu den Gleichungen

$$(18.) \quad \begin{cases} \mathsf{A}(x) = -h\xi, & \mathsf{B}(x) = -2\xi-\dfrac{1}{2k}\Delta_\xi k,\ \Gamma(x) = -\dfrac{h}{k}\xi+\Delta_\xi\Big(\dfrac{h}{k}\Big), \\ \mathsf{A}(\xi) = -(h^2-2k)\xi+\Delta_x h, & \mathsf{B}(\xi) = -h\xi+\dfrac{1}{2k}\Delta_x k,\ \Gamma(\xi) = -2\xi, \end{cases}$$

deren erste von Herrn *Beltrami* angegeben ist.

Setzt man

$$(19.) \qquad 2t = \Sigma x^2,\quad \tau = \Sigma x\xi,$$

so ist

$$(20.) \qquad \Delta_x t = \Delta_\xi\tau = x-\xi t$$

und mithin (Vgl. *Weingarten,* Ueber die Theorie der auf einander abwickelbaren Oberflächen; Festschrift der techn. Hochschule zu Berlin, 1884; S. 42)

$$(21.) \qquad \mathsf{A}(t) = 2-h\tau,\quad \Gamma(\tau) = \frac{h}{k}-2\tau.$$

Aus den obigen Formeln ergeben sich neue Darstellungen für die Differentialparameter $\mathsf{A}(\varphi)$, $\mathsf{B}(\varphi)$ und $\Gamma(\varphi)$. Ist $\mathsf{H}(\varphi)$ irgend einer derselben, so ist, weil $\mathsf{H}(\varphi)$ eine lineare Verbindung von $\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\partial q}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial p}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial q}$ ist,

$$\mathsf{H}(\varphi.\psi) = \varphi\mathsf{H}(\psi)+\psi\mathsf{H}(\varphi)+2\mathsf{H}(\varphi,\psi).$$

Drückt man nun $\mathsf{H}(\varphi)$ durch $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}$, $\cdots\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\cdots$ aus, so kann man die Coefficienten bestimmen, indem man $\varphi = x,\ y,\ z,\ x^2,\ xy,\ \ldots$ setzt. So findet man die Formeln

$$(22.) \quad \begin{cases} \mathsf{H}(\varphi) = \mathsf{H}(x,\ x)\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+2\mathsf{H}(x,\ y)\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+\cdots+\Sigma\mathsf{H}(x)\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \qquad = \mathsf{H}(\xi,\ \xi)\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+2\mathsf{H}(\xi,\ \eta)\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\partial\eta}+\cdots+\Sigma\mathsf{H}(\xi)\dfrac{\partial\varphi}{\partial\xi} \end{cases}$$

und

$$(23.)\quad \begin{cases} \mathsf{H}(\varphi,\ \psi) = \mathsf{H}(x,\ x)\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\dfrac{\partial\psi}{\partial x}+\mathsf{H}(x,\ y)\Big(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\dfrac{\partial\psi}{\partial y}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\Big)+\cdots \\ \qquad\qquad = \mathsf{H}(\xi,\ \xi)\dfrac{\partial\varphi}{\partial\xi}\dfrac{\partial\psi}{\partial\xi}+\mathsf{H}(\xi,\ \eta)\Big(\dfrac{\partial\varphi}{\partial\xi}\dfrac{\partial\psi}{\partial\eta}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial\eta}\dfrac{\partial\psi}{\partial\xi}\Big)+\cdots. \end{cases}$$

In dem Ausdruck $\Delta_y(\Delta_z\varphi)-\Delta_z(\Delta_y\varphi)$ heben sich bekanntlich die Ableitungen zweiter Ordnung auf. Haben nun l und λ dieselbe Bedeutung wie oben, so ist dieser Differentialausdruck erster Ordnung für $\varphi = l$ gleich $-\Delta_y(\zeta\lambda)+\Delta_z(\eta\lambda)$, oder weil $\Delta_y\zeta = \Delta_z\eta$ ist, gleich

$$\eta\Delta_z\lambda-\zeta\Delta_y\lambda = \eta\Delta_l\zeta-\zeta\Delta_l\eta = \eta\mathsf{A}(\zeta, l)-\zeta\mathsf{A}(\eta, l),$$

und mithin ist

$$(24.)\qquad \Delta_y(\Delta_z\varphi)-\Delta_z(\Delta_y\varphi) = \eta\mathsf{A}(\zeta,\ \varphi)-\zeta\mathsf{A}(\eta,\ \varphi)$$

und ebenso

$$(25.)\qquad \Delta_\eta(\Delta_\zeta\varphi)-\Delta_\zeta(\Delta_\eta\varphi) = \eta\Delta_\zeta\varphi-\zeta\Delta_\eta\varphi.$$

Diese Formeln lassen sich noch auf eine andere Gestalt bringen. Aus den Gleichungen (12.) und (13.) § 1 und (4.) § 3 folgt

$$(26.)\quad [\varphi,\ \psi] = \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \Delta_x\varphi & \Delta_y\varphi & \Delta_z\varphi \\ \Delta_x\psi & \Delta_y\psi & \Delta_z\psi \end{vmatrix} = \frac{1}{\xi}(\Delta_y\varphi.\Delta_z\psi-\Delta_z\varphi.\Delta_y\psi).$$

Die letzte Formel und die beiden analogen ergeben sich aus den Gleichungen $\Sigma\xi\Delta_x\varphi = 0$ und $\Sigma\xi\Delta_x\psi = 0$. Mithin ist für $\psi = x$

$$(27.)\qquad [\varphi,\ x] = \eta\Delta_z\varphi-\zeta\Delta_y\varphi$$

und folglich

$$(28.)\qquad -\Delta_x\varphi = \eta[\varphi,\ z]-\zeta[\varphi,\ y].$$

In der nämlichen Weise findet man die Gleichungen

$$(29.)\quad \frac{1}{k}[\varphi,\ \psi] = \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \Delta_\xi\varphi & \Delta_\eta\varphi & \Delta_\zeta\varphi \\ \Delta_\xi\psi & \Delta_\eta\psi & \Delta_\zeta\psi \end{vmatrix} = \frac{1}{\xi}(\Delta_\eta\varphi.\Delta_\zeta\psi-\Delta_\zeta\varphi.\Delta_\eta\psi)$$

und

$$(30.)\qquad \frac{1}{k}[\varphi,\ \xi] = \eta\Delta_\zeta\varphi-\zeta\Delta_\eta\varphi$$

und folglich

$$(31.)\qquad -k\Delta_\xi\varphi = \eta[\varphi,\ \zeta]-\zeta[\varphi,\ \eta].$$

Aus den Gleichungen (7.), (24.) und (25.) ergeben sich daher die Relationen

$$(32.)\quad \Delta_y(\Delta_z\varphi)-\Delta_z(\Delta_y\varphi)=h[\varphi,\ x]-[\varphi,\ \xi],\quad \Delta_\eta(\Delta_\zeta\varphi)-\Delta_\zeta(\Delta_\eta\varphi)=\frac{1}{k}[\varphi,\ \xi],$$

die man auch aus den Gleichungen (20.) § 1 und (7.) § 2 direct herleiten kann. Ich erwähne beiläufig, dass

$$(33.)\qquad \mathsf{A}(\varphi,\ \psi)=\Sigma[\varphi,\ x][\psi,\ x],\quad \mathsf{A}(\varphi)=\Sigma[[\varphi,\ x],\ x]$$

ist, und dass sich $\mathsf{B}(\varphi)$ und $\Gamma(\varphi)$ in ähnlicher Weise darstellen lassen. Die in diesen Formeln benutzten Operationen stehen zu den in der Gleichung (28.) § 1 auftretenden in der Beziehung

$$(34.)\qquad \Sigma\Delta_x[\varphi,\ x]=0,\quad \Sigma[\Delta_x\varphi,\ x]=0.$$

§ 5.

Ueber die schiefe Covariante L.

Das System der simultanen Covarianten der Formen A und B wird zu einem vollständigen durch Hinzufügung der bilinearen Form

$$(1.)\quad \begin{cases} L = \frac{1}{\sqrt{a}}((a_{11}dp+a_{12}dq)(b_{21}\delta p+b_{22}\delta q)-(a_{21}dp+a_{22}dq)(b_{11}\delta p+b_{12}\delta q)) \\ \quad = l_{11}dp\,\delta p+l_{12}dp\,\delta q+l_{21}dq\,\delta p+l_{22}dq\,\delta q, \end{cases}$$

wo

$$(2.)\qquad l_{11}l_{22}-l_{12}l_{21}=ak,\quad l_{12}-l_{21}=\sqrt{a}\,h$$

ist. Die zugehörigen Differentialparameter seien

$$(3.)\quad ak\Lambda(\varphi,\ \psi)=l_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial\psi}{\partial p}-l_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial\psi}{\partial q}-l_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial\psi}{\partial p}+l_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial\psi}{\partial q}$$

und etwas abweichend von den früheren Festsetzungen

$$(4.)\quad \begin{cases} \sqrt{a}\,k\Lambda(\varphi) = \frac{\partial}{\partial p}\frac{1}{\sqrt{a}}\left(l_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial p}-l_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial q}\right)+\frac{\partial}{\partial q}\frac{1}{\sqrt{a}}\left(-l_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial p}+l_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial q}\right), \\ \sqrt{a}\,\mathsf{M}(\varphi) = \frac{\partial}{\partial p}\frac{1}{\sqrt{a}k}\left(l_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial p}-l_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial q}\right)+\frac{\partial}{\partial q}\frac{1}{\sqrt{a}k}\left(-l_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial p}+l_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial q}\right). \end{cases}$$

Zwischen ihnen bestehen die Beziehungen

$$(5.)\quad \Lambda(\varphi,\ \psi)-\Lambda(\psi,\ \varphi)=\frac{h}{k}[\varphi,\ \psi],\quad \Lambda(\varphi)-\mathsf{M}(\varphi)=\frac{1}{h}\Lambda(\varphi,\ h)-\frac{k}{h}\Lambda\left(\frac{h}{k},\ \varphi\right).$$

Nun ist

$$a_{11}dp+a_{12}dq=\Sigma\frac{\partial x}{\partial p}dx,\quad a_{21}dp+a_{22}dq=\Sigma\frac{\partial x}{\partial q}dx,$$

$$b_{11}\delta p+b_{12}\delta q=\Sigma\frac{\partial x}{\partial p}\delta\xi,\quad b_{21}\delta p+b_{22}\delta q=\Sigma\frac{\partial x}{\partial q}\delta\xi$$

und mithin nach (6.) § 3

$$\sqrt{a}L = \Sigma \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial p} & \frac{\partial z}{\partial p} \\ \frac{\partial y}{\partial q} & \frac{\partial z}{\partial q} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dy & dz \\ \delta\eta & \delta\zeta \end{vmatrix} = \sqrt{a}\,\Sigma\xi \begin{vmatrix} dy & dz \\ \delta\eta & \delta\zeta \end{vmatrix},$$

also

$$(6.) \qquad L = \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ dx & dy & dz \\ \delta\xi & \delta\eta & \delta\zeta \end{vmatrix} = \frac{1}{\xi}(dy\,\delta\zeta - dz\,\delta\eta).$$

Die letzte Formel und die beiden analogen ergeben sich daraus, dass $\Sigma\xi dx = \Sigma\xi\delta\xi = 0$ ist. Ferner ist

$$\sqrt{a}ak\Lambda(\varphi,\ \psi) = \Big(a_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial p} - a_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial q}\Big)\Big(-b_{21}\frac{\partial\psi}{\partial p} + b_{11}\frac{\partial\psi}{\partial q}\Big)$$
$$-\Big(-a_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial p} + a_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial q}\Big)\Big(b_{22}\frac{\partial\psi}{\partial p} - b_{12}\frac{\partial\psi}{\partial q}\Big),$$

also nach (26.) § 1 und (11.) § 3

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\Lambda(\varphi,\ \psi) = (\Sigma\Delta_x p.\Delta_x\varphi)(\Sigma\Delta_x q.\Delta_\xi\psi) - (\Sigma\Delta_x q.\Delta_x\varphi)(\Sigma\Delta_x p.\Delta_\xi\psi)$$

und mithin nach (12.) § 1

$$(7.) \qquad \Lambda(\varphi,\ \psi) = \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \Delta_x\varphi & \Delta_y\varphi & \Delta_z\varphi \\ \Delta_\xi\psi & \Delta_\eta\psi & \Delta_\zeta\psi \end{vmatrix} = \frac{1}{\xi}(\Delta_y\varphi.\Delta_\zeta\psi - \Delta_z\varphi.\Delta_\eta\psi).$$

Daher ist

$$(8.) \qquad \begin{cases} \Lambda(\varphi,\ \xi) = [\varphi,\ x] = \eta\Delta_z\varphi - \zeta\Delta_y\varphi, \\ \Lambda(x,\ \varphi) = \frac{1}{k}[\xi,\ \varphi] = -(\eta\Delta_\zeta\varphi - \zeta\Delta_\eta\varphi), \end{cases}$$

also nach (32.) § 4 und (5.)

$$(9.) \quad k\Lambda(\varphi,\ x) = \Delta_y(\Delta_z\varphi) - \Delta_z(\Delta_y\varphi), \quad -\Lambda(x,\ \varphi) = \Delta_\eta(\Delta_\zeta\varphi) - \Delta_\zeta(\Delta_\eta\varphi).$$

Nach (4.) ist

$$\sqrt{a}k\Lambda(\varphi) = \frac{\partial}{\partial p}(\sqrt{a}k\Lambda(\varphi,\ p)) + \frac{\partial}{\partial q}(\sqrt{a}k\Delta(\varphi,\ q)),$$

und daraus ergiebt sich mittelst der Formeln (19.) § 1 und (7.) § 2

$$\Lambda(\varphi) = \Sigma\Delta_\xi\Lambda(\varphi,\ \xi), \quad k\Lambda(\varphi) = \Sigma\Delta_x(k\Lambda(\varphi,\ x))$$

und mithin nach (9.)

$$(10.) \qquad k\Lambda(\varphi) = \Sigma \pm \Delta_x\Delta_y\Delta_z\varphi,$$

wo das Zeichen $\Sigma\pm$ ein nach Art der Determinanten gebildetes Aggregat von sechs Gliedern bezeichnet. Ebenso ist

$$\Lambda(\varphi) = \Sigma\pm\Delta_\xi(\eta\Delta_z\varphi) = \Sigma\pm\eta\Delta_\xi\Delta_z\varphi,$$

weil $\Delta_\eta\zeta = \Delta_\zeta\eta$ ist, also

$$(11.) \qquad -\Lambda(\varphi) = \Sigma\pm\xi\Delta_\eta\Delta_z\varphi = \Sigma\pm\Delta_\xi\Delta_\eta\Delta_z\varphi.$$

Nun ist

$$\zeta[\varphi, y]-\eta[\varphi, z] = \Delta_x\varphi = \mathsf{B}(\xi, \varphi) = \Delta_\xi\xi.\Delta_x\varphi+\Delta_\xi\eta.\Delta_y\varphi+\Delta_\xi\zeta.\Delta_z\varphi$$
$$= -\xi\Delta_\xi\Delta_x\varphi-\eta\Delta_\xi\Delta_y\varphi-\zeta\Delta_\xi\Delta_z\varphi.$$

Eliminirt man das erste Glied der letzteren Summe mit Hülfe der Formel $\Sigma\xi\Delta_\xi\psi = 0$, so erhält man $\eta Z-\zeta Y = 0$, falls man zur Abkürzung

$$X = \Delta_\eta\Delta_z\varphi-\Delta_\zeta\Delta_y\varphi-[\varphi, x]$$

setzt. Mithin ist

$$\frac{X}{\xi} = \frac{Y}{\eta} = \frac{Z}{\zeta} = \frac{\Sigma\xi X}{\Sigma\xi^2},$$

und weil nach (11.) $\Sigma\xi X = -\Lambda(\varphi)$ ist, so ergiebt sich

$$(12.) \qquad \Delta_\eta\Delta_z\varphi-\Delta_\zeta\Delta_y\varphi = \Lambda(\varphi, \xi)-\xi\Lambda(\varphi).$$

Es ist aber nach (34.) § 4 $\Sigma\Delta_x\Lambda(\varphi, \xi) = 0$ und $\Sigma\Delta_x(\xi\psi) = h\psi$ und mithin folgt aus (12.)

$$(13.) \qquad -h\Lambda(\varphi) = \Sigma\pm\Delta_x\Delta_\eta\Delta_z\varphi.$$

In der nämlichen Weise findet man die Formeln

$$(14.) \qquad \Delta_y\Delta_\zeta\varphi-\Delta_z\Delta_\eta\varphi = \Lambda(\varphi, \xi)+\xi\mathsf{M}(\varphi),$$

$$(15.) \qquad \mathsf{M}(\varphi) = \Sigma\pm\xi\Delta_y\Delta_\zeta\varphi$$

und

$$(16.) \qquad \mathsf{M}(\varphi) = -\Sigma\pm\Delta_x\Delta_\eta\Delta_\zeta\varphi = \frac{1}{h}\Sigma\pm\Delta_x\Delta_y\Delta_\zeta\varphi,$$

während $\Sigma\pm\Delta_\xi\Delta_\eta\Delta_\zeta\varphi$ identisch verschwindet.

Multiplicirt man die Determinante (7.) mit der Determinante (12.) § 4, so erhält man nach (15.) § 4

$$(17.) \qquad k\Lambda(\varphi, \psi) = r'\Delta'\varphi.\Delta''\psi-r''\Delta''\varphi.\Delta'\psi,$$

also

$$(18.) \qquad \begin{cases} [\varphi, \psi] = \Delta'\varphi.\Delta''\psi-\Delta''\varphi.\Delta'\psi, \\ k(\Lambda(\varphi, \psi)+\Lambda(\psi, \varphi)) = (r'-r'')(\Delta'\varphi.\Delta''\psi+\Delta''\varphi.\Delta'\psi) \end{cases}$$

und mithin

$$(19.)\quad \begin{cases} k\Lambda(x,\ x) = \Lambda(\xi,\ \xi) = [\xi,\ x] = (r'-r'')\xi'\xi'', \\ k(\Lambda(x,\ y)+\Lambda(y,\ x)) = \Lambda(\xi,\ \eta)+\Lambda(\eta,\ \xi) = [\xi,\ y]+[\eta,\ x] \\ \qquad\qquad = (r'-r'')(\xi'\eta''+\xi''\eta'). \end{cases}$$

Nach (8.) und (11.) ist

$$k\Lambda(\varphi) = \Sigma[\xi,\ \Delta_x\varphi] = \Sigma\left[\xi,\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right] = [\xi,\ x]\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+([\xi,\ y]+[\eta,\ x])\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+\cdots$$

und demnach

$$(20.)\quad \frac{k}{r'-r''}\Lambda(\varphi) = \xi'\xi''\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+(\xi'\eta''+\xi''\eta')\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+\cdots$$

und ebenso

$$(21.)\quad \frac{1}{r'-r''}\mathsf{M}(\varphi) = \xi'\xi''\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+(\xi'\eta''+\xi''\eta')\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\partial\eta}+\cdots.$$

Da nach (11.) $-\Lambda(\varphi) = \Sigma\pm\xi\frac{\partial}{\partial\eta}(\Delta_z\varphi)$ ist, so besagt die Differentialgleichung $\Lambda(\varphi) = 0$, dass der Ausdruck $\Sigma\Delta_x\varphi.d\xi$ oder

$$(22.)\quad \Sigma\frac{\partial\varphi}{\partial x}d\xi = \Sigma\mathsf{A}(\xi,\ \varphi)dx$$

unter der Bedingung $\Sigma\xi dx = 0$ ein vollständiges Differential ist. Ebenso besagt nach (15.) die Differentialgleichung $\mathsf{M}(\varphi) = 0$, dass der Ausdruck

$$(23.)\quad \Sigma\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}dx = \Sigma\Gamma(x,\ \varphi)d\xi$$

auf der Fläche $\Phi = 0$ ein vollständiges Differential ist. Man kann diese Sätze auch so aussprechen: Sind φ und ψ zwei Functionen von p und q, zwischen denen die Beziehungen

$$(24.)\quad \Delta_x\varphi = \Delta_\xi\psi,\quad \Delta_y\varphi = \Delta_\eta\psi,\quad \Delta_z\varphi = \Delta_\zeta\psi$$

bestehen, so ist

$$(25.)\quad \Lambda(\varphi) = 0,\quad \mathsf{M}(\psi) = 0,\quad \Lambda(\varphi,\ \psi) = 0,$$

und umgekehrt, wenn $\Lambda(\varphi) = 0$ ist, so giebt es eine Function ψ, welche den Bedingungen (24.) genügt, und wenn $\mathsf{M}(\psi) = 0$ ist, eine ihnen genügende Function φ. Nach (5.) und (20.) § 4 verschwindet daher $\Lambda(\varphi)$ für $\varphi = x,\ y,\ z$ und t und $\mathsf{M}(\psi)$ für $\psi = \xi,\ \eta,\ \zeta$ und τ (vgl. *Lamé*, Leçons sur les coordonnées curvilignes, p. 89). Nach (15.) § 4 können die drei Gleichungen (24.), von denen die eine aus den beiden anderen folgt, durch die zwei Gleichungen

$$(26.)\quad r'\Delta'\varphi = \Delta'\psi,\quad r''\Delta''\varphi = \Delta''\psi$$

ersetzt werden.

§ 6.

Ueber orthogonale Flächensysteme.

Von den im letzten Paragraphen entwickelten Formeln mache ich eine Anwendung auf die viel behandelte Aufgabe, die Bedingung zu finden, unter der eine Flächenschaar $\Phi(x, y, z) = \lambda$ einem orthogonalen Flächensystem angehört. (Vgl. *Weingarten*, dieses Journal Bd. 83, im Folgenden mit *W.* citirt.) Ich behalte die bisherigen Bezeichnungen bei, setze aber voraus, dass die Grössen ξ, ξ', r', ... entweder als Functionen von x, y, z oder von p, q, λ dargestellt sind (aber nicht von x, y, z und λ). Die zwischen ihnen entwickelten Relationen sind dann Identitäten. Für die partielle Ableitung $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ brauche ich auch die Zeichen $D_x\varphi$ und φ_x, und zur Abkürzung setze ich

$$\Delta\varphi = \Sigma\xi D_x\varphi. \tag{1.}$$

Schreibt man nun die Gleichung (14.) § 4 in der Form

$$\xi'\Delta_x\xi+\eta'\Delta_x\eta+\zeta'\Delta_x\zeta = r'\xi',$$

so folgt daraus

$$\xi\Delta_x\xi'+\eta\Delta_x\eta'+\zeta\Delta_x\zeta' = -r'\xi'$$

und mithin nach (6.) § 1

$$\eta(\Delta_x\eta'-\Delta_y\xi')+\zeta(\Delta_x\zeta'-\Delta_z\xi') = -r'\xi'.$$

Multiplicirt man mit ξ'' und summirt, so erhält man

$$\Sigma\pm\xi'\Delta_y\zeta' = 0. \tag{2.}$$

Setzt man hier

$$\Delta_x\varphi = D_x\varphi-\xi\Delta\varphi, \tag{3.}$$

so findet man $\Sigma\pm\xi' D_y\zeta' = -\Sigma\xi''\Delta\xi'$. Daher ist (vgl. *Cayley*, Comptes Rendus tom. 75, p. 181)

$$J = \Sigma\pm\xi' D_y\zeta' = \Sigma\pm\xi'' D_y\zeta'' = \Sigma\xi'\Delta\xi'' = -\Sigma\xi''\Delta\xi'. \tag{4.}$$

Setzt man nun

$$m^{-2} = \Phi_x^2+\Phi_y^2+\Phi_z^2, \tag{5.}$$

so ist

$$-m^{-3}D_x m = \Phi_x\Phi_{xx}+\Phi_y\Phi_{xy}+\Phi_z\Phi_{xz} = \frac{1}{m}\Delta\Phi_x = \frac{1}{m}\Delta\frac{\xi}{m},$$

also $D_x m = \xi \Delta m - m \Delta \xi$ und mithin (*W.* Seite 5, unten)

(6.) $$\Delta_x m = -m \Delta \xi.$$

Daher ist $\Delta' m = \Sigma \xi' \Delta_x m = -m \Sigma \xi' \Delta \xi$. Durch Auflösung der drei Gleichungen

$$\Sigma \xi \Delta \xi' = \frac{1}{m} \Delta' m, \quad \Sigma \xi' \Delta \xi' = 0, \quad \Sigma \xi'' \Delta \xi' = -J$$

erhält man

(7.) $$\Delta \xi' = \frac{1}{m} \Delta'(m) \xi - J \xi''.$$

Da $\Delta \varphi = \Sigma \xi D_x \varphi$ und $\Delta' \varphi = \Sigma \xi' D_x \varphi$ ist, so ist nach (14.) § 4

$$\Delta' \Delta \varphi - \Delta \Delta' \varphi = \Sigma (\Delta' \xi - \Delta \xi') D_x \varphi = r' \Delta' \varphi - \frac{1}{m} \Delta' m . \Delta \varphi + J \Delta'' \varphi$$

(vgl. (6.) § 8) oder

(8.) $$\frac{1}{m} \Delta'(m \Delta \varphi) - \Delta \Delta' \varphi = r' \Delta' \varphi + J \Delta'' \varphi.$$

Setzt man in dieser Gleichung*) $\varphi = \xi$, so findet man

$$\frac{1}{m} \Delta' \Delta_x m + r' \Delta \xi' + \xi' \Delta r' = -r'^2 \xi' - J r'' \xi''.$$

Multiplicirt man mit ξ'' und summirt, so ergiebt sich nach (4.)

$$m(r' - r'') J = \Sigma \xi'' \Delta' (\Delta_x m) = \Sigma \xi'' \Delta' (D_x m),$$

weil

$$\Sigma \xi'' \Delta' (\xi \Delta m) = \Delta m \Sigma \xi'' r' \xi' + \Delta' \Delta m \Sigma \xi'' \xi = 0$$

ist. Der erhaltene Ausdruck ist nach (20.) § 5 gleich

$$\xi' \xi'' D_x D_x m + (\xi' \eta'' + \xi'' \eta') D_x D_y m + \cdots = \frac{k}{r' - r''} \Lambda(m),$$

und folglich findet man die Relation

(9.) $$m(r' - r'')^2 J = k \Lambda(m).$$

Mit Hülfe der im vorigen Paragraphen abgeleiteten Formeln lässt sich

---

*) Nimmt man an, dass $\Phi = \lambda$ einem orthogonalen Flächensystem angehört, so ist $J = 0$ und $\Sigma dx^2 = m^2 d\lambda^2 + m_1^2 d\lambda_1^2 + m_2^2 d\lambda_2^2$, also $m \Delta \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}$, $m_1 \Delta' \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_1}$, und folglich reducirt sich die obige Formel auf die Gleichung $m m_1 r' = \frac{\partial m_1}{\partial \lambda}$, auf welcher der erste (unvollständige) Beweis des Herrn *Weingarten* beruht. Zugleich ergiebt sich aus der obigen Deduction die enge Beziehung, in welcher seine beiden Beweise zu einander stehen.

$\Lambda(m)$ in den verschiedensten Formen darstellen. Bezeichnet man die Elemente des Quadrates der Matrix

$$(10.) \qquad \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z \\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z \end{bmatrix}$$

mit $N_{\varkappa\lambda}$, so ist z. B.

$$(11.) \qquad N_{23} = D_x\eta D_z\xi + D_y\eta D_z\eta + D_z\eta D_z\zeta = D_z\Delta\eta - \Delta D_z\eta.$$

Nach (3.) ist aber

$$\Delta_z\Delta\varphi - \Delta\Delta_z\varphi = D_z\Delta\varphi - \zeta\Delta^2\varphi - \Delta(D_z\varphi - \zeta\Delta\varphi) = D_z\Delta\varphi - \Delta D_z\varphi + \Delta\zeta.\Delta\varphi,$$

also nach (6.)

$$\frac{1}{m}\Delta_z(m\Delta\varphi) - \Delta\Delta_z\varphi = D_z\Delta\varphi - \Delta D_z\varphi.$$

Daher ist

$$mN_{23} = \Delta_z(m\Delta\eta) - m\Delta\Delta_z\eta = -\Delta_z\Delta_y m - m\Delta\Delta_z\eta.$$

Setzt man also

$$(12.) \qquad X = N_{23} - N_{32} = \eta_x\xi_z + \eta_y\eta_z + \eta_z\zeta_z - \zeta_x\xi_y - \zeta_y\eta_y - \zeta_z\zeta_y,$$

so ist nach (24.) § 4

$$(13.) \qquad mX = \Delta_y\Delta_z m - \Delta_z\Delta_y m = \eta\mathsf{A}(\zeta,\ m) - \zeta\mathsf{A}(\eta,\ m)$$

also

$$(14.) \qquad \Sigma\xi X = 0.$$

Nach (10.) § 5 ist mithin

$$(15.) \qquad k\Lambda(m) = \Sigma\Delta_x(mX).$$

Dieser Ausdruck ist gleich $m\Sigma\Delta_x X + \Sigma X\Delta_x m = m\Sigma D_x X - m\Sigma(\xi\Delta X + X\Delta\xi)$, und mithin ergiebt sich die Gleichung

$$(16.) \qquad k\Lambda(m) = m\Sigma\frac{\partial X}{\partial x},$$

welche wohl die einfachste Darstellung der betrachteten Grösse enthält. Aus (11.) folgt

$$\Sigma D_x X = \Sigma\pm D_x D_z\Delta\eta - \Sigma\pm D_x\Delta D_z\eta.$$

Das erste Aggregat verschwindet, weil $D_x D_z\varphi = D_z D_x\varphi$ ist, und mithin ist

$$(17.) \qquad k\Lambda(m) = m\Sigma\pm D_x\Delta D_y\zeta$$

oder $k\Lambda(m) = m\Sigma\pm(D_x\Delta - \Delta D_x)D_y\zeta$. Setzt man also

$$(18.) \qquad \Xi = \frac{\partial\eta}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial y},$$

so ist (*W.* Seite 9, unten)

$$(19.)\quad \begin{cases} -\frac{k}{m}\Lambda(m) = \Sigma(D_x\Delta - \Delta D_x)\Xi \\ = \xi_x\Xi_x+\eta_x\Xi_y+\zeta_x\Xi_z+\xi_y\mathsf{H}_x+\eta_y\mathsf{H}_y+\zeta_y\mathsf{H}_z+\xi_z\mathsf{Z}_x+\eta_z\mathsf{Z}_y+\zeta_z\mathsf{Z}_z. \end{cases}$$

Aus der Gleichung $\Delta_y\zeta = \Delta_z\eta$ folgt

$$(20.)\quad \Xi = D_z\eta - D_y\zeta = \zeta\Delta\eta - \eta\Delta\zeta = \frac{1}{m}(\eta\Delta_z m - \zeta\Delta_y m) = \frac{1}{m}[m,\ x]$$

und daher nach (11.) § 5

$$(21.)\qquad \Lambda(m) = \Sigma\Delta_\xi(m\Xi).$$

Setzt man zur Abkürzung

$$(22.)\qquad \Delta' m = r_1 m,\quad \Delta'' m = r_2 m,\quad R^2 = r_1^2 + r_2^2,$$

so ist R die Krümmung der durch den Punkt $x,\ y,\ z$ gehenden orthogonalen Trajectorie der betrachteten Flächenschaar in diesem Punkte, und für diese Curve sind daselbst die Richtungscosinus der

$$\begin{array}{lccc} \text{Tangente:} & \xi, & \eta, & \zeta, \\ \text{Hauptnormale:} & \frac{\Delta\xi}{R}, & \frac{\Delta\eta}{R}, & \frac{\Delta\zeta}{R}, \\ \text{Binormale:} & \frac{\Xi}{R}, & \frac{\mathsf{H}}{R}, & \frac{\mathsf{Z}}{R}, \end{array}$$

und wenn durch die Gleichung

$$(23.)\qquad |\xi,\ \Delta\xi,\ \Delta^2\xi| = R^2T$$

die Torsion T jener Trajectorie im Punkte $x,\ y,\ z$ definirt wird, so ist

$$(24.)\qquad J = \Delta\operatorname{arctg}\left(\frac{r_2}{r_1}\right) - T.$$

Nach der Definition (12.) ist $X = \Xi(\eta_y+\zeta_z) - \mathsf{H}\eta_x - \mathsf{Z}\zeta_x$, also weil $\Sigma\xi_x = h$ ist,

$$(25.)\quad \begin{cases} \frac{1}{m}[m,\ \xi] = h\Xi - X = \Xi D_x\xi + \mathsf{H}D_x\eta + \mathsf{Z}D_x\zeta \\ \qquad = \Xi D_x\xi + \mathsf{H}D_y\xi + \mathsf{Z}D_z\xi = \Xi\Delta_x\xi + \mathsf{H}\Delta_y\xi + \mathsf{Z}\Delta_z\xi \\ \qquad = [\zeta_y] - [\eta_z], \end{cases}$$

wo $[\zeta_y]$ die dem Elemente ζ_y in der Matrix (10.) entsprechende Unterdeterminante ist. Aus den identischen Gleichungen

$$r'[\varphi,\ x] - [\varphi,\ \xi] = (r'-r'')\xi''\Delta'\varphi,\quad r''[\varphi,\ x] - [\varphi,\ \xi] = (r'-r'')\xi'\Delta''\varphi$$

ergeben sich daher die bemerkenswerthen Relationen*)

$$(26.) \qquad X - r'\Xi = r_2(r'-r'')\xi', \quad X - r''\Xi = r_1(r'-r'')\xi''.$$

Mit Hülfe der Formeln, die ich in § 8 entwickeln werde, lässt sich der Ausdruck $\Lambda(m)$ noch weiter umformen. Bezeichnet man die geodätischen Krümmungen der Krümmungslinien mit

$$l' = r_2', \quad l'' = r_1'',$$

so ist nach (5.) § 8

$$\frac{k}{r'-r''}\Lambda(m) = \Delta'\Delta''m - r_2'\Delta'm = \Delta''\Delta'm - r_1''\Delta''m$$

und mithin (vgl. *Lamé*, a. a. O. p. 80) nach (22.)

$$(27.) \qquad \frac{k}{m(r'-r'')}\Lambda(m) = \Delta' r_2 - r_1(r_2'-r_2) = \Delta'' r_1 - r_2(r_1''-r_1).$$

Damit die Flächenschaar $\Phi = \lambda$ einem orthogonalen Flächensystem angehöre, ist nach den Relationen (4.) und (9.) die Bedingung $\Lambda(m) = 0$, welche wir oben in den verschiedensten Formen dargestellt haben, nothwendig und hinreichend (*W.* S. 11, IV). Diese aber ist nach (22.) § 5 damit identisch, dass der Ausdruck (*W.* S. 4)

$$(28.) \qquad \Sigma\frac{\partial m}{\partial x}d\xi = \Sigma\mathsf{A}(\xi, m)dx = d\Psi(x, y, z)$$

ein vollständiges Differential auf der Fläche $\Phi = \lambda$ ist. Demnach ist $\Delta_x\Psi = \mathsf{A}(\xi, m)$, also nach (13.) $mX = \eta\Delta_z\Psi - \zeta\Delta_y\Psi$ oder

$$(29.) \qquad X = \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\Psi}{\partial z} - \frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial\Psi}{\partial y}$$

in Uebereinstimmung mit der Gleichung (16.).

§ 7.

Ueber das Krümmungsmass und die geodätische Krümmung.

Der Differentialparameter zweiter Ordnung $\mathsf{A}(\varphi)$ steht zu dem Krümmungsmasse k in einer eigenthümlichen Beziehung, die von Herrn

*) Herr *Cayley* sagt l. c. pag. 183: A moins de se servir de quantités arbitraires il n'y a pas d'expression symétrique pour les valeurs de $\xi' : \eta' : \zeta'$ et $\xi'' : \eta'' : \zeta''$. Diese Bemerkung ist zwar zutreffend, wenn es sich um die Auflösung eines beliebigen Systems dreier Gleichungen von der Form $\xi_x\xi' + \xi_y\eta' + \xi_z\zeta' = r'\xi'$, ... handelt. In symmetrischer Weise lassen sich dann nur die Producte ξ'^2, $\xi'\eta'$, ... darstellen, von denen deshalb auch Herr *Weingarten* (*W.* Seite 6) Gebrauch macht. Die Coefficienten des vorliegenden Gleichungssystems bieten aber die besondere Eigenthümlichkeit dar, dass die durch die drei Gleichungen $\xi_x\xi + \eta_x\eta + \zeta_x\zeta = 0$, ... definirten Grössen ξ, η, ζ auch die Gleichung $\xi(\eta_z - \zeta_y) + \eta(\zeta_x - \xi_z) + \zeta(\xi_y - \eta_x) = 0$ befriedigen, und durch diesen Umstand wird die obige vollkommen symmetrische Darstellung der Werthe von $\xi' : \eta' : \zeta'$ ermöglicht.

Beltrami entdeckt ist, und die ich hier in einer etwas verallgemeinerten Form darlegen will. Um zunächst die ***Gauss***sche Darstellung der Grösse k in einer möglichst übersichtlichen und brauchbaren Gestalt zu erhalten, benutze ich die Methode ***Joachimsthal***s mit einer geringen Modification. Seien ξ_1, η_1, ζ_1 und ξ_2, η_2, ζ_2 irgend sechs Functionen von p und q, welche den drei Gleichungen

$$(1.) \qquad \eta_1\zeta_2-\eta_2\zeta_1=\xi, \quad \zeta_1\xi_2-\zeta_2\xi_1=\eta, \quad \xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1=\zeta$$

genügen. Setzt man dann

$$(2.) \qquad \Sigma\xi_1^2=\alpha, \quad \Sigma\xi_1\xi_2=\beta, \quad \Sigma\xi_2^2=\gamma,$$

so ist

$$(3.) \qquad \Sigma\xi\xi_1=0, \quad \Sigma\xi\xi_2=0, \quad \alpha\gamma-\beta^2=1.$$

Umgekehrt folgen aus den Gleichungen (3.) die Gleichungen (1.), aber nur bis auf ein gemeinsames Vorzeichen genau, und man kann aus irgend zwei von einander unabhängigen Lösungen der Gleichung $\Sigma\xi X=0$ durch Hinzufügung passender Factoren sechs Functionen herstellen, welche die Gleichungen (1.) befriedigen. Nun ist nach (6.) § 3

$$k=\Sigma\xi[\eta,\ \zeta]=\Sigma(\eta_1\zeta_2-\eta_2\zeta_1)[\eta,\ \zeta],$$

also nach dem Multiplicationstheorem für Determinanten

$$\sqrt{ak}=\left(\Sigma\xi_1\frac{\partial\xi}{\partial p}\right)\left(\Sigma\xi_2\frac{\partial\xi}{\partial q}\right)-\left(\Sigma\xi_2\frac{\partial\xi}{\partial p}\right)\left(\Sigma\xi_1\frac{\partial\xi}{\partial q}\right)$$

$$=\left(\Sigma\xi\frac{\partial\xi_1}{\partial p}\right)\left(\Sigma\xi\frac{\partial\xi_2}{\partial q}\right)-\left(\Sigma\xi\frac{\partial\xi_2}{\partial p}\right)\left(\Sigma\xi\frac{\partial\xi_1}{\partial q}\right)$$

und folglich nach (1.)

$$4\sqrt{ak} = \begin{vmatrix} 2\frac{\partial\xi_1}{\partial p} & 2\frac{\partial\eta_1}{\partial p} & 2\frac{\partial\zeta_1}{\partial p} \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2\frac{\partial\xi_2}{\partial q} & 2\frac{\partial\eta_2}{\partial q} & 2\frac{\partial\zeta_2}{\partial q} \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} 2\frac{\partial\xi_2}{\partial p} & 2\frac{\partial\eta_2}{\partial p} & 2\frac{\partial\zeta_2}{\partial p} \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2\frac{\partial\xi_1}{\partial q} & 2\frac{\partial\eta_1}{\partial q} & 2\frac{\partial\zeta_1}{\partial q} \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \end{vmatrix}.$$

Setzt man

$$\Sigma\xi_1 d\xi_2-\xi_2 d\xi_1 = Qdp-Pdq,$$

so ist

$$2\Sigma\xi_1 d\xi_2=d\beta+Qdp-Pdq, \quad 2\Sigma\xi_2 d\xi_1=d\beta-Qdp+Pdq.$$

Führt man nun in der für k abgeleiteten Formel die Multiplication der Determinanten aus und sondert in jeder der beiden so erhaltenen Determinanten das erste Element ab, so findet man

$$4\sqrt{a}k = 4\Sigma\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial p}\frac{\partial\xi_2}{\partial q} - \frac{\partial\xi_1}{\partial q}\frac{\partial\xi_2}{\partial p}\right)$$

$$+\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial\alpha}{\partial p} & \frac{\partial\beta}{\partial p} - Q \\ \frac{\partial\beta}{\partial q} - P & \alpha & \beta \\ \frac{\partial\gamma}{\partial q} & \beta & \gamma \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial\beta}{\partial p} + Q & \frac{\partial\gamma}{\partial p} \\ \frac{\partial\alpha}{\partial q} & \alpha & \beta \\ \frac{\partial\beta}{\partial q} + P & \beta & \gamma \end{vmatrix}.$$

In der Differenz der beiden Determinanten heben sich die mit PQ multiplicirten Glieder. Ferner hat P den Factor

$$\alpha\frac{\partial\gamma}{\partial p} + \gamma\frac{\partial\alpha}{\partial p} - 2\beta\frac{\partial\beta}{\partial p} = \frac{\partial(\alpha\gamma-\beta^2)}{\partial p} = 0$$

und ebenso Q. Die Summe der übrigen Glieder kann man mit Hülfe der Identität

$$\begin{vmatrix} 0 & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \alpha & \beta \\ \beta'' & \beta & \gamma \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \alpha' & \beta' \\ \beta'' & \alpha & \beta \\ \gamma'' & \beta & \gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

umformen und erhält so die Relation

$$(4.) \qquad k = \Sigma[\xi_1, \xi_2] - \frac{1}{4\sqrt{a}}\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \frac{\partial\alpha}{\partial p} & \frac{\partial\beta}{\partial p} & \frac{\partial\gamma}{\partial p} \\ \frac{\partial\alpha}{\partial q} & \frac{\partial\beta}{\partial q} & \frac{\partial\gamma}{\partial q} \end{vmatrix} \cdots\cdots$$

In den §§ 1 und 2 haben wir viele verschiedene Lösungen der Gleichung $\Sigma\xi X = 0$ betrachtet. Z. B. kann man den Bedingungen (1.) genügen, indem man

$$\xi_1 = \frac{\partial x}{\partial p}, \quad \xi_2 = \frac{\sqrt{a}}{a_{11}}\Delta_x q$$

setzt oder

$$\xi_1 = \frac{\sqrt{a}}{a_{22}}\Delta_x p, \quad \xi_2 = \frac{\partial x}{\partial q}$$

und erhält so besonders einfache Darstellungen von k (Vgl. *Brioschi*, Annali di Mat. Ser. II, Tom. I, pag. 5, (8.)).

Setzt man

$$\xi_1 = \frac{1}{\sqrt[4]{a}} \frac{\partial x}{\partial p}, \quad \xi_2 = \frac{1}{\sqrt[4]{a}} \frac{\partial x}{\partial q},$$

so ist

$$-2\sqrt{a}[\xi_1, \xi_2] = \frac{\partial}{\partial p}\left(\xi_2 \frac{\partial \xi_1}{\partial q} - \xi_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial q}\right) - \frac{\partial}{\partial q}\left(\xi_2 \frac{\partial \xi_1}{\partial p} - \xi_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial p}\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial p} \frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{\partial x}{\partial q} \frac{\partial^2 x}{\partial p \partial q} - \frac{\partial x}{\partial p} \frac{\partial^2 x}{\partial q^2}\right) + \frac{\partial}{\partial q} \frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{\partial x}{\partial p} \frac{\partial^2 x}{\partial p \partial q} - \frac{\partial x}{\partial q} \frac{\partial^2 x}{\partial p^2}\right).$$

Bezeichnet man das Krümmungsmass k der quadratischen Form A mit $K(A)$, so erhält man demnach (vgl. *Weingarten*, Festschrift, Seite 9)

$$(5.) \quad \left\{ \begin{aligned} -2K(A) = {} & \frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{\partial}{\partial p} \frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{\partial a_{22}}{\partial p} - \frac{\partial a_{21}}{\partial q}\right) + \frac{\partial}{\partial q} \frac{1}{\sqrt{a}}\left(-\frac{\partial a_{12}}{\partial p} + \frac{\partial a_{11}}{\partial q}\right)\right) \\ & + \frac{1}{2a^2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{22} \\ \frac{\partial a_{11}}{\partial p} & \frac{\partial a_{12}}{\partial p} & \frac{\partial a_{22}}{\partial p} \\ \frac{\partial a_{11}}{\partial q} & \frac{\partial a_{12}}{\partial q} & \frac{\partial a_{22}}{\partial q} \end{vmatrix}. \end{aligned} \right.$$

Multiplicirt man jetzt die quadratische Form A mit einer beliebigen Function φ von p und q, so kann man aus dieser Darstellung leicht die Invariante $K(\varphi A)$ der Form

$$\varphi A = a_{11}\varphi dp^2 + 2a_{12}\varphi dp\,dq + a_{22}\varphi dq^2$$

ableiten. Nennt man den ersten Theil des Ausdrucks (5.) G und die im zweiten auftretende Determinante*) H, so geht, falls man A durch φA ersetzt, H in $\varphi^3 H$ und $\sqrt{a}G$ in $\sqrt{a}G + \sqrt{a}\mathsf{A}(\log\varphi)$ über. Daher ergiebt sich die merkwürdige Relation

$$(6.) \qquad K(A) - \varphi K(\varphi A) = \tfrac{1}{2}\mathsf{A}(\log\varphi).$$

---

*) Mit der Formel von *Gauss* (Disqu. § 11, pag. 236) hängt der Ausdruck

$$-2k = G + \frac{1}{2a^2} H$$

in folgender Art zusammen. Setzt man

$$p_{11} = \Sigma \frac{\partial^2 x}{\partial p^2} \frac{\partial x}{\partial p}, \quad q_{11} = \Sigma \frac{\partial^2 x}{\partial p^2} \frac{\partial x}{\partial q}, \quad p_{12} = \Sigma \frac{\partial^2 x}{\partial p \partial q} \frac{\partial x}{\partial p}, \ldots,$$

so lautet dieselbe

$$-2k = G' + \frac{2}{a^2} H',$$

Durch analoge Processe pflegt man in der gewöhnlichen Invariantentheorie Contravarianten aus Invarianten abzuleiten. Setzt man z. B. $\varphi = \frac{1}{\sqrt{a}}$, so erhält man die Formel

$$(7.)\quad \left\{ \begin{aligned} -\sqrt{a}(4K(A)+\mathsf{A}(\log a)) \;=\; & 2\left(\frac{\partial^2 \frac{a_{22}}{\sqrt{a}}}{\partial p^2} - 2\frac{\partial^2 \frac{a_{12}}{\sqrt{a}}}{\partial p \partial q} + \frac{\partial^2 \frac{a_{11}}{\sqrt{a}}}{\partial q^2}\right) \\ & + \begin{vmatrix} \frac{a_{11}}{\sqrt{a}} & \frac{a_{12}}{\sqrt{a}} & \frac{a_{22}}{\sqrt{a}} \\ \frac{\partial}{\partial p}\frac{a_{11}}{\sqrt{a}} & \frac{\partial}{\partial p}\frac{a_{12}}{\sqrt{a}} & \frac{\partial}{\partial p}\frac{a_{22}}{\sqrt{a}} \\ \frac{\partial}{\partial q}\frac{a_{11}}{\sqrt{a}} & \frac{\partial}{\partial q}\frac{a_{12}}{\sqrt{a}} & \frac{\partial}{\partial q}\frac{a_{22}}{\sqrt{a}} \end{vmatrix}, \end{aligned} \right.$$

und demnach besagt die Gleichung (6.), dass $\sqrt{a}(4K(A)+\mathsf{A}\log(a))$ ungeändert bleibt, wenn A durch φA ersetzt wird.

Die Formel (6.) ist für die Theorie der conformen Abbildung einer Fläche auf einer anderen von Wichtigkeit. Bildet man z. B. die gegebene Fläche auf einer Ebene (oder einer Fläche vom Krümmungsmass Null) conform ab, und besteht zwischen dem Linienelemente ds der ursprünglichen Fläche und dem entsprechenden der Abbildung $d\sigma$ die Beziehung $d\sigma = \mu ds$, so ist das Krümmungsmass $K(\mu^2 A) = 0$ und mithin nach (6.)

$$(8.)\qquad K(A) \;=\; \mathsf{A}(\log \mu).$$

Dies ist die von Herrn *Beltrami* angegebene Beziehung. Aus derselben kann auch umgekehrt die allgemeine Relation (6.) erhalten werden. Denn da $\left(\frac{\mu}{\sqrt{\varphi}}\right)^2 \varphi\, ds^2$ das Quadrat des Linienelementes einer Fläche verschwindenden Krümmungsmasses ist, so ist nach (8.)

$$K(\varphi A) = \mathsf{A}\left(\log \frac{\mu}{\sqrt{\varphi}}\right) = \mathsf{A}(\log \mu) - \tfrac{1}{2}\mathsf{A}(\log \varphi) = K(A) - \tfrac{1}{2}\mathsf{A}(\log \varphi).$$

---

wo

$$aG' \;=\; \frac{\partial^2 a_{22}}{\partial p^2} - 2\frac{\partial^2 a_{21}}{\partial p \partial q} + \frac{\partial^2 a_{11}}{\partial q^2},$$

$$H' \;=\; a_{11}(q_{11}q_{22} - q_{12}^2) - a_{12}(q_{11}p_{22} + q_{22}p_{11} - 2q_{12}p_{12}) + a_{22}(p_{11}p_{22} - p_{12}^2).$$

Es ist nun

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{22} \\ p_{11} & p_{12} & p_{22} \\ q_{11} & q_{12} & q_{22} \end{vmatrix} = \tfrac{1}{2}H - H' = \tfrac{1}{2}a^2(G' - G) + \tfrac{1}{4}H.$$

In ähnlicher Weise erhält man durch Abbildung der gegebenen Fläche auf einer anderen von constantem Krümmungsmasse $\varkappa$, deren Linienelement $d\sigma = \lambda ds$ ist, die Relation

$$(9.) \qquad K(A) = \varkappa\lambda^2 + \mathsf{A}(\log\lambda).$$

Genügt endlich, um noch einen dritten speciellen Fall zu erwähnen, bei einer conformen Abbildung das Vergrösserungsverhältniss $\lambda = \frac{d\sigma}{ds}$ der partiellen Differentialgleichung $\mathsf{A}(\log\lambda) = 0$, was bei der conformen Abbildung einer ebenen Fläche auf einer anderen stets der Fall ist, so ist $K(A) = \lambda^2 K(\lambda^2 A)$, und mithin haben entsprechende Theile beider Flächen dieselbe totale Krümmung.

Aus der Gleichung (8.) kann man, wie Herr *Beltrami* gezeigt hat, einen besonders einfachen Ausdruck für k herleiten. Ist nämlich

$$A = a_{11}dp^2 + 2a_{12}dp\,dq + a_{22}dq^2 = (Q\,dp - P\,dq)(Q'dp - P'dq),$$

und ist M ein integrirender Factor des Ausdrucks $Q\,dp - P\,dq$ und M' ein solcher für $Q'dp - P'dq$, so ist $MM'A = du\,dv$, und mithin kann man in (8.) $\mu^2 = MM'$ wählen. Setzt man nun

$$(10.) \qquad \sqrt{a}R = \frac{\partial P}{\partial p} + \frac{\partial Q}{\partial q}, \quad \sqrt{a}R' = \frac{\partial P'}{\partial p} + \frac{\partial Q'}{\partial q},$$

so ist, weil $M(Q\,dp - P\,dq)$ ein vollständiges Differential ist,

$$P\frac{\partial\log M}{\partial p} + Q\frac{\partial\log M}{\partial q} = -\sqrt{a}R, \quad P'\frac{\partial\log M'}{\partial p} + Q'\frac{\partial\log M'}{\partial q} = -\sqrt{a}R'.$$

Nun ist aber nach (27.) § 1

$$(PQ' - P'Q)\mathsf{A}(\varphi) = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{PP'\frac{\partial\varphi}{\partial p} + \frac{1}{2}(PQ' + P'Q)\frac{\partial\varphi}{\partial q}}{PQ' - P'Q} - \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial q}\right)$$
$$+ \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\frac{1}{2}(PQ' + P'Q)\frac{\partial\varphi}{\partial p} + QQ'\frac{\partial\varphi}{\partial q}}{PQ' - P'Q} + \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial p}\right),$$

und mithin ergiebt sich die Gleichung

$$(11.) \quad \sqrt{a}\mathsf{A}(\varphi) = \frac{\partial}{\partial p}\frac{P'}{\sqrt{a}}\left(P\frac{\partial\varphi}{\partial p} + Q\frac{\partial\varphi}{\partial q}\right) + \frac{\partial}{\partial q}\frac{Q'}{\sqrt{a}}\left(P\frac{\partial\varphi}{\partial p} + Q\frac{\partial\varphi}{\partial q}\right),$$

in welcher man auch P, Q mit P', Q' vertauschen kann. Daher ist

$$-\sqrt{a}\mathsf{A}(\log M) = \frac{\partial(P'R)}{\partial p} + \frac{\partial(Q'R)}{\partial q}, \quad -\sqrt{a}\mathsf{A}(\log M') = \frac{\partial(PR')}{\partial p} + \frac{\partial(QR')}{\partial q}$$

und folglich nach (8.)

$$(12.) \qquad -2\sqrt{a}k = \frac{\partial(PR'+P'R)}{\partial p} + \frac{\partial(QR'+Q'R)}{\partial q}$$

oder

$$(13.) \quad -2k = 2RR' + \frac{1}{\sqrt{a}}\Big(P\frac{\partial R'}{\partial p} + Q\frac{\partial R'}{\partial q}\Big) + \frac{1}{\sqrt{a}}\Big(P'\frac{\partial R}{\partial p} + Q'\frac{\partial R}{\partial q}\Big).$$

Die einzelnen Theile dieses Ausdrucks sind, falls man $\sqrt{a} = PQ'-P'Q$ setzt, simultane absolute Invarianten der beiden linearen Differentialausdrücke $Q\,dp - P\,dq$ und $Q'dp - P'dq$, und erscheinen in einer Verbindung, welche ungeändert bleibt, wenn man den einen der beiden Ausdrücke mit λ multiplicirt, den andern durch λ dividirt.

Die Gleichung (6.) ist ein specieller Fall der folgenden allgemeinen Formel. Seien α, β, γ drei Functionen von p und q und sei zur Abkürzung gesetzt

$$(14.) \quad \omega = \alpha^2 + h\alpha\beta + k\beta^2 + (h^2-2k)\alpha\gamma + hk\beta\gamma + k^2\gamma^2, \quad \omega' = 2\alpha + h\beta + 2k\gamma$$

und

$$(15.) \qquad (h^2-4k)\Theta(\varphi) = k\mathsf{B}(h,\ \varphi) - \mathsf{A}(k,\ \varphi).$$

Dann ist

$$(16.) \quad \begin{cases} -2\omega K(\alpha A+\beta B+\gamma C) = -k\omega' - \sqrt{\omega}\,\Theta\Big(\dfrac{\omega'}{\sqrt{\omega}}\Big) \\ +\mathsf{A}(\alpha) + k\mathsf{B}(\beta) + k^2\Gamma(\gamma) - \dfrac{1}{2\omega}\mathsf{A}(\alpha,\ \omega) - \dfrac{k^2}{2\omega}\mathsf{B}\Big(\beta,\ \dfrac{\omega}{k}\Big) - \dfrac{k^4}{2\omega}\Gamma\Big(\gamma,\ \dfrac{\omega}{k^2}\Big), \end{cases}$$

also z. B.

$$(17.) \qquad -2K(B) = h + \frac{1}{\sqrt{k}}\,\Theta\Big(\frac{h}{\sqrt{k}}\Big).$$

Ersetzt man α, β, γ durch $\alpha+\lambda k$, $\beta-\lambda h$, $\gamma+\lambda$, so bleibt die Form $\alpha A+\beta B+\gamma C$ und ihre Determinante $a\omega$ ungeändert, und es ergiebt sich die merkwürdige Relation

$$(18.) \qquad \mathsf{A}(k) - k\mathsf{B}(h) + \Theta(h^2-4k) - \tfrac{1}{2}\mathsf{B}(h,\ k) + k(h^2-4k) = 0.$$

Die hier auftretende Form $\Theta(\varphi)$ lässt sich auf viele verschiedene Arten darstellen. Sind A und B zwei beliebige quadratische Differentialausdrücke, a und b ihre Determinanten und $g = a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - 2a_{12}b_{12}$ ihre simultane Invariante, so wird, wie Herr *Weingarten* (Festschrift, Seite 19) gezeigt hat, durch die Gleichung

$$(19.)\quad \begin{cases} 2a^2 \mathsf{B}_A(\varphi) = 2a\Big[\Big(\frac{\partial b_{22}}{\partial p} - \frac{\partial b_{21}}{\partial q}\Big)\frac{\partial \varphi}{\partial p} + \Big(-\frac{\partial b_{12}}{\partial p} + \frac{\partial b_{11}}{\partial q}\Big)\frac{\partial \varphi}{\partial q}\Big] \\ \qquad -g\Big[\Big(\frac{\partial a_{22}}{\partial p} - \frac{\partial a_{21}}{\partial q}\Big)\frac{\partial \varphi}{\partial p} + \Big(-\frac{\partial a_{12}}{\partial p} + \frac{\partial a_{11}}{\partial q}\Big)\frac{\partial \varphi}{\partial q}\Big] \\ \qquad -\begin{vmatrix} \frac{\partial(a_{11},\,\varphi)}{\partial(p,\,q)} & \frac{\partial(a_{12},\,\varphi)}{\partial(p,\,q)} & \frac{\partial(a_{22},\,\varphi)}{\partial(p,\,q)} \\ a_{11} & a_{12} & a_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} \end{vmatrix} \end{cases}$$

eine lineare simultane zugehörige Form von A und B definirt.

Für die hier betrachteten Differentialausdrücke ist nun

$$(20.)\quad \begin{cases} \mathsf{B}_A(\varphi) = 0, \quad \mathsf{B}_\Gamma(\varphi) = 0, \\ (k^2-4k)\Theta(\varphi) = \Gamma_A(\varphi) = 2k\Gamma_B(\varphi) = 2k^2 \mathsf{A}_B(\varphi) = k^3 \mathsf{A}_\Gamma(\varphi). \end{cases}$$

Ersetzt man in der zugehörigen Form (19.) b_{11}, b_{12}, b_{22} durch $\big(\frac{\partial \psi}{\partial p}\big)^2$, $\frac{\partial \psi}{\partial p}\frac{\partial \psi}{\partial q}$, $\big(\frac{\partial \psi}{\partial q}\big)^2$, so wird $\mathsf{B}_A(\psi) : \mathsf{A}(\psi,\,\psi)^{\frac{3}{2}}$ gleich der geodätischen Krümmung l der Curve $\psi(p,\,q) = 0$ auf der Fläche $\Phi = 0$. Ich definire l durch die Gleichung

$$(21.)\qquad l\,ds^3 = |\xi,\quad dx,\quad d^2x|$$

oder

$$l = \left|\xi,\quad \frac{dx}{ds},\quad \frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}\right|,$$

also wenn man $\frac{dx}{ds} = X'$ setzt,

$$l = |\xi,\quad X',\quad X'\Delta_x X' + Y'\Delta_y X' + Z'\Delta_z X'|.$$

Ich nehme an, dass ein *System* von Curven $\psi(p,\,q) = \lambda$ gegeben ist, und bezeichne mit $X,\ Y,\ Z$ die Richtungscosinus der Tangente der Fläche, welche zu der durch den Punkt $p,\ q$ gehenden Curve des Systems normal ist, setze also $X = Y'\zeta - Z'\eta,\ \ldots$. Dann ist

$$l = -X'(X\Delta_x X' + Y\Delta_x Y' + Z\Delta_x Z') - \cdots = X'(X'\Delta_x X + Y'\Delta_x Y + Z'\Delta_x Z) + \cdots,$$

also weil $X'^2 + X^2 + \xi^2 = 1,\ X'Y' + XY + \xi\eta = 0,\ \ldots$ ist,

$$l = \Sigma\Delta_x X - X(X\Delta_x X + Y\Delta_x Y + Z\Delta_x Z) - \cdots - \xi(\xi\Delta_x X + \eta\Delta_y X + \zeta\Delta_z X) - \cdots,$$

und mithin, weil $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ ist,

$$(22.)\qquad l = \Sigma\Delta_x X.$$

Indem man die Determinante

$$(23.)\qquad \begin{vmatrix} \Delta_x X - r & \Delta_y X & \Delta_z X \\ \Delta_x Y & \Delta_y Y - r & \Delta_z Y \\ \Delta_x Z & \Delta_y Z & \Delta_z Z - r \end{vmatrix} = -r^2(r-l)$$

zwei Mal mit $|\xi, X, X'|$ multiplicirt, erkennt man, dass sie ausser für $r = l$ nur noch für $r = 0$ verschwindet.

Um nun die oben aufgestellte Behauptung über den Zusammenhang von l mit der zugehörigen Form $\mathsf{B}_A(\varphi)$ zu beweisen, zerlege ich die Determinante (21.) in die Summe der beiden Determinanten

$$\left|\xi, \frac{\partial x}{\partial p}dp + \frac{\partial x}{\partial q}dq, d\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)dp + d\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)dq\right| + \left|\xi, \frac{\partial x}{\partial p}dp + \frac{\partial x}{\partial q}dq, \frac{\partial x}{\partial p}d^2p + \frac{\partial x}{\partial q}d^2q\right|,$$

deren zweite gleich $\sqrt{a}(dp\,d^2q - dq\,d^2p)$ ist. Die erste multiplicire ich mit der Determinante (12.) § 1. Setzt man zur Abkürzung

$$\Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial p}\,d\frac{\partial x}{\partial q} - \frac{\partial x}{\partial q}\,d\frac{\partial x}{\partial p}\right) = \left(\frac{\partial a_{11}}{\partial q} - \frac{\partial a_{12}}{\partial p}\right)dp - \left(\frac{\partial a_{22}}{\partial p} - \frac{\partial a_{21}}{\partial q}\right)dq = R,$$

so erhält man

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_{11}dp + a_{12}dq & da_{11}.dp + da_{12}.dq + R\,dq \\ a_{21}dp + a_{22}dq & da_{21}.dp + da_{22}.dq - R\,dp \end{vmatrix}.$$

Der Factor von $-\frac{1}{2}R$ ist $a_{11}dp^2 + 2a_{12}dp\,dq + a_{22}dq^2 = ds^2$, und mithin ergiebt sich

$$(24.)\qquad \begin{cases} 2\sqrt{a}\,ds^3 l = 2a(dp\,d^2q - dq\,d^2p) - ds^2\left(\left(\frac{\partial a_{11}}{\partial q} - \frac{\partial a_{12}}{\partial p}\right)dp - \left(\frac{\partial a_{22}}{\partial p} - \frac{\partial a_{21}}{\partial q}\right)dq\right) \\ \qquad\qquad + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{22} \\ da_{11} & da_{12} & da_{22} \\ dq^2 & -dq\,dp & dp^2 \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Ersetzt man dp durch $\frac{\partial \psi}{\partial q}$ und dq durch $-\frac{\partial \psi}{\partial p}$, also ds^2 durch $a\mathsf{A}(\psi, \psi)$, so geht l in eine zugehörige Form von A über, die ich mit $L(A)$ bezeichne. Ist dann φ eine beliebige Function von p und q, so zeigt die Gleichung (24.), dass

$$(25.)\qquad L(A) - \sqrt{\varphi}\,L(\varphi A) = \frac{1}{2}\frac{\mathsf{A}(\psi, \log\varphi)}{\sqrt{\mathsf{A}(\psi, \psi)}} = \frac{1}{2}\frac{\delta \log\varphi}{\delta n}$$

ist, wo n die Richtung X, Y, Z bezeichnet. Wählt man wieder φ so, dass die Krümmungsinvariante von φA verschwindet, so erhält man eine von

Herrn *Beltrami* angegebene Formel (Delle variabili complesse sopra una superficie qualunque, Annali di Mat. ser. II, tom. I (1867) pag. 361).

Durch den eleganten Satz, dass die zugehörige Form $\mathsf{B}_A(\varphi)$ identisch verschwindet, hat Herr *Weingarten* die beiden partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, denen die Grössen $b_{\varkappa\lambda}$ genügen, ersetzt. Dieselben lassen sich auf die Form bringen

$$(26.)\quad \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{a}}\left(b_{11}\frac{\partial a_{22}}{\partial p}-2b_{12}\frac{\partial a_{12}}{\partial p}+b_{22}\frac{\partial a_{11}}{\partial p}\right) = \frac{\partial l_{12}}{\partial p}-\frac{\partial l_{11}}{\partial q}, \\ \frac{1}{2\sqrt{a}}\left(b_{11}\frac{\partial a_{22}}{\partial q}-2b_{12}\frac{\partial a_{12}}{\partial q}+b_{22}\frac{\partial a_{11}}{\partial q}\right) = \frac{\partial l_{22}}{\partial p}-\frac{\partial l_{21}}{\partial q} \end{cases}$$

oder

$$(27.)\quad \begin{cases} a_{11}\frac{\partial}{\partial p}\frac{b_{22}}{\sqrt{a}}-2a_{12}\frac{\partial}{\partial p}\frac{b_{12}}{\sqrt{a}}+a_{22}\frac{\partial}{\partial p}\frac{b_{11}}{\sqrt{a}} = 2\frac{\partial l_{11}}{\partial q}-\frac{\partial(l_{12}+l_{21})}{\partial p}, \\ a_{11}\frac{\partial}{\partial q}\frac{b_{22}}{\sqrt{a}}-2a_{12}\frac{\partial}{\partial q}\frac{b_{12}}{\sqrt{a}}+a_{22}\frac{\partial}{\partial q}\frac{b_{11}}{\sqrt{a}} = \frac{\partial(l_{12}+l_{21})}{\partial q}-2\frac{\partial l_{22}}{\partial p}. \end{cases}$$

Bekannt sind die analogen Formeln für die geodätische Krümmung

$$(28.)\quad \begin{cases} ds\,d\frac{a_{11}dp+a_{12}dq}{ds}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{11}}{\partial p}dp^2+2\frac{\partial a_{12}}{\partial p}dp\,dq+\frac{\partial a_{22}}{\partial p}dq^2\right) = -\sqrt{a}l\,ds\,dq, \\ ds\,d\frac{a_{21}dp+a_{22}dq}{ds}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{11}}{\partial q}dp^2+2\frac{\partial a_{12}}{\partial q}dp\,dq+\frac{\partial a_{22}}{\partial q}dq^2\right) = \sqrt{a}l\,ds\,dp. \end{cases}$$

§ 8.

Ueber die Bedingungen für die Isometrie der Krümmungslinien.

Aus den in § 4 entwickelten Relationen (14.)

$$(1.)\qquad \Delta'\xi = r'\xi',\quad \Delta''\xi = r''\xi''$$

folgt $\Sigma\xi\Delta'\xi'' = -\Sigma\xi''\Delta'\xi = 0$, und da auch $\Sigma\xi''\Delta'\xi'' = 0$ ist, so ist

$$(2.)\qquad \Delta'\xi'' = l'\xi',\quad \Delta''\xi' = l''\xi'',$$

wo l' ein Proportionalitätsfactor ist, und weil $\xi^2+\xi'^2+\xi''^2 = 1$ ist, so ist

$$(3.)\qquad \Delta'\xi' = -r'\xi-l'\xi'',\quad \Delta''\xi'' = -r''\xi-l''\xi'.$$

Multiplicirt man die Gleichung $\xi'\Delta_x\xi''+\eta'\Delta_y\xi''+\zeta'\Delta_z\xi'' = l'\xi'$ mit ξ' und summirt, so erhält man mittelst einer im vorigen Paragraphen benutzten Umformung (Formel (22.)):

$$(4.)\qquad l' = \Sigma\Delta_x\xi'',\quad l'' = \Sigma\Delta_x\xi'.$$

Demnach ist l' die geodätische Krümmung der ersten Krümmungslinie, deren Tangente die Richtungscosinus ξ', η', ζ' hat, und l'' die der zweiten.

Nach (20.) § 5 ist

$$\frac{k}{r'-r''}\Lambda(\varphi) = \Sigma\xi''\Delta'D_x\varphi = \Delta'(\Sigma\xi''D_x\varphi) - \Sigma\Delta'\xi''.D_x\varphi$$

und folglich

$$(5.) \qquad \frac{k}{r'-r''}\Lambda(\varphi) = \Delta'\Delta''\varphi - l'\Delta'\varphi = \Delta''\Delta'\varphi - l''\Delta''\varphi.$$

Aus der Relation

$$(6.) \qquad \Delta'\Delta''\varphi - \Delta''\Delta'\varphi = l'\Delta'\varphi - l''\Delta''\varphi$$

erhält man, indem man $\varphi = \xi$ setzt,

$$(7.) \qquad \Delta'r'' = (r'-r'')l'', \quad \Delta''r' = -(r'-r'')l',$$

und indem man $\varphi = \xi'$ setzt (vgl. *Bertrand,* Calcul différentiel I, pag. 762),

$$(8.) \qquad \Delta'l'' + \Delta''l' = -k - l'^2 - l''^2.$$

In ähnlicher Weise wie oben $\Lambda(\varphi)$ gefunden ist, kann man auch $\mathsf{M}(\varphi)$ berechnen und erhält so die Formel

$$(9.) \qquad \frac{k}{(r'-r'')^2}(\mathsf{M}(\varphi) - \Lambda(\varphi)) = \frac{l'}{r'}\Delta'\varphi - \frac{l''}{r''}\Delta''\varphi,$$

aus der man die Werthe von $\Lambda(\xi)$ und $\mathsf{M}(x)$ bestimmen kann.

Von diesen Formeln mache ich eine Anwendung auf das Problem, die Bedingungen für die Isometrie der Krümmungslinien zu ermitteln. Sind p und q die Parameter der Krümmungslinien, so ist $a_{12} = 0$ und

$$\Delta'\varphi = \frac{1}{\sqrt{a_{11}}}\frac{\partial\varphi}{\partial p}, \quad \Delta''\varphi = \frac{1}{\sqrt{a_{22}}}\frac{\partial\varphi}{\partial q}, \quad l' = \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial\sqrt{a_{11}}}{\partial q}, \quad l'' = \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial\sqrt{a_{22}}}{\partial p}.$$

Damit nun durch eine passende Wahl der Variabeln p und q $a_{11} = a_{22}$ gemacht werden könne, ist nothwendig und hinreichend, dass

$$\frac{\partial^2 \log\frac{a_{11}}{a_{22}}}{\partial p\,\partial q} = 0$$

ist. Diese Bedingung ist aber identisch mit der Gleichung

$$(10.) \qquad \Delta'l' - \Delta''l'' = 0.$$

Sie kann auch dadurch ausgedrückt werden, dass eine Function λ von p und q existirt, welche den beiden Bedingungen

$$(11.) \qquad \Delta'\lambda = l'', \quad \Delta''\lambda = l'$$

genügt. Dieselben lassen sich nach (18.) § 5 dahin zusammenfassen, dass für eine beliebige Function φ

$$(12.) \qquad l'\Delta'\varphi - l''\Delta''\varphi = [\varphi, \lambda]$$

ist. Indem wir aber die Bedingung in einer dieser Formen aussprechen, haben wir uns von der speciellen Wahl der Variabeln p und q unabhängig

gemacht. Da

(13.) $$\mathsf{A}(\varphi) = \Delta'^2\varphi + l'\Delta''\varphi + \Delta''^2\varphi + l''\Delta'\varphi$$

ist, so ergiebt sich aus (8.)

(14.) $$\mathsf{A}(\lambda) = -k.$$

Nach (8.) § 7 ist daher $e^{-2\lambda}ds^2$ eine Form verschwindenden Krümmungsmasses. Mit Hülfe der Relationen (5.) und (7.) lässt sich die Bedingung (10.) auf die Form

(15.) $$\Lambda\left(\frac{h}{\sqrt{h^2-4k}}\right) - h\Lambda\left(\frac{1}{\sqrt{h^2-4k}}\right) = 0$$

bringen. Setzt man

$$2\lambda + \log(r'-r'') = \mu,$$

so ist nach (7.) und (11.)

(16.) $$(r'-r'')\Delta'\mu = \Delta' h, \quad (r'-r'')\Delta''\mu = -\Delta'' h,$$

also weil nach (15.) § 4

(17.) $$\Delta_x\varphi = \xi'\Delta'\varphi + \xi''\Delta''\varphi, \quad \Delta_\xi\varphi = \frac{1}{r'}\xi'\Delta'\varphi + \frac{1}{r''}\xi''\Delta''\varphi$$

ist,

(18.) $$(h^2-4k)\Delta_x\mu = h\Delta_x h - 2k\Delta_\xi h, \quad (h^2-4k)\Delta_\xi\mu = 2\Delta_x h - h\Delta_\xi h$$

und folglich (*Weingarten*, Monatsber. d. Berl. Akad. 1883, S. 1163)

(19.) $$(h^2-4k)d\mu = hdh - 2k\Sigma\frac{\partial h}{\partial\xi}dx = 2\Sigma\frac{\partial h}{\partial x}d\xi - hdh.$$

Wird durch die Gleichung

(20.) $$(k_{11}k_{22}-k_{12}^2)\mathsf{K}(\varphi, \psi) = k_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial\psi}{\partial p} - k_{12}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial\psi}{\partial q} + \frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) + k_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial\psi}{\partial q}$$

der bilineare Differentialparameter der Form

(21.) $$K = \frac{2}{\sqrt{a}}((a_{11}dp + a_{12}dq)(b_{21}dp + b_{22}dq) - (a_{21}dp + a_{22}dq)(b_{11}dp + b_{12}dq))$$

definirt, deren Determinante $k_{11}k_{22}-k_{12}^2 = -a(h^2-4k)$ ist, so ist

(22.) $$-(h^2-4k)\mathsf{K}(\varphi, \psi) = k(\Lambda(\varphi, \psi) + \Lambda(\psi, \varphi))$$

und mithin nach (18.) § 5

(23.) $$-(r'-r'')\mathsf{K}(\varphi, \psi) = \Delta'\varphi.\Delta''\psi + \Delta''\varphi.\Delta'\psi.$$

Aus (16.) folgt daher

(24.) $$\mathsf{K}(\varphi, h) = [\varphi, \mu].$$

Auf diese Form hat Herr *Knoblauch* (dieses Journal Bd. 103, S. 42) die Bedingung für die Isometrie der Krümmungslinien gebracht.

Sur des transformations de mouvements.

(Par M. *Paul Appell* à Paris.)

1. L'objet de cette note est de résumer des recherches qui se rattachent à l'intéressant article de M. *Stäckel „Ueber die Differentialgleichungen der Dynamik und den Begriff der analytischen Aequivalenz dynamischer Probleme“* paru dans le tome 107 de ce Journal (1891).

Soit un système matériel dont les liaisons sont indépendantes du temps et dont la position est définie par n paramètres $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Si ce système est sollicité par des forces dépendant des positions et des vitesses des points d'application, les équations du mouvement sont, d'après *Lagrange*,

$$(1.) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial p'_a}\right) - \frac{\partial S}{\partial p_a} = P_a, \quad p'_a = \frac{dp_a}{dt},$$

S désignant la demi-force vive du système, et

$$P_1\delta p_1 + P_2\delta p_2 + \cdots + P_n\delta p_n$$

la somme des travaux virtuels des forces directement appliquées, pour un déplacement arbitraire compatible avec les liaisons. Les quantités P_a sont des fonctions de $p_1, p_2, \ldots, p_n, p'_1, p'_2, \ldots, p'_n$; dans le cas particulier où les forces ne dépendent que de la position du système, les P_a ne contiennent pas $p'_1, p'_2, \ldots, p'_n$.

A côté de ce premier système qui se meut dans le temps t, considérons un deuxième système dont la configuration dépend de n paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_n$ et qui se meut dans le temps t_1 sous l'action de forces quelconques. Les équations du mouvement de ce système sont

$$(2.) \qquad \frac{d}{dt_1}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_a}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_a} = Q_a, \quad q'_a = \frac{dq_a}{dt_1},$$

les quantités Q_a dépendant de $q_1, q_2, \ldots, q_n$ et de leurs dérivées q'_a. On devra considérer les deux problèmes de mécanique comme *équivalents*, s'il

existe une transformation de la forme

$$(3.)\qquad \begin{cases} q_\alpha = \varphi_\alpha(p_1, p_2, \ldots, p_n) \\ dt = \lambda(p_1, p_2, \ldots, p_n)dt_1, \end{cases}$$

transformant le système des équations (2.) dans le système (1.).

Pour nous rendre compte de la possibilité d'une telle transformation, posons

$$S = \tfrac{1}{2}\sum_{i,j} a_{i,j}p'_ip'_j, \quad a_{i,j} = a_{j,i},$$

$$T = \tfrac{1}{2}\sum_{i,j} b_{i,j}q'_iq'_j, \quad b_{i,j} = b_{j,i};$$

puis portons notre attention sur les termes de (1.) et (2.) qui contiennent des dérivées secondes par rapport au temps. Nous avons

$$\frac{d}{dt_1}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = b_{1\alpha}\frac{d^2q_1}{dt_1^2} + b_{2\alpha}\frac{d^2q_2}{dt_1^2} + \cdots + b_{n\alpha}\frac{d^2q_n}{dt_1^2} + \cdots,$$

les termes suivants ne contenant que des dérivées premières et constituant une forme quadratique par rapport à $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$. De même

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial p'_\alpha}\right) - \frac{\partial S}{\partial p_\alpha} = a_{1\alpha}\frac{d^2p_1}{dt^2} + a_{2\alpha}\frac{d^2p_2}{dt^2} + \cdots + a_{n\alpha}\frac{d^2p_n}{dt^2} + \cdots.$$

D'après les relations (3.), on a

$$\begin{aligned}
\frac{dq_\alpha}{dt_1} &= \frac{dq_\alpha}{dt}\lambda, \\
\frac{d^2q_\alpha}{dt_1^2} &= \frac{d^2q_\alpha}{dt^2}\lambda^2 + \frac{dq_\alpha}{dt}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial p_1}p'_1 + \cdots + \frac{\partial\lambda}{\partial p_n}p'_n\right)\lambda, \\
\frac{dq_\alpha}{dt} &= \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial p_1}p'_1 + \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial p_2}p'_2 + \cdots + \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial p_n}p'_n, \\
\frac{d^2q_\alpha}{dt^2} &= \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial p_1}\frac{d^2p_1}{dt^2} + \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial p_2}\frac{d^2p_2}{dt^2} + \cdots + \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial p_n}\frac{d^2p_n}{dt^2} + \cdots,
\end{aligned}$$

les termes non écrits dans la dernière équation constituant une forme quadratique en $p'_1, p'_2, \ldots, p'_n$.

D'après cela, on peut trouver des coefficients $R_\alpha^{(i)}$ au nombre de n^2 $(i = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha = 1, 2, \ldots, n)$ ne dépendant que de $p_1, p_2, \ldots, p_n$, de telle façon que les expressions

$$(4.)\qquad \frac{d}{dt_1}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} - \sum_{i=1}^{i=n} R_\alpha^{(i)}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial p'_i}\right) - \frac{\partial S}{\partial p_i}\right]$$

ne contiennent plus de dérivées secondes et, par suite, se réduisent à des

formes quadratiques Φ_α en $p'_1, p'_2, \ldots, p'_n$. En effet, annulons, dans l'expression (4.), le coefficient de $\frac{d^2p_k}{dt^2}$; nous aurons

$$\lambda^2\left[b_{1\alpha}\frac{\partial\varphi_1}{\partial p_k}+b_{2\alpha}\frac{\partial\varphi_2}{\partial p_k}+\cdots+b_{n\alpha}\frac{\partial\varphi_n}{\partial p_k}\right]-\sum_{i=1}^{i=n}R_\alpha^{(i)}a_{ki}=0.$$

Faisant $k=1,2,\ldots,n$, on a n équations linéaires définissant

$$R_\alpha^{(1)},\quad R_\alpha^{(2)},\quad \ldots,\quad R_\alpha^{(n)};$$

le déterminant des coefficients des inconnues est le discriminant de S qui n'est pas nul, comme on le sait. Les coefficients $R_\alpha^{(i)}$ étant calculés, la différence (4.) devient une forme quadratique Φ_α en $p'_1, p'_2, \ldots, p'_n$, et on a les identités

$$(5.)\qquad \frac{d}{dt_1}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}=\Phi_\alpha+\sum_{i=1}^{i=n}R_\alpha^{(i)}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial p'_\alpha}\right)-\frac{\partial S}{\partial p_\alpha}\right],$$

en vertu desquelles les équations du mouvement (1.) entraînent celles du mouvement (2.) dans lesquelles on ferait

$$(6.)\qquad Q_\alpha=\Phi_\alpha+\sum_{i=1}^{i=n}R_\alpha^{(i)}P_\alpha.$$

Comme le choix des fonctions λ et φ_α est arbitraire, on peut, d'une infinité de manières, faire correspondre à tout mouvement de l'un des systèmes, sous l'action de forces dépendant des positions et des vitesses, un mouvement analogue de l'autre.

2. Particularisons maintenant le problème, et cherchons si, à tout mouvement du premier système sous l'action de forces *ne dépendant que de la position* du système, on peut faire correspondre un mouvement analogue du second. Pour cela, il faut et il suffit que, les quantités P_α étant des fonctions quelconques de $p_1, p_2, \ldots, p_n$, les quantités Q_α définies par les équations (6.) soient des fonctions de $q_1, q_2, \ldots, q_n$ et non des dérivées de ces paramètres. Donc, il faut et il suffit que la transformation (3.) soit particularisée par les conditions

$$(7.)\qquad \Phi_1=0,\quad \Phi_2=0,\quad \ldots,\quad \Phi_n=0.$$

Comme nous voulons que ces conditions soient remplies pour tous les mouvements possibles du système sous l'action de forces ne dépendant que de la position, il faut que les équations (7.) aient lieu quels que soient $p'_1, p'_2, \ldots, p'_n$, puisque les conditions initiales permettent de prendre ces

dérivées arbitrairement. Ces conditions (7.), dont les premiers membres sont des formes quadratiques en $p'_1, p'_2, \ldots, p'_n$, se partageront alors en un nombre plus grand d'équations définissant les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ et λ en fonction de $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Ces équations seront, en général, trop nombreuses; de sorte qu'on ne pourra réaliser la transformation que si certaines relations de condition ont lieu entre les coefficients $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$ des deux formes S et T.

Lorsque cette transformation particulière existe, en supposant $P_1, P_2, \ldots, P_n$ nuls, on trouve d'après (6.) et en vertu de (7.), que $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ sont nuls aussi. ***Donc si la transformation existe, elle doit faire correspondre, à un mouvement du premier système quand aucune force n'agit sur lui, un mouvement analogue du deuxième.*** En un mot la transformation doit conserver les mouvements *géodésiques.*

On se trouve ainsi amené à une question qui a été étudiée par MM. ***Beltrami, Lipschitz, Dini*** dans leurs travaux sur les formes quadratiques de différentielles et par M. ***S. Lie.***

Ce théorème annoncé comme probable, à la suite d'une remarque de M. ***Goursat,*** dans un article ***sur l'homographie en mécanique*** publié dans le tome XII de l'American Journal, se trouve démontré très-sommairement dans une Note que nous avons insérée récemment au ***Bulletin de la Société mathématique de France*** (t. XX, Séance du 16 mars 1892). Dans des Notes plus récentes encore, M. ***Painlevé*** (Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences de Paris, 11 avril et 23 mai 1892) a démontré ce même théorème à côté de plusieurs propositions qui nous paraissent des plus dignes d'attention et qu'il faut rapprocher de plusieurs Notes de M. ***R. Liouville*** (Comptes Rendus 6 avril 1891, 25 avril et 23 mai 1892).

Il peut arriver que, pour un système déterminé, la seule transformation réalisant les conditions indiquées soit celle de M. ***Stäckel*** accompagnée d'une transformation $dt = Cdt_1$, C étant une constante réelle ou purement imaginaire: mais, pour des systèmes spéciaux, il en existe d'autres.

Par exemple, pour des points matériels libres, on peut employer une transformation homographique (Comptes Rendus t. 108, 1889); pour un point mobile sur une sphère, on peut employer une transformation par projection centrale sur un plan (American Journal t. XIII). Enfin, comme l'a montré M. ***Dautheville,*** (Comptes Rendus t. 111, 1890 et Annales de l'Ecole Normale Supérieure t. 7, 1890) on peut transformer le mouve-

ment d'un point sur une surface à courbure totale constante en un mouvement plan (ce qui correspond à un théorème de M. *Beltrami*), et plus généralement on peut transformer le mouvement d'un point sur une surface en un mouvement d'un point sur une autre surface (non applicable), si la première surface satisfait aux conditions trouvées par M. *Dini* pour que les lignes géodésiques se correspondent.

Pour terminer le résumé des recherches faites sur les méthodes de transformation en mécanique, citons l'article de M. *Bertrand* sur la similitude en mécanique (Journal de l'École polytechnique, 1848), une Note de M. *Goursat* (Comptes Rendus t. 108, p. 446), une Note de M. *Darboux* (Ibid. p. 449), et une Note sur l'interprétation des valeurs imaginaires du temps que nous avons publiée dans le tome 87 des Comptes Rendus.

Zerfällung der lemniskatischen Theilungsgleichung in vier Factoren.

(Von Herrn *K. Schwering* in Düren.)

§ 1.

In einer früheren Abhandlung*) habe ich Methoden angegeben, die Multiplicationsformeln der lemniskatischen Function zu bilden. Eine dieser Methoden scheint darum besondere Beachtung zu verdienen, weil sie dem Schlusse der vollständigen Induction Zugang verschafft. Bevor wir also zum eigentlichen Gegenstande vorliegenden Aufsatzes übergehen, mag diese Methode eine von der früheren Arbeit unabhängige Darstellung finden.

Sei η eine ungerade ganze complexe Zahl von der Form $a+bi$, $x = \mathrm{sinam}\, u$, so ist:

$$\mathrm{sinam}(\eta u) = x\frac{\varphi(x^4)}{\chi(x^4)}. \tag{1.}$$

Die beiden Functionen φ und χ enthalten die Lösung des Multiplicationsproblems. Zwischen denselben besteht die Gleichung

$$\chi(x^4) = x^{4\mu}\varphi\left(\frac{1}{x^4}\right), \tag{2.}$$

wo

$$4\mu+1 = q = \eta\eta' = N(\eta).$$

Nach allgemein angenommener Bezeichnung ist $N(\eta)$ die *Norm* von η; η' die zu η gehörende conjugirte Zahl. Die Richtigkeit der Gleichung (2.) ersieht man aus dem Aufsatze von *C. G. J. Jacobi*, Ges. Werke Bd. I S. 266 und in sehr klarer Darstellung aus dem Aufsatze *Kroneckers*: Zur Theorie der elliptischen Functionen, Sitzungsbericht vom 29. September 1886. Die complexe Zahl η setzen wir ferner als *primär* voraus, d. h.

$$\eta = 4k+1+4k'i,$$

oder

$$\eta = 4k+3+(4k'+2)i.$$

*) Dieses Journal Bd. 107 S. 196 ff.

Nun ergiebt sich durch Anwendung des Additionstheorems der lemniskatischen Function, welches lautet:

$$(3.) \qquad \operatorname{sinam}(u+v) = \frac{x\sqrt{1-y^4}+y\sqrt{1-x^4}}{1+x^2y^2},$$

$$x = \operatorname{sinam} u, \quad y = \operatorname{sinam} v,$$

alsbald die Richtigkeit der Gleichung:

$$(4.) \qquad \operatorname{sinam}(\eta u) = \frac{\operatorname{sinam}\frac{1+\eta i}{1+i}u + i\operatorname{sinam}\frac{i+\eta}{1+i}u}{i\operatorname{sinam}\frac{1+\eta i}{1+i}u + \operatorname{sinam}\frac{i+\eta}{1+i}u}\cdot\operatorname{sinam} u.$$

Ersetzt man u durch $(1+i)v$ und erwägt, dass nach dem Additionstheorem

$$\operatorname{sinam}(1+i)u = (1+i)\frac{x\sqrt{1-x^4}}{1-x^4} = (1+i)\frac{x}{\sqrt{1-x^4}},$$

dass ferner für die lemniskatische Function

$$\operatorname{sinam}(ui) = i.\operatorname{sinam} u$$

ist, so geht (4.) nach unbedeutender Rechnung in eine Identität über.

Jetzt sind zwei Fälle zu unterscheiden:

Erster Fall: $\eta = 4k+1+4k'i.$

Wir setzen

$$(5.) \qquad \begin{cases} \varrho = \dfrac{1+i\eta}{1+i} = 1+2k-2k'+(2k+2k')i, \\ \sigma = \dfrac{i+\eta}{1+i} = 1+2k+2k'+(2k'-2k)i. \end{cases}$$

Dann sind die ungeraden Zahlen ϱ und σ beide *primär*, weil $2k-2k'$ und $2k+2k'$ dieselbe Form (mod. 4) haben. Jetzt fügen wir den Functionen φ und χ die Indices ϱ, σ, η bei nach folgender Bezeichnungserklärung:

$$\operatorname{sinam}(\eta u) = x\frac{\varphi_\eta}{\chi_\eta}.$$

Dann können wir die Argumente weglassen, und wir finden aus (4.):

$$(6.) \qquad \begin{cases} (1+i)\varphi_\eta = \varphi_\varrho.\chi_\sigma + i.\varphi_\sigma\chi_\varrho, \\ (1+i)\chi_\eta = i.\varphi_\varrho\chi_\sigma + \varphi_\sigma.\chi_\varrho. \end{cases}$$

Diese Gleichungen sind wahre Multiplicationsgleichungen. Denn ϱ und σ haben jedes eine kleinere Norm als η, weil

$$N(\varrho)+N(\sigma) = 1+N(\eta).$$

Sind also die Functionen φ_ϱ, φ_σ, χ_ϱ, χ_σ bekannt, so kann man φ_η und χ_η berechnen. Ja, es genügt schon die Kenntniss von φ_ϱ und φ_σ allein, wenn man (2.) hinzunimmt; und umgekehrt kann man (2.) durch vollständige Induction aus (6.) ableiten.

Zweiter Fall: $\eta = 4k+3+(4k'+2)i$.

Wir setzen:

$$(5^a.)\qquad \begin{cases} \varrho = -\dfrac{1+\eta i}{1+i} = -1-2k+2k'-(2+2k+2k')i, \\ \sigma = -\dfrac{i+\eta}{1+i} = -3-2k-2k'-(2k'-2k)i; \end{cases}$$

ϱ und σ sind wieder ungerade und ***primär***, und man erhält:

$$(6^a.)\qquad \begin{cases} -(1+i)\varphi_\eta = \varphi_\varrho\chi_\sigma + i\varphi_\sigma\chi_\varrho, \\ -(1+i)\chi_\eta = i\varphi_\varrho\chi_\sigma + \varphi_\sigma\chi_\varrho. \end{cases}$$

Die Formeln (6.) und (6ª.) setzen uns in den Stand, für jede ungerade Zahl η die Multiplicationsformeln und besonders die ***Theilungsgleichung*** der lemniskatischen Function aufzustellen:

$$\varphi_\eta = 0.$$

Nicht immer erhalten wir so die beste Methode zur ***numerischen*** Rechnung, da die Division mit $1+i$ ein lästiger Umstand bleibt. So findet man für $k = k' = 0$ aus (6ª.)

$$-(1+i)\varphi_{3+2i} = (x^4-1-2i)(1+6x^4-3x^8)+i(x^8+6x^4-3)(1-(1+2i)x^4).$$

Die Hauptbedeutung unserer beiden Formeln liegt aber auch anderswo. Um dieselbe gleich an einem Beispiele hervortreten zu lassen, behaupten wir die Richtigkeit des folgenden ***Lehrsatzes:***

„Ersetzt man in $\varphi(x^4)$ und $\chi(x^4)$ das Argument x^4 durch $z+1$, so erhält man:

$$(7.)\qquad \begin{cases} \varphi(z+1) = (2i)^\mu.m_0+(2i)^{\mu-1}.m_1z+(2i)^{\mu-2}.m_2z^2+\cdots+z^\mu, \\ \chi(z+1) = (2i)^\mu.m_0+(2i)^{\mu-1}.n_1z+(2i)^{\mu-2}.n_2z^2+\cdots+\eta z^\mu, \end{cases}$$

wo $4\mu+1 = N(\eta) = q$; m_0, m_1, m_2, ...; n_1, n_2, ... ***ganze*** Zahlen sind."

Angenommen, der Satz sei für ϱ, σ richtig. Sei

$$4\varkappa+1 = N(\varrho) = \frac{1+\eta i-\eta' i+q}{2},$$

$$4\lambda+1 = N(\sigma) = \frac{1-\eta i+\eta' i+q}{2},$$

also: $\varkappa+\lambda = \mu$.

Bildet man nun die Gleichungen (7.) für φ_ϱ, φ_σ, χ_ϱ, χ_σ und multiplicirt

sie in der durch die Gleichung (6.) geforderten Art, so findet man, dass die Gleichungen (7.) allgemein richtig sind. Man erhält z. B. für das von z freie Glied, indem man die betreffenden m und n durch Doppelindices unterscheidet:

$$(2i)^{\varkappa+\lambda}(m_{0,\varrho}.m_{0,\sigma}+i.m_{0,\varrho}.m_{0,\sigma}),$$

also nach Division mit $1+i$ im Ausdruck für φ_η:

$$(2i)^{\mu}.m_{0,\varrho}.m_{0,\sigma};$$

was zu beweisen war. Ebenso liefert die Multiplication für das Glied mit z:

$$(2i)^{\mu-1}(m_{0,\varrho}.n_{1,\sigma}+m_{1,\varrho}.m_{0,\sigma})(1+i),$$

was zu beweisen war. Das höchste Glied in χ_η wird $z^{\varkappa+\lambda}=z^{\mu}$ multiplicirt mit

$$\frac{i\sigma+\varrho}{1+i} = \eta,$$

was zu beweisen war. Der Satz ist also allgemein bewiesen. Es ist

$$\varphi(1) = (2i)^{\mu}.(-1)^{\mathrm{ind}(1+i)},$$

wie wir in der früheren Abhandlung bewiesen haben*).

Bezeichnen wir die Wurzeln der *lemniskatischen Theilungsgleichung*

$$\varphi(x^4) = 0$$

durch $x=\gamma$, so kann man den obigen Satz auch folgendermassen aussprechen:

Jede homogene symmetrische Function mter Ordnung der Grössen γ_r^4-1 *oder* $\frac{1}{\gamma_r^4}-1$ *hat den Theiler* $(2i)^m$.

Setzen wir in (7.) $z=2ui$, so erhalten wir aus der Theilungsgleichung die folgende:

$$u^{\mu}+m_{\mu-1}u^{\mu-1}+\cdots+m_1u+(-1)^{\mathrm{ind}(1+i)} = 0.$$

Diese Gleichung zeigt, dass die *Norm* der Grössen u die negative oder positive Einheit ist. Also ist u nach *Kronecker*s Bezeichnung eine (*complexe*) *Einheit.* Wir haben also den Satz:

Ist γ *eine Wurzel der lemniskatischen Theilungsgleichung, so ist* $\frac{1-\gamma^4}{2}$ *eine Einheit.*

Für $\eta=-3$, $\mu=2$ lautet die Theilungsgleichung

$$x^8+6x^4-3 = 0.$$

Es ist $\gamma^4=-3+2\sqrt{3}$ und $2-\sqrt{3}$ eine Einheit.

*) Dieses Journal Bd. 107 S. 219, Gleichung (66.).

Ein anderer bemerkenswerther Satz ergiebt sich durch die Annahme $x^4 = z-1$. Man beweist ihn durch vollständige Induction. Er ist in den beiden Gleichungen enthalten:

$$(7^a.)\quad \begin{cases} \varphi_\eta(z-1) = (1+i)^{3\mu}.i^{\mathrm{ind}\,(1+i)} + (1+i)^{3\mu-3}.m_1' z + (1+i)^{3\mu-6}.m_2' z^2 + \cdots + z^\mu, \\ \chi_\eta(z-1) = (1+i)^{3\mu}.i^{\mathrm{ind}\,(1+i)} + (1+i)^{3\mu-3}.n_1' z + (1+i)^{3\mu-6}.n_2' z^2 + \cdots + \eta z^\mu. \end{cases}$$

Die Coefficienten sind wieder ganze Zahlen, welche mit Potenzen von $(1+i)^3$ multiplicirt sind.

Man kann aus der Theorie der Kreistheilung wohl auf manches hinweisen, was diesen Sätzen aus der Lemniskatentheilung zur Seite steht. Etwas genau entsprechendes existirt aber nicht. Die Wichtigkeit dieser Sätze kann erst an späterer Stelle hervortreten.

§ 2.

Wenden wir uns nun der Zerfällung der Theilungsgleichung zu. Theoretisch ist dieselbe schon von ***Eisenstein****) gelehrt worden. Wir können daher in dieser Beziehung uns grösster Kürze befleissen und den Leser auf die *Eisenstein*sche Arbeit verweisen. Nur einige Andeutungen dürfen wir nicht unterdrücken, da ihr Gegenstand den Ausgangspunkt unserer eigenen Untersuchungen bildet.

Eisenstein geht von einem Satze aus, den man etwa so wiedergeben kann: „Hat die ganzzahlige Gleichung

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

die Eigenschaft, dass irgend eine ganze Function ihrer Wurzeln

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

einen *rationalen* Werth hat, so ist dieser Werth immer eine *ganze* Zahl.“ Den Beweis führt *Eisenstein* dadurch, dass er alle $n!$ Vertauschungen der x vornimmt und diejenige Gleichung bildet, deren Wurzeln die verschiedenen so entstehenden Werthe der Function F sind. Die Coefficienten *dieser* Gleichung sind nun als ganze symmetrische Functionen *sämmtlicher x ganze* Zahlen und darum kann diese Gleichung, wenn sie *rationale* Wurzeln hat, nur *ganzzahlige* Wurzeln haben. — Wir werden den Satz häufig als *Eisenstein*schen *Satz* anführen. Er ist von grosser Bedeutung.

---

*) Dieses Journal Bd. 39 S. 160 ff.

Man kann nun die theoretische Zerfällung kurz folgendermassen darstellen. Sei g primitive Wurzel (mod.η), $g^{\mu} \equiv i (\mathrm{mod}.\eta)$,

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}},$$

dann sind die Wurzeln der Theilungsgleichung:

$$\gamma_n = \mathrm{sinam}\frac{4g^n K}{\eta}; \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, q-1).$$

Eisenstein setzt dann

$$\gamma_n = \psi(g^n K)$$

und bildet

$$W_1 = (x-\psi(K))(x-\psi(g^2K))\ldots(x-\psi(g^{q-3}K)),$$
$$W_2 = (x-\psi(gK))(x-\psi(g^3K))\ldots(x-\psi(g^{q-2}K)).$$

Es zeigt sich, dass W_1+W_2 sowie $\frac{W_1-W_2}{\sqrt{\eta}}$ cyklische ganze Functionen der Wurzeln, also ganze Zahlen sind, und somit hat man die Zerfällung

$$(8.) \qquad \varphi(x^4) = Y^2-\eta Z^2,$$

wo Y und Z ganze Functionen sind, welche höchstens den Nenner 2 enthalten. Allein *Eisenstein* hat bereits erkannt, dass dieser Nenner in Wirklichkeit nicht auftritt, obschon er den Beweis für diese Behauptung nicht mittheilt*). Wir werden den Beweis weiter unten führen und dann auf die Sache näher eingehen.

Um die *zweite* Zerlegung in *vier* Factoren zu bewirken, theilen wir die Grössen $g^n K$ in vier Klassen nach den vier Formen

$$n = 4h;\ 4h+1;\ 4h+2;\ 4h+3;$$

und erkennen dann die Möglichkeit, $\varphi(x^4)$ in vier Theiler von der Form zu zerlegen:

$$A+B\sqrt{\eta}+C\sqrt[4]{\eta}+D\sqrt[4]{\eta^3}.$$

A, B, C, D sind entweder ganzzahlig oder mit dem Nenner 2 behaftet. Auch kann eine achte Wurzel der Einheit als Factor auftreten.

Jetzt unterscheiden wir zwei Fälle:

$$1)\quad q = 8m+5; \qquad 2)\quad q = 8m+1.$$

Im ersten Falle ist $\mu = 2m+1$, also i ein quadratischer Nichtrest. Wenn

*) Herr *Bachmann* setzt in seinem Aufsatze, Mathem. Annalen Bd. 16 S. 545 ausdrücklich den Nenner 2 voraus.

nun γ_n eine Wurzel der lemniskatischen Theilungsgleichung ist und n eine durch 4 theilbare Zahl, so gehören die

$$\gamma_n, \quad \gamma_n i, \quad -\gamma_n, \quad -\gamma_n i$$

vier verschiedenen Klassen an, und die theoretische Zerlegung der Gleichung $\varphi(x^4) = 0$ ist einfach folgende:

Erste Zerlegung.

1) $(x^2-\gamma_0^2)(x^2-\gamma_1^2)\ldots(x^2-\gamma_{\mu-1}^2)$,
2) $(x^2+\gamma_0^2)(x^2+\gamma_1^2)\ldots(x^2+\gamma_{\mu-1}^2)$.

Zweite Zerlegung.

1) $(x-\gamma_0)(x-\gamma_1)\ldots(x-\gamma_{\mu-1})$,
2) $(x+\gamma_0)(x+\gamma_1)\ldots(x+\gamma_{\mu-1})$,
3) $(x-\gamma_0 i)(x-\gamma_1 i)\ldots(x-\gamma_{\mu-1} i)$,
4) $(x+\gamma_0 i)(x+\gamma_1 i)\ldots(x+\gamma_{\mu-1} i)$.

Zur praktischen Zerfällung wäre für die erste nun zunächst zu bilden:

$$s_0 = \gamma_0^2+\gamma_1^2+\cdots+\gamma_{\mu-1}^2.$$

Durch Quadrirung erhält man in s_0^2 erstens die Summe der vierten Potenzen, also eine ganze Zahl. Ferner erhält man cyklische Functionen von der Form

$$2(\gamma_0^2\gamma_1^2+\gamma_1^2\gamma_2^2+\cdots+\gamma_{\mu-1}^2\gamma_0^2).$$

γ_1^2 kann man als rationale Function von γ_0 darstellen mit Hülfe des Multiplicationstheorems; und zwar erscheint dabei eine rationale Function von γ_0^4 multiplicirt mit γ_0^2. Daher wird der Klammerausdruck eine *symmetrische* Function der $\gamma_0^4, \gamma_1^4, \ldots, \gamma_{\mu-1}^4$, also eine *rationale* Zahl. Da er nun in der ursprünglichen Form eine *ganze ganzzahlige* Function der Wurzeln ist, so ist er nach dem *Eisenstein*schen Satze eine *ganze* Zahl, also s_0 die Wurzel aus einer ganzen Zahl. Betrachten wir nun den Ausdruck

$$\frac{\gamma_0^2+\gamma_1^2+\cdots+\gamma_{\mu-1}^2}{\gamma_0^2\gamma_1^2\cdots\gamma_{\mu-1}^2},$$

so finden wir durch die entsprechenden Schlüsse, dass dieser Ausdruck eine symmetrische Function der γ^4 ist. Da nun der Nenner den Werth $i\sqrt{\eta}$ hat, wie *Eisenstein* a. a. O. beweist, so sieht man endlich, dass s_0 den Werth $m\sqrt{\eta}$ mit *ganzzahligem* m hat. Diese Schlüsse gelten nicht bloss für s_0, sondern für die symmetrischen Functionen der Wurzeln $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{\mu-1}$ überhaupt, sobald diese Wurzelfunctionen ganz und ganzzahlig sind. Wir

können daher über die von *Eisenstein* aufgestellte Behauptung hinausgehend schliessen:

„Ist η eine complexe ungerade Primzahl und $N(\eta)$ von der Form $8m+5$, so sind nicht bloss die beiden Functionen Y und Z, welche bei der ersten Zerlegung auftreten, sondern auch die bei der zweiten Zerlegung erscheinenden A, B, C, D *ganze Zahlen, ohne die Nenner* 2, *bezw.* 4."

Zur wirklichen Darstellung der Functionen Y und Z gelangen wir nun folgendermassen.

Wir setzen:

$$Y = x^2(x^{4m}+\alpha_1\eta x^{4m-4}+\alpha_2\eta x^{4m-8}+\cdots+\alpha_m\eta),$$
$$Z = \beta_1 x^{4m}+\beta_2 x^{4m-4}+\cdots+\beta_m x^4+i.$$

Hierzu bemerken wir, dass in Y jeder Coefficient mit Ausnahme des ersten den Factor η haben muss, weil sonst die Gleichung

$$(\mathfrak{A}.) \qquad Y^2-\eta Z^2 = \varphi(x^4)$$

nicht bestehen könnte. In $\varphi(x^4)$ hat nämlich jeder Coefficient den Factor η, wie wir in unserer früheren Abhandlung*) gezeigt haben. Uebrigens kann man es auch in der für s_0 oben durchgeführten Schlussweise zeigen.

Wir haben also $2m$ Gleichungen mit $2m$ Unbekannten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$; $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ vor uns. Die directe Auflösung dieses Systems wird niemand versuchen. Im Falle des Gelingens würden sich eine Menge Nebenlösungen einstellen. ***Diese Auflösung kann nun völlig eindeutig ersetzt werden durch ein System von Congruenzen.***

Schon *Legendre* hat für die entsprechende Aufgabe der Kreistheilung den Gedanken gehabt, Congruenzen zur Lösung zu verwenden. Er entwickelt, um Y für die Gleichung

$$4\cdot\frac{x^n-1}{x-1} = Y^2 \pm nZ^2$$

zu bestimmen, $2(x-1)^{\frac{n-1}{2}}$ und nimmt statt der Coefficienten ihre *kleinsten Reste* (*mod.n*). *Jacobi* wies ihm nach, dass dies Verfahren fehlerhaft sei**), und er ist, durch diese Bemerkung eingeschüchtert, nicht wieder darauf zurückgekommen. Und doch bedarf das Verfahren nur einer kleinen Abänderung,

*) Dieses Journal Bd. 107 S. 207; Ende des § 4.

**) Siehe *Jacobi*s Ges. Werke, Bd. I. S. 453, Briefwechsel.

um sogar für die viel schwierigere Aufgabe, welche uns hier beschäftigt, vollkommen auszureichen.

Gauss hat in seinem klassischen Werke über die biquadratischen Reste den Begriff der *numerisch* kleinsten complexen Zahl aufgestellt. *Wir benutzen diesen Begriff, um eine gegebene complexe Zahl nach Potenzen des Moduls η zu entwickeln.* Sei A die Zahl. Wir bestimmen ihren kleinsten Rest $r_1 \pmod{\eta}$ und den Quotienten $\frac{A-r_1}{\eta} = q_1$; alsdann bilden wir wieder $q_1 \equiv r_2 \pmod{\eta}$, wo r_2 wieder den kleinsten Rest bezeichnet, alsdann $q_2 = \frac{q_1-r_2}{\eta}$ u. s. w. Als Beispiel nehmen wir den stärksten numerischen Coefficienten in φ_{7-2i}, $\eta = 7-2i$, welcher ist:

$$A = -217\,796-131\,480i.$$

Man findet $r_1 = 0$, also

$$\begin{aligned}
A &= -(23\,804+25\,584i)\eta,\\
23\,804+25\,584i &= -3+3i+(2\,179+4\,277i)\eta,\\
2\,179+\ 4\,277i &= 3+(126+647i)\eta,\\
126+\ \ 647i &= 2+i+(-8+90i)\eta,\\
-8+\ \ \ 90i &= -4-2i+(-4+12i)\eta,\\
-4+\ \ \ 12i &= 1+3i+(-1+i)\eta.
\end{aligned}$$

Folglich:

$$-A = (-3+3i)\eta+3\eta^2+(2+i)\eta^3-(4+2i)\eta^4+(1+3i)\eta^5+(-1+i)\eta^6.$$

Jede complexe Zahl kann nur auf eine einzige Art nach Potenzen eines Moduls entwickelt werden, wenn wir den Coefficienten immer die numerisch kleinsten Werthe ertheilen. Wir haben hier ein Entsprechendes zum dekadischen Zahlensystem aus der Theorie der complexen Grössen vor uns, und dieser Gedanke führt uns ans Ziel, wie wir jetzt sehen werden.

Bezeichnen wir die Coefficienten von $\varphi(x^4)$ wie gewöhnlich durch a und schreiben:

$$\varphi(x^4) = x^{4\mu}+a_1x^{4\mu-4}+a_2x^{4\mu-8}+\cdots+a_{\mu-1}x^4+\eta,$$

so erhalten wir nach Gleichung (𝔄.)

$$\begin{aligned}
-2\beta_m i+\alpha_m^2\eta &= \frac{1}{\eta}a_{\mu-1},\\
-(2\beta_{m-1}i+\beta_m^2)+2\alpha_m\alpha_{m-1}\eta &= \frac{1}{\eta}a_{\mu-2},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Fassen wir dieselben als Congruenzen (mod.η), so bestimmen die ersten m eindeutig die kleinsten Reste der β_m, β_{m-1}, ..., β_1. Die Werthe der α sind hierbei ohne Einfluss, da alle Glieder, in welchen sie auftreten, den Factor η haben. Die $(m+1)$te Congruenz, welche durch die Betrachtung des Coefficienten von x^{4m+4} gewonnen wird, bestimmt eindeutig den kleinsten Rest von α_m (mod.η). Denn α_m ist allein von allen α nicht mit η multiplicirt und erscheint in erster Potenz. Ebenso bestimmt die folgende Congruenz α_{m-1} u. s. w., bis endlich alle kleinsten Reste der α und β bestimmt sind. Bezeichnen wir sie durch α' und β' und setzen:

$$\alpha_r = \alpha'_r + \eta\alpha''_r, \quad \beta_r = \beta'_r + \eta\beta''_r,$$

so erhalten wir nach Abtrennung des Factors η ein neues System von derselben Form wie das vorige, mit den Unbekannten α'' und β'' und mit bedeutend kleineren Zahlgrössen, da eine Division durch η vorausgegangen ist. Sind die Grössen α'' und β'' noch verschieden von ihren kleinsten Resten (mod.η), so ist eine erneute Rechnung erforderlich. In den von mir berechneten Beispielen war diese dritte Rechnung nur bei $\eta = 7-2i$, also $q = 53$, $\mu = 13$ erforderlich und zwar nur bei einigen Coefficienten. Das Verfahren ***muss*** einmal zu Ende gehen, weil die Entwicklung der α und β nach Potenzen von η in der oben gelehrten Art nur auf *eine* Weise geschehen kann.

1) Zahlenbeispiel. $\eta = 3+2i$, $q = 13$, $\mu = 3$.

In diesem Falle ist

$$x^4(x^4+\alpha_1\eta)^2 - \eta(\beta_1 x^4 + i)^2 = x^{12} + (-1+4i)\eta x^8 + (1-2i)\eta x^4 + \eta.$$

Daher die Gleichungen

$$-2\beta_1 i + \alpha_1^2\eta = 1-2i; \quad 2\alpha_1 - \beta_1^2 = -1+4i.$$

Löst man sie als Congruenzen, so folgt:

$$\beta_1 \equiv 2i \text{ (mod.}\eta), \quad \alpha_1 \equiv 1 \text{ (mod.}\eta).$$

Für die zweite Rechnung ist der Modul nicht η, sondern η^2. Es wird

$$\beta_1 \equiv 2-i \text{ (mod.}(\eta^2)); \quad \alpha_1 \equiv 1 \text{ (mod.}(\eta^2)).$$

Aber dies sind bereits die genauen Werthe, und es ist:

$$Y = x^6 + (3+2i)x^2; \quad Z = i + (2-i)x^4.$$

2) Zahlenbeispiel. $\eta = 7-2i$, $q = 53$, $\mu = 13$.

Es ist die Theilungsgleichung $\varphi = 0$ und

$$\varphi(x^4) = x^{52} + a_1 x^{48} + a_2 x^{44} + \cdots + a_{13},$$

wo:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 99-210i,\\
a_2 &= 70+1\,464i,\\
a_3 &= -19\,558+76i,\\
a_4 &= 51\,075+31\,608i,\\
a_5 &= -92\,479-137\,726i,\\
a_6 &= 188\,708+177\,648i,\\
a_7 &= -217\,796-131\,480i,\\
a_8 &= 51\,639+50\,224i,\\
a_9 &= 62\,709+1\,042i,\\
a_{10} &= -29\,258-3\,240i,\\
a_{11} &= 4\,874+2\,060i,\\
a_{12} &= -91+344i,\\
a_{13} &= 7-2i.
\end{aligned}$$

Jetzt setzen wir

$$\begin{aligned}
Y &= x^{26}+\alpha_1\eta x^{22}+\alpha_2\eta x^{18}+\cdots+\alpha_6\eta x^2,\\
Z &= \beta_1 x^{24}+\beta_2 x^{20}+\beta_3 x^{16}+\cdots+\beta_6 x^4+i
\end{aligned}$$

und finden durch die erste Rechnung (mod.(η)):

$\beta_1 \equiv 5i$, $\beta_2 \equiv 1$, $\beta_3 \equiv -2-i$, $\beta_4 \equiv 4+2i$, $\beta_5 \equiv -3+5i$, $\beta_6 \equiv 5-i$.

$\alpha_1 \equiv -2-12i$, $\alpha_2 \equiv -2i$, $\alpha_3 \equiv -3+i$, $\alpha_4 \equiv -2-i$, $\alpha_5 \equiv -4-i$, $\alpha_6 \equiv -1+2i$.

Dann durch die zweite Rechnung (mod.(η^2)):

$$\beta_1 \equiv 5i,\quad \beta_2 \equiv -24-8i,\quad \beta_3 \equiv -1+29i,\quad \beta_4 \equiv 16-9i,\quad \beta_5 \equiv -10+7i,$$
$$\beta_6 \equiv -32+2i;$$
$$\alpha_1 \equiv -2-12i,\quad \alpha_2 \equiv 9-50i,\quad \alpha_3 \equiv -15i,\quad \alpha_4 \equiv -25-2i,\quad \alpha_5 \equiv -3+29i,$$
$$\alpha_6 \equiv -1+2i.$$

Die dritte Rechnung ergiebt (mod.(η^3)), wo $\eta^3 = 259-286i$:

$$\beta_1 \equiv 5i,\quad \beta_2 \equiv 32+82i,\quad \beta_3 \equiv -192+23i,\quad \beta_4 \equiv -436i,$$
$$\beta_5 \equiv 192+131i,\quad \beta_6 \equiv -32+2i;$$
$$\alpha_1 \equiv -2-12i,\quad \alpha_2 \equiv 9-50i,\quad \alpha_3 \equiv 84+120i,\quad \alpha_4 \equiv -115+54i,$$
$$\alpha_5 \equiv 14-44i,\quad \alpha_6 \equiv -1+2i.$$

Aber diese Werthe sind bereits genau. Sie genügen nicht nur den Congruenzen, sondern auch den Gleichungen. Man hat also in diesem Falle:

$\eta = 7-2i,\ q = 53,\ \mu = 13$:

$$Y = x^{26}+\eta\{(-2-12i)x^{22}+(9-50i)x^{18}+(84+120i)x^{14} +(-115+54i)x^{10}+(14-44i)x^{6}+(-1+2i)x^{2}\};$$

$$Z = +5i.x^{24}+(32+82i)x^{20}+(-192+23i)x^{16}-436i.x^{12} +(192+131i)x^{8}+(-32+2i)x^{4}+i.$$

Man kann die Lösung der Congruenzen (mod.η) kurz auch so schreiben:

$$Zi \equiv \left\{1+\frac{a_{\nu-1}}{\eta}x^4+\frac{a_{\nu-2}}{\eta}x^8+\cdots\right\}^{\frac{1}{2}} \text{ (mod.}\eta\text{)}.$$

Da wir nun in unserer früheren Abhandlung*) bewiesen haben, dass

$$\frac{a_{\mu-r}}{\eta} \equiv \frac{1.3.5\ldots(2r-1)}{2.4.6\ldots(2r)}\cdot\frac{1}{4r+1} \text{ (mod.}\eta\text{)},$$

ist, so kann man die Reste der β sogar in geschlossener Form angeben. Man findet z. B.

$$\beta_m \equiv \frac{i}{20} \text{ (mod.}\eta\text{)}.$$

Die angegebene Methode der Zerlegung durch Lösung von Congruenzen ist von mir in einem nicht eben einfachen Beispiele zum Nachweise der Unzerlegbarkeit eines Ausdruckes mit Erfolg benutzt worden. Vielleicht lässt sich auf diesem Wege für viele Gleichungen ein einfaches Zeichen der Unzerlegbarkeit gewinnen.

Wenden wir uns nun der zweiten Zerlegung in *vier* Factoren zu. Betrachten wir die Function der Wurzeln:

$$\frac{\gamma_0+\gamma_1+\cdots+\gamma_{\mu-1}}{\gamma_0\gamma_1\cdots\gamma_{\mu-1}},$$

so ändert sich dieselbe nicht, wenn γ_0 durch $\gamma_0 i$ ersetzt wird, falls

$$q = 16n+5$$

ist. Denn der Zähler erhält, da γ_r in γ_r^i übergeht, den Factor i und der Nenner ebenfalls: $i^\mu = i^{4n+1} = i$. Beachtet man nun, dass der Nenner nichts anderes ist als $\sqrt[4]{-\eta}$, dass ferner dieselben Schlüsse für die symmetrischen Functionen der $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{\mu-1}$ entsprechend gezogen werden können, so ergiebt sich, wie auch *Eisenstein* in der genannten Abhandlung gezeigt hat, als allgemeine Form der zweiten Zerlegung:

für $q = 16n+5;\ \varepsilon^2 = -i,\ \mu = \frac{q-1}{4} = 4n+1$:

$$(9.)\quad \begin{cases} x^\mu+p_1\varepsilon x^{\mu-1}\sqrt[4]{\eta}+p_2\varepsilon^2\sqrt[4]{\eta^2}x^{\mu-2}+p_3\varepsilon^3\sqrt[4]{\eta^3}x^{\mu-3}+p_4\varepsilon^4\eta x^{\mu-4} \\ \quad +p_5\varepsilon^5\sqrt[4]{\eta}x^{\mu-5}+p_6\varepsilon^6\sqrt[4]{\eta^2}x^{\mu-6}+\cdots+\varepsilon^\mu\sqrt[4]{\eta} = 0 \end{cases}$$

*) Seite 227 Gleichung (86^b.).

und durch ähnliche Schlüsse

$$\text{für} \quad q = 16n+13, \quad \mu = \frac{q-1}{4} = 4n+3, \quad \varepsilon^2 = i,$$

die Zerlegungsgleichung:

$$(10.) \quad \begin{cases} x^\mu + p_1\varepsilon\sqrt[4]{\eta^3}x^{\mu-1} + p_2\varepsilon^2\sqrt[4]{\eta^2}x^{\mu-2} + p_3\varepsilon^3\sqrt[4]{\eta}x^{\mu-3} + p_4\varepsilon^4\eta x^{\mu-4} \\ \qquad + p_5\varepsilon^5\sqrt[4]{\eta^3}x^{\mu-5} + p_6\varepsilon^6\sqrt[4]{\eta^2}x^{\mu-6} + \cdots + \varepsilon^\mu\sqrt[4]{\eta} = 0. \end{cases}$$

Die $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ sind ***ganze Zahlen,*** wie wir schon oben bewiesen haben. Zur wirklichen Berechnung ihrer Werthe führt wieder die Congruenzenmethode, aber bei weitem schneller. Wir wollen nur den Gang kurz andeuten. Die zweite Zerlegungsgleichung hat die Form:

$$(A+B\sqrt{\eta}+\sqrt[4]{\eta}(C+D\sqrt{\eta}) = 0.$$

Daher hat man nach Multiplication mit der conjugirten Grösse:

$$(A+B\sqrt{\eta})^2-\sqrt{\eta}(C+D\sqrt{\eta})^2 = Y+\sqrt{\eta}Z,$$

$$(11.) \quad \begin{cases} A^2+B^2\eta-2CD\eta = Y, \\ 2AB-C^2-D^2\eta = Z. \end{cases}$$

Die Coefficienten von A enthalten mit Ausnahme des einzigen Gliedes x^μ den Factor η. Daher erhalten wir zuerst durch Auflösung der Congruenzen, welche aus der zweiten Gleichung (11.) hervorgehen, den Ausdruck C, dann aus den höchsten Potenzen, welche aus A durch das Glied x^μ hervorgehen, den Ausdruck B. Sei $C = C'+\eta C''$, $B = B'+\eta B''$, dann folgt aus der ersten Gleichung:

$$A^2+B'^2\eta-2C'D\eta \equiv Y \pmod{(\eta^2)}.$$

Die niedrigsten Potenzen von A enthalten aber alle den Factor η^2, daher wird für dieselben nach Division mit η:

$$B'^2-2C'D \equiv Y \pmod{\eta}.$$

So gewinnt man D und nun endlich aus den höchsten Gliedern, die aus A^2 durch Einwirkung von x^μ entstehen, auch A. Sind die Congruenzen (mod.(η)) gelöst, so beginnt dasselbe Verfahren noch einmal, aber (mod.(η^2)). Wir haben dies oben gelegentlich der ersten Zerlegung hinreichend angegeben. Nach dieser Methode habe ich die Zerlegung für alle Primzahlen bis $\eta = 7-2i$, $q = 53$ ausgeführt. Für kleinere Primzahlen hat man sofort in den Congruenzlösungen die richtigen Werthe, ganz entsprechend der von *Legendre* für die Kreistheilung beobachteten Erscheinung.

Hiermit sind unsere Bemerkungen über die theoretische und praktische Zerlegung der lemniskatischen Theilungsgleichung im *ersten* Falle $q = 8m+5$ erledigt. Gehen wir jetzt zum *zweiten* Falle über: $q = 8m+1$.

Es ist für diesen Fall $\mu = 2m$, $i^{\frac{q-1}{4}} = i^{2m} = (-1)^m$. i ist also für $q = 16n+9$ quadratischer Rest, biquadratischer Nichtrest und für $q = 16n+1$ sogar biquadratischer Rest. Wenn wir die erste Zerfällung ausführen wollen, so wählen wir zunächst diejenigen γ_n aus,

$$\gamma_n = \operatorname{sinam} \frac{4g^n K}{\eta},$$

für welche n eine gerade Zahl ist. Unter den so bestimmten g^n findet sich diesmal die Zahl i. Folglich gehören jetzt die Wurzeln γ_n, $\gamma_n i$, $-\gamma_n$, $-\gamma_n i$ als Wurzeln *einer* Zerlegungsgleichung zusammen. Daher wird jetzt die erste Zerlegung:

$$1)\ (x^4-\gamma_0^4)(x^4-\gamma_2^4)\dots(x^4-\gamma_{2m-2}^4),$$
$$2)\ (x^4-\gamma_1^4)(x^4-\gamma_3^4)\dots(x^4-\gamma_{2m-1}^4).$$

Die Gleichung $Y^2-\eta Z^2 = \varphi(x^4)$ wird durch folgenden Ansatz mit Hülfe der Congruenzen gelöst:

$$Y = x^{4m}+\alpha_1\eta x^{4m-4}+\alpha_2\eta x^{4m-8}+\dots+\alpha_m\eta,$$
$$Z = \beta_1 x^{4m-4}+\beta_2 x^{4m-8}+\dots+\beta_m.$$

Y und Z haben also jetzt gleiche Potenzen von x^4. Der höchste Coefficient α_1 ist sofort bestimmbar. Man findet

$$\alpha_1 = \frac{\eta^3-\eta'}{24}.$$

Die beiden letzten Coefficienten lösen die *Pell*sche Gleichung:

$$\alpha_m^2\eta-\beta_m^2 = 1.$$

Wir wollen jetzt zeigen, dass die Coefficienten α und β der von *Eisenstein* aufgestellten aber nicht bewiesenen Behauptung gemäss auch in diesem zweiten Falle von jedem Nenner freie ganze Zahlen sind. Zu diesem Zwecke betrachten wir die beiden Ausdrücke

$$\gamma_0^4+\gamma_2^4+\dots+\gamma_{2m-2}^4+\gamma_1^4+\gamma_3^4+\dots+\gamma_{2m-1}^2 = a,$$
$$\gamma_0^4+\gamma_2^4+\dots+\gamma_{2m-2}^4-\gamma_1^4-\gamma_3^4-\dots-\gamma_{2m-1}^4 = b.$$

Der erste Ausdruck ist symmetrisch und zwar eine ganze Zahl, der zweite ist zweiwerthig, sein Quadrat ist eine ganze Zahl, und wie wir schon wissen, kann bei der Ausziehung der Wurzel nur die Irrationalität $\sqrt{\eta}$ auf-

treten. Ersetzen wir jedes γ^4 durch $1+\gamma^4$, so erhalten wir nach § 1 die Gleichung $z = x^4+1$ und dadurch eine Gleichung in z, deren erster Coefficient durch $(1+i)^3$, der folgende durch $(1+i)^6$ u. s. w. theilbar ist. $a+2m$ ist also durch $(1+i)^3$, folglich sicher durch 2 theilbar. Betrachten wir b^2, so erscheint dasselbe in der Form

$$(a+2m)^2-4\Sigma(1+\gamma_{2s}^4)\Sigma(1+\gamma_{2s+1}^4),$$

ist also mindestens durch 4 theilbar. a und b sind folglich gerade Zahlen, und somit ist

$$\gamma_0^4+\gamma_2^4+\cdots+\gamma_{2m-2}^4 = \alpha_1\eta+\beta_1\sqrt{\eta}$$

frei von jedem Nenner. Hier ist der Weg deutlich gezeigt, den man einzuschlagen hat, um den Beweis für *jedes* α und β zu erhalten. Der Beweisgrund liegt in der Thatsache, dass jede symmetrische ganzzahlige Function der Grössen $1+\gamma^4$ eine *gerade* Zahl ist.

Betrachten wir nun die *zweite* Zerlegung, so haben wir wiederum zwei Fälle zu unterscheiden,

$$q = 16n+1 \quad \text{und} \quad q = 16n+9.$$

Im ersteren Falle geht $P = \sqrt[4]{\eta} = \gamma_0\gamma_1\ldots\gamma_{\mu-1}$ durch Vertauschung von γ_0 mit γ_1 in Pi, durch Vertauschung von γ_0 mit γ_2 in $-P$, durch Vertauschung von γ_0 mit γ_3 in $-Pi$ über. Also werden die vier Theiler:

$$(12.)\quad \begin{cases} 1)\ A+B\sqrt{\eta}+C\sqrt[4]{\eta}+D\sqrt[4]{\eta^3} = (x^4-\gamma_0^4)(x^4-\gamma_4^4)\ldots(x^4-\gamma_{4n-4}^4); \\ 2)\ A-B\sqrt{\eta}+Ci\sqrt[4]{\eta}-Di\sqrt[4]{\eta^3} = (x^4-\gamma_1^4)(x^4-\gamma_5^4)\ldots(x^4-\gamma_{4n-3}^4); \\ 3)\ A+B\sqrt{\eta}-C\sqrt[4]{\eta}-D\sqrt[4]{\eta^3} = (x^4-\gamma_2^4)(x^4-\gamma_6^4)\ldots(x^4-\gamma_{4n-2}^4); \\ 4)\ A-B\sqrt{\eta}-Ci\sqrt[4]{\eta}+Di\sqrt[4]{\eta^3} = (x^4-\gamma_3^4)(x^4-\gamma_7^4)\ldots(x^4-\gamma_{4n-1}^4). \end{cases}$$

Der Ausdruck $\sqrt[4]{\eta}$ ist vierwerthig, aber durch die Festsetzung

$$(13.)\qquad \gamma_0\cdot\gamma_1\cdots\gamma_{\mu-1} = \sqrt[4]{\eta}$$

eindeutig bestimmt. Wir wissen aus der allgemeinen Theorie, dass die Functionen A, B, C, D ganz und ganzzahlig sind, bis auf einen Nenner 4. Allein es lässt sich zeigen, dass der Nenner 4 nicht erscheint. Zur Bestimmung der Function A z. B. müssen wir die obigen vier Zerlegungsgleichungen addiren. Dann erhält man rechts eine symmetrische Function sämmtlicher γ^4, von der wir nachzuweisen haben, dass sie durch 4 theilbar

ist. Ersetzen wir $x^4-\gamma^4$ durch $x^4+1-(1+\gamma^4)$, so haben alle symmetrischen Functionen von $1+\gamma^4$ mindestens den Factor $(1+i)^6$ mit Ausnahme der ersten $\Sigma(1+\gamma^4)$, von der wir bisher nur wissen, dass sie den Theiler $(1+i)^3$ hat (vgl. § 1). Allein ihr Werth ist $\frac{q-1}{4}-\frac{\eta^4-q}{12}$ *). Nun muss aber η, da $q=16n+1$, die Form haben $\eta=8k+1+4k'i$; und so erkennt man alsbald, dass $\Sigma(1+\gamma^4)$ den Theiler 4 hat. — Die Functionen A sind also ganz und ganzzahlig, wenn $q=16n+1$ ist. Ist η eine reelle ungerade Primzahl $\eta=-p$, $p=4m+3$, so wird $\Sigma(1+\gamma^4)=\frac{(p^2-1)(p^2-3)}{12}$, also durch 8 theilbar. In diesem Falle entsteht durch $\sqrt[4]{\eta}$ der Multiplicator $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$; aber man sieht, dass auch jetzt ganze Zahlen, *multiplicirt mit* $\sqrt{2}$ hervorgehen. Hiermit ist von den beiden durch $q=8m+1$ gegebenen Fällen der erste erledigt. Für den *zweiten* $q=16m+9$ ist

$$\gamma_{4r+2}=\operatorname{sinam}\frac{4g^{4r+2}K}{\eta}=\operatorname{sinam}\frac{4g^{4m+2}g^{4r-4m}K}{\eta}=i\gamma_{4r-4m}.$$

Daher erhalten wir die vier Zerlegungsbestandteile:

$$(14.)\quad\begin{cases}1)\ A+B\sqrt{\eta}+C\sqrt[4]{\eta}+D\sqrt[4]{\eta^3}=(x^2-\gamma_0^2)(x^2-\gamma_4^2)\dots(x^2-\gamma_{4m}^2),\\ 2)\ A-B\sqrt{\eta}+Ci\sqrt[4]{\eta}-Di\sqrt[4]{\eta^3}=(x^2-\gamma_1^2)(x^2-\gamma_5^2)\dots(x^2-\gamma_{4m+1}^2),\\ 3)\ A+B\sqrt{\eta}-C\sqrt[4]{\eta}-D\sqrt[4]{\eta^3}=(x^2+\gamma_0^2)(x^2+\gamma_4^2)\dots(x^2+\gamma_{4m}^2),\\ 4)\ A-B\sqrt{\eta}-Ci\sqrt[4]{\eta}+Di\sqrt[4]{\eta^3}=(x^2+\gamma_1^2)(x^2+\gamma_5^2)\dots(x^2+\gamma_{4m+1}^2).\end{cases}$$

Zum Verständniss sei nur kurz daran erinnert, dass durch Vertauschung von γ_0 mit γ_1

$$P=\sqrt[4]{\eta}=\gamma_0\gamma_1\cdots\gamma_{\mu-1}$$

in Pi übergeht. Die A, B sind ungerade Functionen von x^2; C und D sind Functionen von x^4. Sie sind ganze Functionen und auch ganzzahlig; nur ist der Nenner $1+i$, der bei der Division $\frac{(1+i)^3}{4}$ auftritt, nicht ausgeschlossen.

§ 3.

In dem vorstehenden Theile unserer Untersuchungen haben wir nebenbei in Kürze die theoretische Zerfällung der lemniskatischen Theilungsgleichung vorgetragen. Diese Kürze war gerechtfertigt durch den Umstand,

*) Dieses Journal Bd. 107, S. 208, Gl. (34.).

dass *Eisenstein* in der von uns angeführten Abhandlung das Erforderliche, wenn auch in anderer Darstellung, bereits gelehrt hat. Unsere Hauptabsicht war auf andere Dinge gerichtet, nämlich auf *die wirkliche Ausführung der Zerfällung* mit Hülfe der Congruenzen und auf *den Nachweis der Ganzzahligkeit für die erste Zerfällung*, also für die Functionen Y, Z. Wir sahen ferner, dass in den Fällen $q = 16m+1$, $16m+5$, $16m+13$ auch die zweite Zerfällung, also die Functionen A, B, C, D ganzzahlig sind, und für den einzigen Fall $q = 16m+9$ ein Nenner $1+i$ auftreten kann. Wir wenden uns jetzt zu Untersuchungen, welche noch tiefer in das Wesen besonders der Functionen Y, Z eindringen. Diese Untersuchungen dürfen ein besonderes Interesse beanspruchen, weil die Functionen Y, Z Eigenschaften zeigen, zu denen in der Kreistheilung für die dort vorkommenden das Analogon fehlt; und auch darum, weil sie zur Lösung der *Pell*schen Gleichung führen.

Wir haben im § 1 erkannt, dass die Substitution $x^4 = z+1 = 2ui+1$ zu einer Gleichung führt, deren Wurzeln *Einheiten* sind. Jetzt setzen wir

$$x^2 = 1+(1+i)w, \quad \text{also} \quad u = (1-i)w+w^2.$$

Dann entsteht eine Gleichung 2μten Grades, deren Wurzeln auch Einheiten sind. Zu jedem $x^2 = \gamma^2$ gehört nun aber ein entsprechendes $x^2 = -\gamma^2$, also zu jedem w_r ein entsprechendes w'_r, in der Art:

$$\gamma_r^2 = 1+(1+i)w_r,$$
$$-\gamma_r^2 = 1+(1+i)w'_r.$$

Es wird also:

$$w_r+w'_r+1-i = 0. \tag{15.}$$

Bilden wir nun die Zerlegungsgleichung für den Fall

$$q = 8m+5,$$
$$Y+\sqrt{\eta}Z = (x^2-\gamma_0^2)(x^2-\gamma_1^2)\ldots(x^2-\gamma_{\mu-1}^2),$$

so wird gefunden:

$$Y+\sqrt{\eta}Z = (1+i)^\mu(w-w_0)(w-w_1)\ldots(w-w_{\mu-1}).$$

Jedes w_r kann durch eins derselben, etwa w_0, rational dargestellt werden; mithin ist die Function rechts eine *zweiwerthige* Function der w. Sie ändert sich, wenn man w_0 durch w'_0 ersetzt. Dann wird:

$$Y-\sqrt{\eta}Z = (1+i)^\mu(w-w'_0)(w-w'_1)\ldots(w-w'_{\mu-1}).$$

Hieraus folgt nun für $x^2 = 1$, also $w = 0$

$$(15^a.) \quad 2Y(1) = -(1+i)^\mu(w_0 w_1 \ldots w_{\mu-1} + w'_0 w'_1 \ldots w'_{\mu-1}).$$

Nun ist aber infolge von (15.)

$$(15^b.) \qquad \Pi w_r + \Pi w'_r = \Pi w_r + \Pi(-1+i-w_r).$$

Bei der Multiplication entsteht, da rechts Πw_r sich weghebt, eine *ganze, ganzzahlige* Function der w multiplicirt mit $1+i$. Da diese Wurzelfunction einen rationalen Werth hat, so ist sie nach dem *Eisenstein*schen Satze eine ganze Zahl. Also hat $2Y(1)$ den Factor $(1+i)^{\mu+1}$. Wir haben also, da für Z dasselbe gilt, den Satz:

Ist $q = 8m+5$, so werden Y und Z für $x = 1$ ganze Zahlen, welche mit dem Factor $(1+i)^{\mu-1}$ behaftet sind.

Da nun, vergl. meine frühere Abhandlung, S. 219, Gl. (66.),

$$\varphi(1) = (2i)^\mu(-1)^{\mathrm{ind}(1+i)}$$

ist, so finden wir durch die Annahmen:

$$Y(1) = (1+i)^{\mu-1}.t, \quad Z(1) = (1+i)^{\mu-1}.u$$

eine Auflösung der Gleichung:

$$(16.) \qquad t^2 - \eta u^2 = 2i(-1)^{\mathrm{ind}(1+i)}.$$

So ist für $q = 53$, $\mu = 13$, $\eta = 7-2i$:

$$Y(1) = 64+512i = (1+i)^{12}(1+8i), \quad Z(1) = 192i = (1+i)^{12}.3i,$$

$$t = 1+8i, \quad u = 3i,$$

$$t^2 - \eta u^2 = -63+16i+(7-2i).9 = -2i.$$

Da (16.) nur bestehen kann, wenn entweder t und u beide ungerade sind oder beide den Theiler $1+i$ enthalten, so liefert

$$\frac{t-\sqrt{\eta}.u}{t+\sqrt{\eta}.u} = \frac{t^2+\eta u^2-2tu\sqrt{\eta}}{2i(-1)^{\mathrm{ind}(1+i)}} = T+U\sqrt{\eta}$$

sofort eine Auflösung der *Pell*schen Gleichung

$$(16^a.) \qquad T_0^2 - \eta U_0^2 = 1.$$

Setzen wir $x^2 = i$, so wird $w = i$, und man findet durch ähnliche Schlüsse wie vorhin, dass $Y(i)$ und $Z(i)$ mindestens den Factor $(1+i)^{\mu-1}$ enthalten. Allein es kann ein weit höherer Factor nachgewiesen werden. Zu diesem Zwecke greifen wir auf Gleichung $(7^a.)$ zurück. Setzen wir $x^4 = z-1 = (1+i)^3 u-1$, so wird u eine *Einheit*. Schreiben wir nun auch

$x^2 = i+(1+\varepsilon)^3 v$, wo $\varepsilon^2 = i$ ist, so wird

$$u = (1+(1-i)\varepsilon)(1+\varepsilon)v+(1+(1-i)\varepsilon)^3 v^2.$$

Der Coefficient von v^2 ist eine ***Einheit***, denn es ist

$$(1+(1-i)\varepsilon)(1-(1-i)\varepsilon) = -1.$$

Also ist auch v eine algebraische ganze Grösse, also

$$x^2-\gamma_r^2 = (1+\varepsilon)^3(v-v_r); \quad 0 = 2i+(1+\varepsilon)^3(v_r+v_r'),$$

$$Y+\sqrt{\eta}Z = (1+\varepsilon)^{3\mu}.\Pi(v-v_r); \quad Y-\sqrt{\eta}Z = (1+\varepsilon)^{3\mu}\Pi(v-v_r').$$

Folglich enthalten die ganzen Zahlen $2Y(i)$ und $2Z(i)$ für $x^2 = i$, also $v = 0$, mindestens den Theiler

$$(1+\varepsilon)^{3\mu+1} = (1+i+(1+i)\sqrt{2})^{\frac{3\mu+1}{2}};$$

Y, Z also mindestens $(1+i)^{\frac{3}{2}(\mu-1)}$.

In der That findet man für $q = 53$, $\mu = 13$, $\eta = 7-2i$, $x^2 = i$:

$$Y(i)+\sqrt{\eta}Z(i) = (1+i)^{18}(3+\sqrt{\eta})$$

und für $q = 13$, $\mu = 3$, $\eta = 3+2i$:

$$Y(i)+\sqrt{\eta}Z(i) = (1+i)^3(1+\sqrt{\eta});$$

für $q = 37$, $\mu = 9$, $\eta = -1+6i$:

$$Y(i)+\sqrt{\eta}Z(i) = (1+i)^{12}(-2+i-i\sqrt{\eta});$$

für $q = 29$, $\mu = 7$, $\eta = -5+2i$:

$$Y(i)+\sqrt{\eta}Z(i) = (1+i)^9(-1-2i+\sqrt{\eta}).$$

Setzen wir jetzt zur Abkürzung

$$(17.) \qquad \psi(x^2) = Y+\sqrt{\eta}Z = (x^2-\gamma_0^2)(x^2-\gamma_1^2)\ldots(x^2-\gamma_{\mu-1}^2),$$

dann erhalten wir

$$(18.) \qquad (-1)^\mu\psi(-x^2) = -\psi(-x^2) = (x^2+\gamma_0^2)(x^2+\gamma_1^2)\ldots(x^2+\gamma_{\mu-1}^2).$$

Nun ersetzen wir γ_r^2 durch $\frac{2i\gamma_r^2}{1-\gamma_r^4}$, also r durch $r+\mathrm{ind}(1+i)$, da

$$\mathrm{sinam}(1+i)u = \frac{(1+i)\,\mathrm{sinam}\,u}{\sqrt{1-\mathrm{sin}^4\mathrm{am}\,u}},$$

dann bleiben (17.) und (18.) ungeändert, wenn $1+i$ quadratischer Rest (mod.η) ist. Anderenfalls vertauschen sie sich mit einander. Im ersteren Falle erhalten wir:

$$\psi(x^2) = \Pi\Big(x^2-\frac{2i\gamma_r^2}{1-\gamma_r^4}\Big),$$

also:

$$\psi\left(\frac{2ix^2}{1-x^4}\right) = (2i)^\mu \cdot \frac{\Pi(x^2-\gamma_r^2)(1+\gamma_r^2 x^2)}{(1-x^4)^\mu \cdot \Pi(1-\gamma_r^4)}.$$

Hieraus ergiebt sich die Functionalgleichung:

$$(19.)\quad \begin{cases} (1-x^4)^\mu \cdot \psi\left(\frac{2ix^2}{1-x^4}\right) = -x^{2\mu} \cdot \psi\left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \psi(x^2), \text{ wenn } \left(\frac{1+i}{\eta}\right) = 1. \\ \text{Ebenso findet man} \\ (1-x^4)^\mu \cdot \psi\left(-\frac{2ix^2}{1-x^4}\right) = -x^{2\mu} \cdot \psi\left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \psi(x^2), \text{ wenn } \left(\frac{1+i}{\eta}\right) = -1. \end{cases}$$

$\left(\frac{1+i}{\eta}\right)$ ist das *Legendre*sche Zeichen.

Mit Hülfe der Gleichungen (19.) kann man durch Coefficientenvergleichung aus den Formeln

$$(20.)\quad \begin{cases} Y = x^2(x^{4m} + \alpha_1 \eta x^{4m-4} + \cdots + \alpha_m \eta), \\ Z = \beta_1 x^{4m} + \beta_2 x^{4m-4} + \cdots + \beta_m x^4 + i \end{cases}$$

Beziehungen ableiten, von denen die einfachste ist:

$$(21.)\quad \begin{cases} (1+2i)\alpha_m = \beta_1 i, \text{ wenn } \left(\frac{1+i}{\eta}\right) = -1, \\ (1-2i)\alpha_m = \beta_1 i, \text{ wenn } \left(\frac{1+i}{\eta}\right) = 1. \end{cases}$$

Für $x^2 = i$ findet sich:

$$(22.)\quad \begin{cases} 2^\mu \cdot \psi(1) = -i^\mu \cdot \psi^2(i), \text{ wenn } \left(\frac{1+i}{\eta}\right) = -1, \\ 2^\mu \cdot \psi(-1) = -i^\mu \cdot \psi^2(i), \text{ wenn } \left(\frac{1+i}{\eta}\right) = 1. \end{cases}$$

Setzen wir also zufolge unserer obigen Bezeichnungen:

$$\psi(1) = (1+i)^{\mu-1}(t+\sqrt{\eta}.u),$$

so folgt, da $i^2 = -1$, $2i = (1+i)^2$ ist,

$$\psi^2(i) = (1+i)^{3\mu-1}(t+u\sqrt{\eta}), \text{ wenn } \left(\frac{1+i}{\eta}\right) = -1.$$

Da nun $\psi(i) = Y(i)+\sqrt{\eta}Z(i)$ den Factor $(1+i)^{\frac{3}{2}(\mu-1)}$ enthält, so folgt, dass $2i(t+u\sqrt{\eta})$ ein vollständiges Quadrat ist. Nach den früheren Auseinandersetzungen kann man setzen

$$Y(i)+\sqrt{\eta}.Z(i) = (1+i)^{\frac{3}{2}(\mu-1)}(t_0+\sqrt{\eta}u_0).$$

Es ist aber für $x^2 = i$, $x^4 = -1$, $\varphi(-1) = -(1+i)^{3\mu} \cdot i^{\text{ind}(1+i)}$, folglich

$$(23.)\quad t_0^2 - \eta u_0^2 = -(1+i)^3 \cdot i^{\text{ind}(1+i)}.$$

Bisher ist es unentschieden geblieben, ob t, u und t_0, u_0 den Factor $1+i$ enthalten können, oder ob beide *ungerade* sein müssen. Es lässt sich beweisen, dass letzteres der Fall ist. Wir wollen den Beweis nur für t, u führen, da er für t_0, u_0 sich ganz ähnlich gestaltet.

Wir fanden (15^b.), dass die symmetrische Function der w, auf welche es ankommt, überall den Factor $1+i \backsim 1-i$ besitzt. Wir setzten daher $1+i$ heraus, und die einzige auf diese Weise von $1+i$ frei werdende Function der w ist dann:

$$\Sigma w_0 w_1 \ldots w_{\mu-2}.$$

Dies ist eine zweiwerthige Function. Ist sie gerade, also mit dem Factor $1+i$ behaftet, so ist auch ihr Quadrat mit $2i$ behaftet, folglich auch

$$\Sigma w_0^2 w_1^2 \ldots w_{\mu-2}^2,$$

und folglich auch wegen $\gamma_r^2 - 1 = (1+i)w_r$:

$$\frac{1}{(2i)^{\mu-1}} \Sigma(1-\gamma_0^4)\ldots(1-\gamma_{\mu-2}^4) = \frac{1}{(2i)^{\mu-1}} \varphi'(+1).$$

Nun ist aber $\varphi'(1) = \frac{1}{8}(2i)^{\mu}.(-1)^{\mathrm{ind}(1+i)}(\eta^2+q-2)$ *). Mithin müsste

$$\tfrac{1}{4}(\eta^2+q-2)$$

durch 2 theilbar sein. Nun ist $\eta = 4k+3+(4k'+2)i$, $q = 8m+5$, also der imaginäre Theil ungerade. Mithin kann

$$\Sigma w_0 w_1 \ldots w_{\mu-2}$$

den Factor $1+i$ nicht enthalten, also ist t und auch u *ungerade.* Das hiermit festgestellte Ergebniss können wir so aussprechen:

Ist η eine complexe Primzahl von der Form, dass

$$\eta = 4k+3+(4k'+2)i, \quad q = 8m+5,$$

und zerlegt man diejenige Gleichung $\varphi(x^4) = 0$, von welcher die Lemniskatentheilung durch η abhängt, in zwei Factoren, so dass man hat:

$$Y^2 - \eta Z^2 = \varphi(x^4),$$

dann erhält man durch die Annahme $x^2 = i$ eine ganzzahlige Lösung der Gleichung

$$t_0^2 - \eta u_0^2 = -(1+i)^3 . i^{\mathrm{ind}(1+i)}. \tag{23.}$$

t_0 und u_0 sind beide ungerade. Durch Quadrirung der Lösung

$$t_0 + \sqrt{\eta}\, u_0$$

---

*) Diese Bestimmung ergiebt sich aus der Functionalgleichung (83.) der öfter angeführten Abhandlung: Dieses Journal Bd. 107, S. 226.

erhält man dann eine Lösung der Gleichung

$$t^2-\eta u^2 = 2i(-1)^{\mathrm{ind}(1+i)}, \tag{16.}$$

die auch durch die Annahme $x=1$ ***erhalten werden kann. Wiederum sind*** t ***und*** u ***ungerade, und durch eine nochmalige Quadrirung findet man die Lösung der Pellschen Gleichung***

$$T_0^2-\eta U_0^2 = 1.$$

Zahlenbeispiel. $\eta=-5+2i$, $q=29$, $\mathrm{ind}(1+i)=9$ für die primitive Wurzel $g=10$:

$$t_0=-1-2i, \quad u_0=1,$$
$$t_0^2-\eta u_0^2=+(2+2i)=-(1+i)^3.i.$$

Quadrirt man, so folgt

$$(t_0+\sqrt{\eta}u_0)^2=2i(t+u\sqrt{\eta})=2i(3+4i+(-2+i)\sqrt{\eta}),$$
$$t^2-\eta u^2 = -2i.$$

Hieraus folgt durch nochmalige Quadrirung und Abtrennung des Factors $2i$ die Lösung der *Pell*schen Gleichung:

$$T=25+7i, \quad U=5(1-2i).$$

Ein sehr merkwürdiger Satz lässt sich endlich folgendermassen ableiten. Sei

$$\left(\frac{1+i}{\eta}\right) = -1.$$

Für $x^4=\frac{1}{1+2i}$ findet sich aus (19.):

$$-(2i)^{\mu} = \sqrt{(1+2i)^{\mu}}.\psi\left(\frac{1}{\sqrt{1+2i}}\right),$$

$$(2i)^{\mu} = \sqrt{(1+2i)^{\mu}}.\psi\left(-\frac{1}{\sqrt{1+2i}}\right);$$

und daraus folgt:

$$\psi\left(\frac{1}{\sqrt{1+2i}}\right)+\psi\left(-\frac{1}{\sqrt{1+2i}}\right) = 0.$$

Folglich muss die gerade Function **Z** den Theiler $(1+2i)x^4-1$ haben. So beweist man die beiden Sätze:

Ist $q=8m+5$ ***und*** $\left(\frac{1+i}{\eta}\right)=-1$, ***so enthält*** **Z** ***den Theiler*** $(1+2i)x^4-1$;

ist $\left(\frac{1+i}{\eta}\right)=1$, ***so enthält*** **Z** ***den Theiler*** $(1-2i)x^4-1$.

In **Z** ***hat der Coefficient*** β_1 ***entweder den Theiler*** $1+2i$ ***oder*** $1-2i$.

Als Zahlenbeispiel diene

$$1)\quad q=29,\quad \eta=-5+2i.$$

$$Z = -i((1+2i)x^4-1)(x^8+(2+8i)x^4+1).$$

$$2)\quad q=53,\quad \eta=7-2i.$$

$$Z = ((1+2i)x^4-1)((2+i)x^{20}+(40+3i)x^{16}$$
$$+(-20+66i)x^{12}-(152+66i)x^8+(34-3i)x^4-i).$$

Die jetzt beendete Untersuchung betraf den Fall $q=8m+5$. Wenden wir uns jetzt dem anderen Falle zu,

$$q = 8m+1.$$

Hier hat die erste Zerlegungsgleichung die Form:

$$(24.)\qquad Y+\sqrt{\eta}Z = (x^4-\gamma_0^4)(x^4-\gamma_2^4)\ldots(x^4-\gamma_{\mu-2}^4).$$

Setzen wir

$$x^4 = 1+2ui,$$
$$\gamma_r^4 = 1+2u_r i,$$

so wird

$$2Y = (2i)^{\frac{\mu}{2}}\{\Pi(u-u_{2r})+\Pi(u-u_{2r+1})\},$$

und da die symmetrischen Functionen der u ganze Zahlen sind, so folgt wie früher, dass Y und Z mindestens den Theiler

$$(1+i)^{\mu-2}$$

erhalten, wenn man x^4 durch $1+2ui$ ersetzt. Aber in diesem Falle kann man doch noch weiter gehen. Aus der Gleichung

$$1-\gamma_{2r}^4 = \frac{2i\gamma_{2r}^2}{\gamma_{2r+\mathrm{ind}\,(1+i)}^2}$$

kann man aus (24.), da $\mu=\frac{q-1}{4}=2m$ ist, ableiten:

$$(25.)\qquad Y(1)+\sqrt{\eta}Z(1) = (2i)^m.\Pi\frac{\gamma_{2r}^2}{\gamma_{2r+\mathrm{ind}\,(1+i)}^2}.$$

Ist nun $\mathrm{ind}(1+i)$ eine gerade Zahl, also $1+i$ quadratischer Rest (mod.η), so wird einfach

$$(26.)\qquad Y(1) = (2i)^m,\quad Z(1)=0.$$

Ist dagegen $1+i$ *Nichtrest* (mod.η), so wird das Product der Reste, wenn

$$Y+\sqrt{\eta}Z = 0$$

die aus den ***Resten*** entstehende Gleichung ist, $\sqrt[4]{\alpha_m\eta+\beta_m\sqrt{\eta}}$, das der Nicht-reste-Wurzeln $\sqrt[4]{\alpha_m\eta-\beta_m\sqrt{\eta}}$, also:

$$Y(1)+\sqrt{\eta}Z(1)=(2i)^m\cdot\frac{\sqrt[4]{(\alpha_m\eta+\beta_m\sqrt{\eta})^2}}{\sqrt[4]{(\alpha_m\eta-\beta_m\sqrt{\eta})^2}}=(2i)^m(\beta_m+\alpha_m\sqrt{\eta}),$$

da $\alpha_m^2\eta-\beta_m^2=1$ ist, s. o. Also hat man:

$$(27.)\qquad Y(1)=(2i)^m.\beta_m,\quad Z(1)=(2i)^m.\alpha_m.$$

Als Zahlenbeispiele mögen dienen:

$$1)\quad \left(\frac{1+i}{\eta}\right)=1,\quad q=41,\quad \eta=5+4i;$$

$$Y(1)=(2i)^5=32i,\quad Z(1)=0.$$

$$2)\quad \left(\frac{1+i}{\eta}\right)=-1,\quad q=17,\quad \eta=1+4i;$$

$$Y(1)=16-8i,\quad Z(1)=-4+8i.$$

Nehmen wir $x^4=-1$, so wird nach (24.)

$$Y(-1)+\sqrt{\eta}Z(-1)=(-1)^m(1+\gamma_0^4)(1+\gamma_2^4)\dots(1+\gamma_{2m-2}^2).$$

Ist nun $\left(\frac{1+i}{\eta}\right)=1$, so wird wegen

$$1+\gamma_{2r}^4=(1+i)^3\cdot\frac{\gamma_{2r}^2}{\gamma_{2r+\mathrm{ind}(1+i)}\cdot\gamma_{2r+2\mathrm{ind}(1+i)}}:$$

$$Y(-1)+\sqrt{\eta}Z(-1)=(-1)^m(1+i)^{3m},$$

also:

$$(28.)\qquad Y(-1)=(-1)^m(1+i)^{3m},\quad Z(-1)=0.$$

Ist dagegen $\left(\frac{1+i}{\eta}\right)=-1$, so wird für $x^4=-1$

$$Y(-1)+\sqrt{\eta}Z(-1)=(-1)^m(1+i)^{3m}\cdot\frac{\Pi\gamma_{2r}^2}{\Pi\gamma_{2r+1}\Pi\gamma_{2r}}=(-1)^m.(1+i)^{3m}.\Pi\frac{\gamma_{2r}}{\gamma_{2r+1}}.$$

Nun ist

$$\Pi\frac{\gamma_{2r}}{\gamma_{2r+1}}=\frac{\sqrt[4]{\alpha_m\eta+\beta_m\sqrt{\eta}}}{\sqrt[4]{\alpha_m\eta-\beta_m\sqrt{\eta}}}=\sqrt{\beta_m+\alpha_m\sqrt{\eta}}.$$

Hieraus folgt, dass die Quadratwurzel aus $\beta_m+\alpha_m\sqrt{\eta}$ rational gezogen werden kann. Setzt man

$$x^4=-1+(1+i)^3v,\quad \gamma_r^4=-1+(1+i)^3v\ ,$$

so werden die symmetrischen Functionen der v_r nach Gleichung (7ª.) ***ganze*** Zahlen. Also wird

$$2Y(-1) = (-1)^m(1+i)^{3m}\{v_0v_2 \ldots v_{2m-2}+v_1v_3 \ldots v_{2m-1}\}.$$

Mithin kann man sicher sein, dass $Y(-1)$ und auch $Z(-1)$ den Multiplicator $(1+i)^{3m-2}$ hat. Nehmen wir an, es sei

$$Y(-1)+\sqrt{\eta}Z(-1) = (1+i)^{3m-2}(x+\sqrt{\eta}y),$$

wo x und y ganze Zahlen sind. Dann folgt

$$x+y\sqrt{\eta} = 2i\sqrt{\beta_m+\alpha_m\sqrt{\eta}}.$$

Diese Annahme ist unstatthaft, wenn man x und y beide als ungerade voraussetzt. Durch Quadrirung ergiebt sich nämlich, da β_m, α_m weder beide gerade noch beide ungerade sind, ein Widerspruch. Dagegen können x und y beide den Factor $1+i$ haben, ohne dass ein Widerspruch stattfindet. Nehmen wir an

$$Y(-1) = (-1)^m(1+i)^{3m-1}.t_0,$$
$$Z(-1) = (-1)^m(1+i)^{3m-1}.u_0,$$

so folgt:

$$t_0^2-\eta u_0^2 = 2i.i^{\mathrm{ind}(1+i)}. \tag{29.}$$

In unserem Zahlenbeispiel finden wir,

1) wenn $q = 41$, $\eta = 5+4i$:

$$Y(-1) = -(1+i)^{15}, \quad Z(-1) = 0;$$

2) wenn $q = 17$, $\eta = 1+4i$, $m = 2$:

$$Y(-1) = 4+12i = (1+i)^5(-2-i),$$
$$Z(-1) = -4-4i = (1+i)^5.$$

Da für $g = 10$, $\mathrm{ind}(1+i) = 7$ ist, so wird

$$(2+i)^2-\eta = 2.$$

Endlich ist $\beta_m = -4+2i$, $\alpha_m = 1-2i$ und

$$\sqrt{-4+2i+(1-2i)\sqrt{\eta}} = \frac{-2-i+\sqrt{\eta}}{1+i}.$$

Der Nenner $1+i$ tritt also wirklich auf; und somit kann $Y(-1)$ und $Z(-1)$ allgemein keine höhere Potenz von $1+i$ enthalten als die oben gefundene $(3m-1)$te.

Wir haben also folgende Sätze:

Ist $1+i$ ***quadratischer Rest (mod.*** η***) und*** $q=8m+1$, ***so hat*** Z ***den Theiler*** $)x^4-1)(x^4+1)$.

Ist $1+i$ ***quadratischer Nichtrest (mod.*** η***),*** $q=8m+1$, ***so liefern*** $Y(-1)$ ***und*** $Z(-1)$ ***eine Auflösung der Gleichung:***

$$t_0^2-\eta u_0^2 = 2i.i^{\mathrm{ind}(1+i)},$$

$Y(1)$ ***und*** $Z(1)$ ***eine solche der Pellschen Gleichung. Zwischen beiden besteht die Beziehung, dass die erstere durch Quadrirung die letztere ergiebt.***

Ersetzt man in (24.) γ_r^4 durch $\gamma_{r+\mathrm{ind}(1+i)}^4 = -\frac{4\gamma_r^4}{(1-\gamma_r^4)^2}$, so wird

$$Y+\sqrt{\eta}Z = \Pi_r\Big(x^4+\frac{4\gamma_{2r}^4}{(1-\gamma_{2r}^4)^2}\Big), \text{ wenn } \Big(\frac{1+i}{\eta}\Big)=1;$$

$$Y-\sqrt{\eta}Z = \Pi_r\Big(x^4+\frac{4\gamma_{2r}^4}{(1-\gamma_{2r}^4)^2}\Big), \text{ wenn } \Big(\frac{1+i}{\eta}\Big)=-1.$$

Wir erhalten also im ersten Falle:

$$\prod_0^{m-1}\Big(\frac{4z^4}{(1-z^4)^2}+\gamma_{2r}^4\Big) = 4^m\frac{\prod_0^{m-1}(z^4-\gamma_{2r}^4)(1-\gamma_{2r}^4z^4)}{(1-z^4)^{2m}\prod_0^{m-1}(1-\gamma_{2r}^4)^2}.$$

Nun ist $\Pi(1-\gamma_{2r}^4) = Y(1)+\sqrt{\eta}Z(1) = (2i)^m$, also:

$$(1-z^4)^{2m}.\prod_0^{m-1}\Big(\frac{4z^4}{(1-z^4)^2}+\gamma_{2r}^4\Big) = (-1)^m.\prod_0^{m-1}(z^4-\gamma_{2r}^4)(1-\gamma_{2r}^4z^4);$$

setzen wir nun $z^4=1-2i$, so wird

$$(2i)^{2m} = \prod_0^{m-1}(1-(1-2i)\gamma_{2r}^4).$$

Die rechte Seite ist nichts anderes als $Y\Big(\frac{1}{1-2i}\Big)+\sqrt{\eta}Z\Big(\frac{1}{1-2i}\Big)$ vervielfacht mit $(1-2i)^m$, der Werth rational, also $Z=0$. Dasselbe ergiebt sich für $z^4=1+2i$, und daher der sehr merkwürdige Satz:

Ist $q=8m+1$, $\Big(\frac{1+i}{\eta}\Big)=1$, ***so enthält*** Z ***die Theiler:***

$$1-x^4, \quad 1+x^4, \quad 1-(1-2i)x^4, \quad 1-(1+2i)x^4.$$

Als Zahlenbeispiel wählen wir

$$\eta = 5+4i, \quad q=41,$$

$$Z = i(1+i)^5(1-x^4)(1+x^4)(1-(1-2i)x^4)(1-(1+2i)x^4).$$

Z ist also, allein durch unseren Satz, völlig gegeben. Dasselbe fast findet statt für $q=49$, $\eta=-7$, wie am Schlusse unserer Abhandlung angegeben ist.

Im zweiten Falle, $\left(\frac{1+i}{\eta}\right) = -1$, erhält man:

$$(1-z^4)^{2m} \cdot \prod_0^{m-1}{}_r \left(\frac{4z^4}{(1-z^4)^2} + \gamma_{2r+1}^4 \right) = 4^m \cdot \frac{\prod_0^{m-1}{}_r (z^4-\gamma_{2r}^4)(1-\gamma_{2r}^4 z^4)}{\prod_0^{m-1}{}_r (1-\gamma_{2r}^4)^2}.$$

Hier ist, wie wir oben (Gleichung (27.)) fanden:

$$\prod_0^{m-1}{}_r (1-\gamma_{2r}^4)^2 = (2i)^{2m}(\beta_m + \alpha_m \sqrt{\eta})^2.$$

Setzen wir nun $z = 1-2i$, so wird

$$(-1)^m(\beta_m+\alpha_m\sqrt{\eta})^2 . 4^m = \frac{\Pi(1-2i-\gamma_{2r}^4)(1-(1-2i)\gamma_{2r}^4)}{\Pi(1-2i-\gamma_{2r+1}^4)},$$

$r = 0, 1, \ldots, m-1$; wie immer.

Nun ist

$$\Pi(1-2i-\gamma_{2r}^4)(1-2i-\gamma_{2r+1}^4) = \varphi(1-2i) = (-4)^{2m} . i^h,$$

$$\text{wenn } \eta \equiv i^h \pmod{(-1+2i)},$$

folglich

$$(-4)^{3m}(\beta_m+\alpha_m\sqrt{\eta})^2 i^h = \Pi(1-2i-\gamma_{2r}^4)^2(1-(1-2i)\gamma_{2r}^4).$$

Endlich ist

$$\frac{\gamma_{2r}^4 - 1 + 2i}{1+(-1+2i)\gamma_{2r}^4} = \frac{\gamma_{2r+\mathrm{ind}(-1+2i)}}{\gamma_{2r}}.$$

Hieraus folgt:

$$4^{3m} . i^h (\beta_m+\alpha_m\sqrt{\eta})^2 . \Pi \frac{\gamma_{2r+\mathrm{ind}(-1+2i)}}{\gamma_{2r}} = \Pi(1-2i-\gamma_{2r}^4)^3.$$

Ist nun $\mathrm{ind}(-1+2i)$ ***gerade,*** also $-1+2i$ quadratischer Rest (mod. η), so wird

$$4^{3m} . i^h (\beta_m+\alpha_m\sqrt{\eta})^2 = \Pi(1-2i-\gamma_{2r}^4)^3.$$

In diesem Falle ist h nach dem quadratischen Reciprocitätsgesetz eine gerade Zahl und, da

$$Y(1-2i)+\sqrt{\eta}Z(1-2i) = \Pi(1-2i-\gamma_{2r}^4)$$

ganzzahlig ist, ***so geht aus*** $(\beta_m+\alpha_m\sqrt{\eta})^2$ ***die Kubikwurzel rational heraus;*** der Nenner kann höchstens eine Potenz von $1+i$ sein.

Ist $\mathrm{ind}(-1+2i)$ ***ungerade,*** so wird

$$4^{3m} . i^h . (\beta_m+\alpha_m\sqrt{\eta})^2 (\beta_m-\alpha_m\sqrt{\eta})^{\frac{1}{2}} = \Pi(1-2i-\gamma_{2r}^4)^3,$$

also unterscheidet sich

$$Y(1-2i)+\sqrt{\eta}Z(1-2i)$$

in diesem Falle nur durch einen Multiplicator von

$$Y(-1)+\sqrt{\eta}Z(-1).$$

So ist für $q=17$, $\eta=1+4i$

$$Y(1-2i)+\sqrt{\eta}Z(1-2i) = i(1+i)^7(-2-i+\sqrt{\eta}),$$
$$Y(-1)+\sqrt{\eta}Z(-1) = (1+i)^5(-2-i+\sqrt{\eta}).$$

Man kann durch vollständige Induction beweisen, dass durch die Annahme

$$x^4 = 1+2i+z$$

die Form ertheilt wird: $(i^h \equiv \eta \bmod.(1+2i))$

$$\varphi(1+2i+z) = (1+i)^{4\mu}.i^h+m_1(1+i)^{4\mu-4}z+\cdots+z^\mu,$$
$$\chi(1+2i+z) = (1+i)^{4\mu}+n_1(1+i)^{4\mu-4}z+\cdots+\eta z^\mu.$$

Setzt man also $z=4u$, so ist u noch eine *ganze* Grösse. Hieraus kann man nun wieder ähnliche Schlüsse ziehen wie oben. Es wird

$$x^4=1+2i+4u, \quad \gamma_r^4=1+2i+4u_r,$$
$$Y+\sqrt{\eta}Z = 4^m(u-u_0)(u-u_2)\ldots(u-u_{2m-2}).$$

Daher enthält $2Y$ mindestens den Factor $4^m=2^{2m}$, also $Y(1+2i)$ mindestens den Factor 2^{2m-1} oder $(1+i)^{4m-2}$. In unserem obigen Beispiele sahen wir sogar die siebente statt der so zu erwartenden sechsten Potenz auftreten.

Zusammenstellung einiger Beispiele.

Erste Zerlegung.

$$\varphi(x^4) = Y^2-\eta Z^2.$$

1) $\eta=-1+2i, \quad q=5.$

$Y=x^2, \quad Z=i.$

2) $\eta=-3, \quad q=9.$

$Y=x^4+3, \quad Z=2i.$

3) $\eta=3+2i, \quad q=13.$

$Y=x^6+\eta x^2, \quad Z=i(1-(1+2i)x^4).$

4) $\eta=1+4i, \quad q=17.$

$Y=x^8-2(1+i)\eta x^4+(1-2i)\eta,$
$Z=2i(3x^4+1+2i).$

5) $\eta=-3+4i, \quad q=25.$

$Y=x^2(x^4-1-2i)^2, \quad Z=-(1-(1+2i)x^4)^2.$

6) $\eta=-5+2i, \quad q=29.$

$Y=x^{14}+(-1+4i)\eta x^{10}-(7+2i)\eta x^6+\eta x^2,$
$Z=-i((1+2i)x^4-1)(x^8+(2+8i)x^4+1).$

7) $\eta = -1+6i, \quad q = 37.$

$$Y = x^{18}+(8+4i)\eta x^{14}+(-10+16i)\eta x^{10}-4i\eta x^6-(1+2i)\eta x^2,$$

$$Z = i((1+2i)x^4-1)^2(x^8+(2+8i)x^4+1).$$

8) $\eta = 5+4i, \quad q = 41.$

$$Y = x^{20}+(-5+10i)\eta x^{16}+(2-8i)\eta x^{12}+(6+4i)\eta x^8+(1-4i)\eta x^4 +(-1+2i)\eta,$$

$$Z = i(1+i)^5(1-x^4)(1+x^4)(1-(1-2i)x^4)(1-(1+2i)x^4).$$

9) $\eta = 7-2i, \quad q = 53.$

$$Y = x^{26}-(2+12i)\eta x^{22}+(9-50i)\eta x^{18}+(84+120i)\eta x^{14} +(-115+54i)\eta x^{10}+(14-44i)\eta x^6+(-1+2i)\eta x^2,$$

$$Z = ((1+2i)x^4-1)\{(x^4+1)(x^{16}+36x^{12}-122x^8+36x^4+1) +(1+i)(x^4-1)(x^{16}+4x^{12}+70x^8+4x^4+1)\}.$$

Es ist:

$$x^{16}+36x^{12}-122x^8+36x^4+1 = \Phi_3+16x^4\Phi_2,$$

$$x^{16}+4x^{12}+70x^8+4x^4+1 = \Phi_3-16x^4\Phi_2.$$

10) $\eta = -7, \quad q = 49.$

$$Y = x^{24}+7(14x^{20}+21x^{16}-44x^{12}+17x^8-2x^4+3),$$

$$Z = 8(1-x^4)(1+x^4)^2(1-2x^4+5x^8).$$

Zweite Zerlegung.

$$A+B\sqrt{\eta}+C\varepsilon\sqrt[4]{\eta}+D\varepsilon\sqrt[4]{\eta^3}; \quad \varepsilon^2 = i,$$

wenn $q = 8m+5;$

$$A+B\sqrt{\eta}+C\sqrt[4]{\eta}+D\sqrt[4]{\eta^3},$$

wenn $q = 8m+1.$

1) $q = 5.$

$A = x, \quad B = 0, \quad C = 1, \quad D = 0.$

2) $q = 9.$

$A = x^2, \quad B = i, \quad C = 0, \quad D = 0.$

3) $q = 13.$

$A = x^3, \quad B = xi, \quad C = i, \quad D = 1.$

4) $q = 17.$

$A = x^4-(1+i)\eta; \quad B = 3i, \quad C = 1-4i, \quad D = -1-2i.$

5) $q = 29.$

$$A = x^7+\eta x^3, \quad B = -3ix^5-i(1-2i)x, \quad C = -i(3+2i)x^4-i,$$
$$D = -x^6+(1+2i)x^2.$$

6) $q = 37.$

$$A = x^9+(4+2i)\eta x^5+\eta x,$$
$$B = -(2+2i)x^7-(2+10i)x^3,$$
$$C = x^8+(10+16i)x^4+1,$$
$$D = -4x^6-4x^2.$$

7) $q = 41.$

$$A = x^{10}-\eta x^2,$$
$$B = (-2+4i)x^6+2x^2,$$
$$C = \frac{i}{2}(5+5i)x^8+i(1-5i)x^4+\frac{i}{2}(-3+i),$$
$$D = \frac{i}{2}(1+3i)x^8+i(1+i)x^4+\frac{i}{2}(1-i).$$

8) $q = 49.$

$A+B\sqrt{7}+C\sqrt{2}\sqrt[4]{7}+D\sqrt{2}\sqrt[4]{7^3}$ *).

$$A = x^{12}+7(7x^8+17x^4+1),$$
$$B = 20x^8+40x^4+4,$$
$$C = -21x^8-50x^4-5,$$
$$D = -9x^8-18x^4-1.$$

Löst man die *Pell*sche Gleichung $T_0^2-\eta U_0^2 = 1$ mit Hülfe der Lemniskatentheilung durch Bestimmung der Functionen Y, Z,

$$Y^2-\eta Z^2 = \varphi(x^4),$$

so erhält man folgende Lösungen:

$q = 5,$	$\eta = -1+2i,$	$T_0 = 1+i,$	$U_0 = 1.$
$q = 9,$	$\eta = -3,$	$T_0 = 2,$	$U_0 = i,$
$q = 13,$	$\eta = 3+2i,$	$T_0 = -3+3i,$	$U_0 = -1+2i.$
$q = 17,$	$\eta = 1+4i,$	$T_0 = 2+4i,$	$U_0 = -2-i.$

*) $\sqrt{2}$ ist durch $\varepsilon = \sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ eingeschleppt.

$$q = 29, \quad \eta = -5+2i, \quad T_0 = 25+7i, \quad U_0 = -5+10i.$$
$$q = 37, \quad \eta = -1+6i, \quad T_0 = -21+21i, \quad U_0 = 1+12i.$$
$$q = 41, \quad \eta = 5+4i, \quad T_0 = 4+4i, \quad U_0 = 2+i.$$
$$q = 53, \quad \eta = 7-2i, \quad T_0 = -17-63i, \quad U_0 = 3+24i.$$
$$q = 49, \quad \eta = -7, \quad T_0 = -8, \quad U_0 = -3i.$$

Bestimmt man nun für $q = 8m+5$ die Zahlen T_0, U_0 nach der Gleichung (16ª.) gelehrten Methode und für $q = 8m+1$ durch die Annahme $T_0 = \beta_m i$, $U_0 = \alpha_m i$, so ist die Klassenanzahl der quadratischen Formen mit complexen Coefficienten von der Determinante $\eta = D$ gegeben durch die Formel:

$$H = 2\log \frac{N(T_0+\sqrt{\eta}\,U_0)}{N(T+\sqrt{\eta}\,U)}.$$

Hier bedeuten T und U die ***kleinsten*** Lösungen der ***Pell***schen Gleichung und es sind zugleich bezüglich der Vorzeichen von T_0, U_0, T, U gewisse Bedingungen festzuhalten. Dies zeigt man durch zweckmässige Weiterführung der ***Dirichlet***schen Methoden. In allen den obigen Beispielen ist die lemniskatische Lösung der ***Pell***schen Gleichung zugleich die kleinste und darum $H = 2$. Für $\eta = 5+4i$ sind die beiden einzigen verschiedenen reducirten Formen

$$x^2-(5+4i)y^2; \quad ix^2+i(5+4i)y^2.$$

Um diese Verhältnisse genauer zu untersuchen, ***muss man die Quadratwurzel aus einer complexen Zahl in einen Kettenbruch entwickeln.*** Diese Betrachtung liegt an mehreren Stellen der berühmten ***Dirichlet***schen Arbeit „Sur les formes quadratiques à coefficients et à indéterminées complexes“ zu Grunde, wenn auch das Wort „Kettenbruch“ nicht vorkommt. Ich gestehe gern, dass ich dem Studium dieser ***Dirichlet***schen Arbeit, welche ich für den Neudruck durchzuarbeiten den angenehmen Auftrag hatte, die Anregung zu dem vorliegenden Aufsatze verdanke.

Neue geometrische Darstellung der lemniskatischen Function.

(Von Herrn *W. Krimphoff* in Paderborn.)

Die durch die Forschungen von *Gauss* und *Dirichlet* so berühmt gewordene lemniskatische Function, welche neuerdings durch die Arbeiten *Kroneckers* über singuläre Moduln und die des Herrn *Schwarz* wiederum in den Vordergrund des mathematischen Interesses gerückt scheint, ist zwar aus geometrischen Untersuchungen zuerst entsprungen, aber der Lauf der Lemniskate giebt über den functionentheoretischen Charakter dieser Transcendente doch nur höchst ungenügenden Aufschluss. Zahlentheoretische Untersuchungen, auf welche ich durch die Arbeiten *Kroneckers* (Zur Theorie der elliptischen Functionen, Sitzungsbericht vom 29. Juli 1886) und durch Rücksprache mit meinem wissenschaftlichen Freunde *Schwering* geführt worden bin, haben mich dagegen eine andere Methode gelehrt, welche zu den tiefer liegenden Eigenschaften dieser Function im innigsten Zusammenhange steht und dieselben in überraschend einfacher Weise geometrisch kenntlich macht.

Ich habe einen Theil dieser Untersuchungen in meiner Doctor-Dissertation (Münster 1890) veröffentlicht und erlaube mir jetzt, den Kern derselben in gedrängter Kürze einem grösseren Publicum vorzulegen.

§ 1.

Es soll die Curve untersucht werden, welche definirt wird durch die Combination

$$x+yi = \operatorname{sinam}(m+ni)u,$$
$$x-yi = \operatorname{sinam}(m-ni)u. \quad (\operatorname{mod.} k=i).$$

Da die Gesetze für den allgemeinen Fall sich aus einem speciellen von selbst ergeben und da der Lauf einer derartigen Curve ein anschauliches Bild giebt, so habe ich den Fall $m=3$, $n=2$ gewählt.

Es sei also:

$$x+yi = \sin\mathrm{am}(3+2i)u,$$
$$x-yi = \sin\mathrm{am}(3-2i)u.$$

Setzt man $\sin\mathrm{am}\, u = h$ und entwickelt man $\sin\mathrm{am}(3+2i)u$ nach dem Additionstheorem, so ergiebt sich:

$$x+yi = h\frac{h^{12}+(-11+10i)h^8+(7-4i)h^4+3+2i}{(3+2i)h^{12}+(7-4i)h^8+(-11+10i)h^4+1},$$

$$x-yi = h\frac{h^{12}+(-11-10i)h^8+(7+4i)h^4+3-2i}{(3-2i)h^{12}+(7+4i)h^8+(-11-10i)h^4+1},$$

Aus diesen beiden Formeln kann man x und y einzeln berechnen. Man erhält für dieselben Brüche, deren Zähler vom 25ten, und deren Nenner vom 24ten Grade sind. Setzt man nun in die Gleichung der beliebigen geraden Linie

$$ax+by+c = 0$$

für x und y die bezüglichen Werthe ein, so erhält man eine Gleichung vom 25ten Grade in h, d. h. geometrisch betrachtet: die Gerade hat mit der Curve 25 Punkte gemeinsam. Sie ist also von der 25ten Ordnung.

Gleichfalls sind wir im Stande, die Anzahl der Doppelpunkte anzugeben. Da nämlich die Curve vom Geschlecht Null ist, so hat sie 12.23 oder 276 Doppelpunkte. Diese Anzahl wird jedoch reducirt durch das Verhalten der unendlich fernen imaginären Kreispunkte zu der Curve. Multiplicire ich nämlich die vorhin gegebenen Ausdrücke für $x+yi$ und $x-yi$ mit einander, so erhalte ich rechter Hand einen Ausdruck 26ten Grades in h, und links ergiebt sich x^2+y^2. Daraus folgt, dass irgend ein Kreis um den Ursprung mit der Curve nur 26 endliche Schnittpunkte hat, und dass somit die unendlich fernen imaginären Kreispunkte 12-fache Punkte der Curve sind. Dadurch verringert sich die Anzahl der Doppelpunkte um 132, und es bleiben 144.

§ 2.

Um die Gestalt der Curve zu ermitteln, berechne ich in folgender Weise die Coordinaten von verschiedenen Punkten.

Es ist

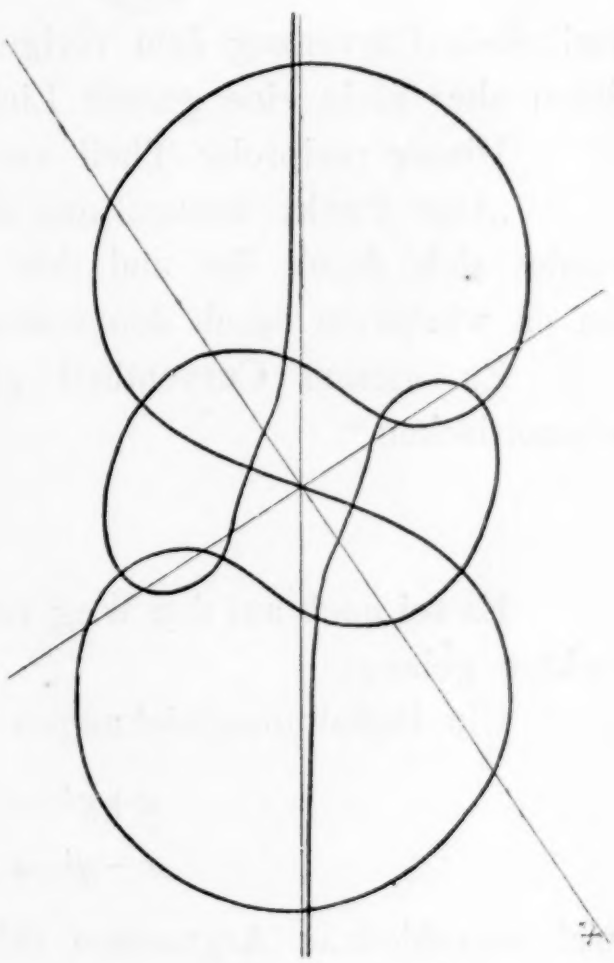
$$\sin\mathrm{am}\, u = \frac{2q^{\frac{1}{4}}\sin\frac{u\pi}{2K} - 2q^{\frac{9}{4}}\sin\frac{3u\pi}{2K} + 2q^{\frac{25}{4}}\sin\frac{5u\pi}{2K} + \cdots}{1+2q\cos\frac{u\pi}{K} + 2q^4\cos\frac{2u\pi}{K} + 2q^9\cos\frac{3u\pi}{K} + \cdots}.$$

Hierin ist $q = e^{-\pi}$ (cf. meine Inaug.-Diss. § 3 Formel (1.)).

Man findet mit Hülfe dieser Reihe die Werthe von $\text{sinam}\frac{pK}{13}$ für $p = 1, 2, \ldots 12$.

Um nun die Coordinaten zu finden, setze ich nach einander unter Benutzung des Additionstheorems die gewonnenen Werthe in die Gleichung $x \pm yi = \text{sinam}(3 \pm 2i)u$ ein. Es ergeben sich zwölf verschiedene Punkte. Es hat keinen Zweck, dem Argumente zunächst grössere Werthe als K zu geben, da $\text{sinam}(2K-u) = \text{sinam}u$ ist. Die Zeichnung veranschaulicht folgendes Resultat:

„Für das Intervall der Werthe $u = 0$ bis $u = K$ beschreibt der Punkt einen Bogen vom Coordinatenanfangspunkt aus durch den ersten und vierten Quadranten, tritt darauf in den dritten und von da zurück durch den vierten Quadranten zum Punkte $x = 1$, $y = 0$.



Für die Werthe $u = K$ bis $u = 2K$ beschreibt der Punkt denselben Zug rückwärts noch einmal."

Neue Punkte gewinnen wir, wenn u die Argumente $2K$ bis $3K$ annimmt. Wegen der Formel

$$\text{sinam}(2K+u) = -\text{sinam}u$$

kommen die vorhin erhaltenen Coordinatenwerthe mit entgegengesetzten Vorzeichen zum Vorschein. Wir haben also ferner:

„Für die Werthe $u = 2K$ bis $3K$ beschreibt der Punkt einen zu dem vorigen symmetrischen Zug.

Für die Werthe $u = 3K$ bis $4K$ wird derselbe Curventheil rückwärts noch einmal beschrieben."

Letzteres folgt sofort aus der Beziehung $\text{sinam}(4K-u) = -\text{sinam}u$. Grössere Werthe als $4K$ für u anzunehmen, ist wegen der Periode $4K$ überflüssig. Es tritt hier der eigenthümliche Fall ein, dass eine algebraische Curve in sich selbst periodisch zurückläuft.

Um auch den Verlauf der Curve für imaginäre Argumente festzu-

stellen, wenden wir die Formel an:

$$\text{sinam}(iu+iK-K) = \frac{1}{\text{sinam}\,u}.$$

Man erhält so die reciproken Parameter, und da die Coordinatenverbindung $x \pm yi$ wegen der Gleichung

$$x \pm yi = h\,\frac{h^{12}+(-11\pm 10i)h^8+(7\mp 4i)h^4+3\pm 2i}{(3\pm 2i)h^{12}+(7\mp 4i)h^8+(-11\pm 10i)h^4+1}$$

gleichfalls die Gestalt $\frac{1}{x \pm yi}$ annimmt, so ist klar, dass der nunmehr zu ermittelnde Curvenzug dem vorigen reciprok ist. Je zwei reciproke Radien bilden aber nicht eine gerade Linie.

Dieser reciproke Theil verläuft nun also:

„Der Punkt kommt aus dem Unendlichen im vierten Quadranten, wendet sich durch ihn und den ersten und den zweiten Quadranten und von da wiederum durch den ersten zum Punkte $x = 1,\ y = 0$.

Zu diesem Curventheil giebt es ebenso wie früher noch einen symmetrischen."

§ 3.

Es sei noch auf den Weg verwiesen, auf welchem man zu den Doppelpunkten gelangt.

Die Definitionsgleichungen lauten:

$$x+yi = \text{sinam}(3+2i)u,$$
$$x-yi = \text{sinam}(3-2i)u.$$

Zwei verschiedene Argumente führen nun im Allgemeinen zu zwei verschiedenen Punkten. Damit aber zwei wesentlich verschiedene Argumente u und v denselben Punkt bestimmen, müssen noch neben den obigen Gleichungen gleichzeitig folgende bestehen:

$$x+yi = \text{sinam}(3+2i)v,$$
$$x-yi = \text{sinam}(3-2i)v.$$

Dies zieht nach sich, dass

$$(3+2i)(u-v) = \text{einer ganzen Periode},$$
$$(3-2i)(u+v) = \text{einer halben Periode ist.}$$

Hieraus kann man mit Leichtigkeit die sämmtlichen Argumente für die Doppelpunkte ableiten, wie ich es auch in meiner Dissertation ausgeführt habe.

Die von mir angegebene geometrische Darstellung der lemniskatischen Function bewährt sich also, da eine ausgezeichnete geometrische Eigenschaft derselben, nämlich das Verhalten der Doppelpunkte, die Periodentheilung der lemniskatischen Function unmittelbar ergiebt.

Weitere, höchst interessante Eigenschaften kann man bezüglich ihrer parallelen Tangenten nachweisen, wovon ich auch in meiner Dissertation ein Beispiel gegeben habe.

Ueber die Function $W\left(\begin{smallmatrix}\alpha, & \beta, & \gamma, \\ \alpha', & \beta', & \gamma', \end{smallmatrix} n\right)$ für singuläre Werthe ihrer Parameter.

(Von Herrn *J. Thomae* in Jena.)

Bei der Untersuchung der *Gauss*schen Reihe $F(a, b, c, z,)$ ergeben sich, wenn in ihr a, b, c, z endliche Grössen sind, diejenigen Fälle als singuläre, besondere Betrachtungen nöthig machende, in denen das Element c, oder gewisse, bei den Fortsetzungen der Reihe auftretende lineare Verbindungen der Elemente a, b, c ganze Zahlen werden, oder, in *Riemann*s Bezeichnung, wenn in der Function

$$P\left(\begin{smallmatrix}\alpha, & \beta, & \gamma, \\ \alpha', & \beta', & \gamma', \end{smallmatrix} z\right)$$

von den Exponentendifferenzen $\alpha-\alpha'$, $\beta-\beta'$, $\gamma-\gamma'$ eine oder mehrere ganze Zahlen sind. Es wird in solchen Fällen die Darstellung gewisser Zweige der Function P eine wesentlich neue, die durch das Auftreten von Logarithmen charakterisirt wird. Die Periodicitätsmoduln der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung in *Legendre*s Normalform bilden ein ebenso bekanntes wie einfaches Beispiel für einen solchen Fall.

Mit der etwas allgemeineren Function,

$$W\left(\begin{smallmatrix}\alpha, & \beta, & \gamma, \\ \alpha', & \beta', & \gamma', \end{smallmatrix} n\right),$$

welche die Recursionsformel

$$\begin{aligned} 0 = {} & (n+\alpha+1)(n+\alpha'+1)\,W(n)+(n+2-\beta)(n+2-\beta')\,W(n+2) \\ & -(2n^2+n(\alpha+\alpha'+6-\beta-\beta')+(\alpha+1)(\alpha'+1)+(2-\beta)(2-\beta')-\gamma\gamma')\,W(n+1) \end{aligned}$$

befriedigt, verhält es sich ganz ähnlich, nur ist die Mannigfaltigkeit der singulären Fälle noch etwas grösser, als bei der P-Function, weil nicht bloss Differenzen, sondern auch gewisse Summen von Parametern zu Singularitäten Veranlassung geben. Für den Logarithmus aber tritt die von *Gauss* mit $\Psi(n)$ bezeichnete Function ein, die übrigens auch schon bei den singulären Fällen der *Gauss*schen Reihe eine Rolle spielt.

Als Ergänzung meiner Arbeit über die Function $W(n)$ in diesem Journale Bd. 87 S. 26—73 sollen hier solche singulären Fälle untersucht werden, und zwar diejenigen, in denen von den in Betracht kommenden Exponenten oder Parameterdifferenzen und Parametersummen *eine* eine ganze Zahl ist. Die Complication, dass mehrere solcher Differenzen oder Summen *zugleich* ganze Zahlen sind, soll vermieden werden. Uebrigens wird der Leser leicht erkennen, dass für viele der beizubringenden Formeln diese Beschränkung fortfallen kann, sie wird aber der Einfachheit halber gemacht.

Da die nachfolgenden Betrachtungen eine Ergänzung jener Arbeit im 87ten Bande bilden, so soll hier nicht bloss die dort angewandte Bezeichnung im Allgemeinen beibehalten werden, sondern der gegenwärtige Aufsatz soll auch in Numerirung der Artikel und Formeln als Fortsetzung jener behandelt werden, wodurch die Rückverweisung erleichtert wird.*)

Wird $\alpha' = \alpha$, so bleiben die Zweige der Paare W_+^α, $W_+^{\alpha'}$; W_-^α, $W_-^{\alpha'}$ nicht unabhängig von einander, es müssen für je einen Zweig jedes Paares Ersatzzweige gefunden werden. Im Art. 14 werden zehn Formen des positiven α-Ersatzzweiges, im Art. 15 zehn Formen des negativen α-Ersatzzweiges aufgestellt. Im Art. 16 wird die Darstellung eines β-Zweiges durch den Zweig W_+^α und den zugehörigen Ersatzzweig geliefert, wenn $\alpha' = \alpha - \nu$ ist, und damit zugleich eben jener Ersatzzweig nicht bloss mehr für den Fall $\alpha - \alpha' = 0$, sondern auch für den Fall $\alpha - \alpha' = \nu$ gefunden. Im Art. 17 werden β-Zweige durch den negativen α-Zweig und den zugehörigen Ersatzzweig für $\alpha - \alpha' = \nu$ dargestellt.

Wird $\alpha + \beta$ gleich einer ganzen Zahl ν, so treten gewisse sonst unabhängige Zweige in lineare Abhängigkeit zu einander, und es müssen für diese Ersatzzweige gefunden werden. Damit beschäftigt sich der Art. 18. Der Fall, dass $\beta - \beta' = \nu$ ist, kann aus dem $\alpha - \alpha' = \nu$ durch blosse Buchstabenvertauschung abgeleitet werden, und bedarf daher keiner weiteren Untersuchung. Anders verhält es sich, wenn $\gamma' = \gamma - \nu$ wird. Im Art. 19 werden zunächst für $\gamma' = \gamma$ zehn positive und zehn negative γ-Ersatzzweige gegeben, im Art. 20 werden α-Zweige und β-Zweige durch einen γ-Zweig und einen γ-Ersatzzweig dargestellt, wenn $\gamma' = \gamma - \nu$ ist. Der Art. 21 leitet

*) In der letzten der Formeln (34.) im Art. 6 ist in der F-Function das vierte Element γ durch $1 - \gamma'$ zu ersetzen.

durch Grenzübergang Formeln her, die sich auf die *Gauss*sche Reihe oder die *Riemann*sche *P*-Function beziehen in dem Falle, dass darin gewisse Exponentendifferenzen ganze Zahlen werden, was das Auftreten logarithmischer Glieder zur Folge hat. Dabei findet sich Gelegenheit, gefundene Resultate mit Formeln von *Gauss* zu vergleichen.

Die Facultät einer Zahl soll nicht wie früher durch $\Pi(z)$, sondern durch $facz$ gekennzeichnet werden, und es mögen auch zur Abkürzung einige neue Bezeichnungen eingeführt werden. Es werde für ganze m

$$(\lambda,\ m) = fac(\lambda+m-1) : fac(\lambda-1) = \lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+m-1), \quad (\lambda,\ 0) = 1$$

gesetzt, und der Buchstabe $\mathfrak{S}$ werde mit einem nachfolgenden m typisch zur Bezeichnung einer unendlichen Summe nach Massgabe der Gleichung

$$\mathfrak{S}f(m) = f(0)+f(1)+f(2)+\cdots \quad \text{in infinitum}$$

gebraucht. Unter ν werde immer eine positive ganze Zahl einschliesslich der Null verstanden. Ferner macht sich hier das Bedürfniss geltend nach einer Bezeichnung von Reihen, welche aus der Reihe

$$F_h\left(\begin{matrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{matrix}\right) = \mathfrak{S}\,Y(m) = \mathfrak{S}\,\frac{(h+b,\ m)(h+b',\ m)(h+b'',\ m)}{(h-a+1,\ m)(h-a'+1,\ m)(h-a''+1,\ m)}$$

dem Wesen nach durch partielle Differentiation entstehen, für Reihen, in denen neben den Facultäten noch Ψ-Functionen ((6.) Art. 1) im allgemeinen Gliede vorkommen. Um diesem Bedürfnisse entgegenzukommen, soll

$$F_h\left(\begin{matrix} a_+, & a', & a'' \\ b_+, & b', & b'' \end{matrix}\right) = \mathfrak{S}\,Y(m)\big(\Psi(h+b+m-1)+\Psi(h-a+m)\big),$$

$$F_h\left(\begin{matrix} a_+, & a', & a''_- \\ b_-, & b'_+, & b'' \end{matrix}\right) = \mathfrak{S}\,Y(m)\left\{\begin{matrix} \Psi(h-a+m)+\Psi(h+b'+m-1) \\ -\Psi(h-a''+m)-\Psi(h+b+m-1) \end{matrix}\right\},$$

$$F_h\left(\begin{matrix} a, & a'_+, & a''_- \\ b, & b', & b'' \end{matrix}\right) = \mathfrak{S}\,Y(m)\big(\Psi(h-a'+m)-\Psi(h-a''+m)\big),$$

$$F_h\left(\begin{matrix} a, & a', & a'' \\ b_-, & b'_+, & b'' \end{matrix}\right) = \mathfrak{S}\,Y(m)\big(\Psi(h+b'+m-1)-\Psi(h+b+m-1)\big)$$

u. s. w. sein. Dabei ist $Y(m)$ nur eine augenblickliche Abkürzung. Der Index h wird einfach fortgelassen, wenn er Null ist, was hier meist statt hat. — Die Reihen F, in denen den Elementen $a, b, \ldots$ Indices $+, -$ angehängt sind, convergiren im Allgemeinen unter denselben Bedingungen wie die entsprechenden Reihen ohne Indices, weil die Function $\Psi(c+m)$ mit wachsenden m nur wie $\log m$ wächst. — Ferner werde

$$\mathfrak{F}_h\left(\begin{matrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{matrix}\right) = \mathfrak{S}\,M(m) = M F_h\left(\begin{matrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{matrix}\right)$$

gesetzt, worin $M = M(0)$ und

$$M(m) = \frac{fac(h+b+m-1)fac(h+b'+m-1)fac(h+b''+m-1)}{fac(h-a+m)fac(h-a'+m)fac(h-a''+m)}$$

zu nehmen ist, und ähnlich sei

$$\mathfrak{F}\left(\begin{matrix}0, & a', \\ b, & b', \end{matrix}\ z\right) = \frac{fac(b-1)fac(b'-1)}{fac(-a')} F\left(\begin{matrix}0, & a', \\ b, & b', \end{matrix}\ z\right)$$

$$= fac(b-1)fac(b'-1)F(b,\ b',\ 1-a',\ z) : fac(-a'),$$

$$\mathfrak{F}_h\left(\begin{matrix}a_+, & a'_-, & a'' \\ b, & b'_+, & b'' \end{matrix}\right) = MF_h\left(\begin{matrix}a_+, & a'_-, & a'' \\ b, & b'_+, & b'' \end{matrix}\right) = \frac{\partial \mathfrak{F}_h}{\partial a} + \frac{\partial \mathfrak{F}_h}{\partial b'} - \frac{\partial \mathfrak{F}_h}{\partial a'}$$

u. s. w.

Art. 14. Ersatz für den Zweig $W_+^{\alpha'}$, wenn $\alpha - \alpha' = 0$ ist.

Der Fall werde als erster behandelt, dass $\alpha - \alpha' = \nu$ ist, im Uebrigen aber werden die Exponenten α, α', β, β', γ, γ' als nicht singulär vorausgesetzt. Alsdann sind alle β- und γ-Zweige der Function W in den Formen wie sie früher gefunden sind, unmittelbar brauchbar und von einander unabhängig, so dass sich durch zwei unter ihnen alle übrigen ausdrücken lassen. Anders verhält es sich jedoch mit den Zweigpaaren W_+^{α}, $W_+^{\alpha'}$; W_-^{α}, $W_-^{\alpha'}$. Ist $\nu = 0$, so erhellt unmittelbar aus den Darstellungen dieser Zweige (Art. 4 und Art. 5), dass sie paarweise einander gleich werden, und dass also ein Paar zur vollständigen Darstellung der Function W nicht dienen kann. Ist ν nicht gleich Null, so lässt sich aus den Darstellungen (Art. 4 (30.))

$$W_+^{\alpha} = F\left(\begin{matrix}0, & \alpha+\beta-\nu, & \alpha+\beta'-\nu \\ \gamma, & \gamma', & \nu-\alpha-n \end{matrix}\right), \quad W_+^{\alpha'} = F\left(\begin{matrix}0, & \alpha+\beta, & \alpha+\beta' \\ \gamma, & \gamma', & -\alpha-n \end{matrix}\right)$$

nicht ohne Weiteres erkennen, dass diese Zweige von einander abhängig sind, dass sie sich nur durch einen constanten oder in n periodischen Factor unterscheiden, und daher zur vollständigen Darstellung von W nicht ausreichen. Wählen wir aber zur Darstellung von $W_+^{\alpha'}$ den Ausdruck

$$W_+^{\alpha'} = \frac{fac(-\alpha-\beta')fac(n+\alpha')}{fac(\alpha'-\alpha)fac(n-\beta')} F\left(\begin{matrix}0, & \alpha+\beta, & \alpha-\alpha' \\ \alpha'+\beta'+\gamma, & \alpha'+\beta'+\gamma', & -\alpha-n \end{matrix}\right),$$

der, weil er für $\alpha - \alpha' = \nu$ in der Form $0.\infty$ erscheint, in eine Reihe aufzulösen, etwa in der Form zu schreiben ist

$$W_+^{\alpha'} = \frac{fac(-\alpha-\beta')fac(n+\alpha')}{fac(n-\beta')} \mathfrak{S} \frac{(\alpha'+\beta'+\gamma,\ m)(\alpha'+\beta'+\gamma',\ m)(-\alpha-n,\ m)}{facmfac(\alpha'-\alpha+m)(1-\alpha-\beta,\ m)},$$

so wird die Abhängigkeit leicht erkennbar. Da nämlich für $\alpha' = \alpha - \nu$ die ersten ν Glieder dieser Reihe verschwinden, so kann man hinter $\mathfrak{S}$ $m+\nu$ für m, $(\lambda+\nu, m).(\lambda,\nu)$ für $(\lambda, m+\nu)$ setzen, wodurch man die Beziehung erhält:

$$W_+^{\alpha'=\alpha-\nu}(n) = C_\nu \mathfrak{S} \frac{(\alpha+\beta'+\gamma,\ m)(\alpha+\beta'+\gamma',\ m)(\nu-\alpha-n,\ m)}{(\nu+1,\ m)(1,\ m)(\nu+1-\alpha-\beta,\ m)}$$

$$= C_\nu F\begin{pmatrix} 0, & -\nu, & \alpha+\beta-\nu \\ \alpha+\beta'+\gamma, & \alpha+\beta'+\gamma', & \nu-\alpha-n \end{pmatrix},$$

wenn

$$C_\nu = \frac{fac(-\alpha-\beta')fac(n+\alpha)(\alpha+\beta'+\gamma-\nu,\ \nu)(\alpha+\beta'+\gamma'-\nu,\ \nu)}{(-1)^\nu fac\nu fac(n-\beta')(1-\alpha-\beta,\ \nu)}$$

ist. Dieser Ausdruck für $W_+^{\alpha'}$ unterscheidet sich von der entsprechenden Darstellung des Zweiges W_+^{α} (Art. 4 (30.) zweite Form)

$$W_+^{\alpha} = \frac{fac(\nu-\alpha-\beta')fac(n+\alpha)}{fac\nu fac(n-\beta')} F\begin{pmatrix} 0, & \alpha+\beta-\nu, & -\nu \\ \alpha+\beta'+\gamma, & \alpha+\beta'+\gamma', & \nu-\alpha-n \end{pmatrix}$$

nur durch einen constanten, d. h. von n unabhängigen Factor und zwar ist für $\alpha' = \alpha - \nu$

$$(106.) \qquad W_+^{\alpha'} = \frac{(-1)^\nu(\alpha+\beta'+\gamma-\nu,\ \nu)(\alpha+\beta'+\gamma'-\nu,\ \nu)}{(1-\alpha-\beta,\ \nu)(1-\alpha-\beta',\ \nu)} W_+^{\alpha}.$$

Wenn man hieraus, um lauter unabhängige Grössen zu erhalten, γ' mittels der Gleichung

$$\alpha+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma' = 2\alpha-\nu+\beta+\beta'+\gamma+\gamma' = 1$$

entfernt, wenn man $(-1)^\nu(\alpha+\beta'+\gamma-\nu,\ \nu)$ durch $(1-\alpha-\beta'-\gamma,\ \nu)$ ersetzt, für W die erste der Formen unter (30.) wählt, so gewinnt man die Gleichung

$$(107.) \quad \begin{cases} F\begin{pmatrix} 0, & \alpha+\beta, & \alpha+\beta' \\ \gamma, & 1-2\alpha-\beta-\beta'-\gamma+\nu, & -\alpha-n \end{pmatrix} \\ = \dfrac{(1-\alpha-\beta-\gamma,\ \nu)(1-\alpha-\beta'-\gamma,\ \nu)}{(1-\alpha-\beta,\ \nu)(1-\alpha-\beta',\ \nu)} F\begin{pmatrix} 0, & \alpha+\beta-\nu, & \alpha+\beta'-\nu \\ \gamma, & 1-2\alpha-\beta-\beta'-\gamma+\nu, & \nu-\alpha-n \end{pmatrix} \end{cases}$$

oder

$$(107^a.) \quad \begin{cases} F\begin{pmatrix} 0, & a', & a'' \\ b, & b', & 1-a'-a''-b+\nu \end{pmatrix} \\ = \dfrac{(1-a'-b,\ \nu)(1-a''-b,\ \nu)}{(1-a',\ \nu)(1-a'',\ \nu)} F\begin{pmatrix} 0, & a'-\nu, & a''-\nu \\ b, & b'+\nu, & 1-a'-a''-b+\nu \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Für $\nu = 0$ sind diese Gleichungen evident, für $\nu = 1$ aber stimmt (107ª.)

mit der Gleichung (81ª.) des Art. 11

$$F\left(\begin{matrix}0, & a'-1, & a''-1\\ b, & b'+1, & b''\end{matrix}\right)(1-a'-b)(1-a''-b)-F\left(\begin{matrix}0, & a', & a''\\ b, & b', & b''\end{matrix}\right)(1-a')(1-a'')$$
$$+F\left(\begin{matrix}0, & a'-1, & a''-1\\ b+1, & b'+1, & b''\end{matrix}\right)b(a'+a''+b+b''-2) = 0$$

überein, wenn in letzterer $a'+a''+b+b''-2=0$, also $b''=2-a'-a''-b$ gesetzt wird.

Da also W_+^{α} und $W_+^{\alpha'}$, als von einander linear abhängig, die allgemeine Function W nicht darzustellen vermögen, so muss man für einen dieser Zweige, etwa für $W_+^{\alpha'}$ nach einem Ersatz suchen, der als zweiter positiver α-Zweig der Function W gelten kann. Für jeden Zweig sind zehn einander gleiche, aber in der Form und ihren Convergenzbereichen verschiedene Darstellungen durch hypergeometrische Reihen in den früheren Artikeln von mir angegeben, deren jeder eine Form des Ersatzzweiges entspricht. Will man nicht bloss einen solchen Ersatzzweig in zehn verschiedenen Formen aufstellen, sondern sollen diese zugleich auch unmittelbar unter einander gleich sein, so erhält man für ein beliebiges ν sehr umfangreiche Formeln. Aus diesem Grunde soll ein Ersatzzweig für $W_+^{\alpha'}$, wenn ν beliebig ist, erst an späterer Stelle gegeben werden. Hier sollen aber für $\nu=0$ die zehn einander gleichen, in der Form verschiedenen Ersatzzweige aufgestellt werden, und zwar wollen wir die Bezeichnung des Ersatzzweiges durch die Gleichung festlegen

$$(108.)\qquad W_+^{\alpha'=\alpha} = \lim_{\varepsilon=0}\frac{1}{2\varepsilon}(W_+^{\alpha'=\alpha-\varepsilon}-W_+^{\alpha=\alpha+\varepsilon}).$$

Dass dieser Grenzwerth, falls er existirt, eine Lösung der Recursionsformel (19.) des Art. 2 giebt, bedarf keiner Erörterung. Die Ausführung des Grenzüberganges bietet ebenfalls keine Schwierigkeiten, wenn man beachtet, dass $d\log facz : dz = \Psi(z)$ ist. Für eine dieser zehn Formen soll jedoch dieser Grenzübergang wirklich durchgerechnet werden. Wir wählen dazu die zweite der im Art. 4 unter (30.) gegebenen Formen,

$$W_+^{\alpha'} = A'\mathfrak{F}^{\alpha'} = A'\mathfrak{F}\left(\begin{matrix}0 & \alpha+\beta, & \alpha-\alpha'\\ \alpha'+\beta'+\gamma, & \alpha'+\beta'+\gamma', & -\alpha-n\end{matrix}\right),$$

$$W_+^{\alpha} = A\mathfrak{F}^{\alpha} = A\mathfrak{F}\left(\begin{matrix}0, & \alpha'+\beta, & \alpha'-\alpha\\ \alpha+\beta'+\gamma, & \alpha+\beta'+\gamma', & -\alpha'-n\end{matrix}\right),$$

worin $\mathfrak{F}^{\alpha}$, $\mathfrak{F}^{\alpha'}$ und

$$A' = \frac{fac(-\alpha-\beta)fac(-\alpha-\beta')fac(n+\alpha)fac(n+\alpha')}{fac(n-\beta')fac(\alpha'+\beta'+\gamma-1)fac(\alpha'+\beta'+\gamma'-1)} \cdot \frac{\sin(n+\alpha+1)\pi}{\pi},$$

$$A = \frac{fac(-\alpha'-\beta)fac(-\alpha'-\beta')fac(n+\alpha)fac(n+\alpha')}{fac(n-\beta')fac(\alpha+\beta'+\gamma-1)fac(\alpha+\beta'+\gamma'-1)} \cdot \frac{\sin(n+\alpha'+1)\pi}{\pi}$$

augenblickliche Abkürzungen sind. In dieser Schreibweise hat man

$$W_+^{\alpha'=\alpha-\varepsilon} - W_+^{\alpha=\alpha+\varepsilon} = A'(\mathfrak{F}^{\alpha'=\alpha-\varepsilon} - \mathfrak{F}^{\alpha=\alpha+\varepsilon}) + (A'-A)\mathfrak{F}^{\alpha+\varepsilon}.$$

Ist nun

$$Y(m, \varepsilon) = \frac{fac(\alpha+\beta'+\gamma+m-\varepsilon-1)fac(\alpha+\beta'+\gamma'+m-\varepsilon-1)fac(m-\alpha-n-\varepsilon-1)}{fac\,m\,fac(m-2\varepsilon)fac(m-\alpha-\beta-\varepsilon)},$$

$Y(m, 0) = Y(m)$, und ist η eine mit ε verschwindende Grösse, so hat man

$$\mathfrak{F}^{\alpha'=\alpha-\varepsilon} - \mathfrak{F}^{\alpha=\alpha+\varepsilon} = \mathfrak{S}\big(Y(m, \varepsilon) - Y(m, -\varepsilon)\big)$$

$$= 2\varepsilon \mathfrak{S}\, Y(m) \left\{ \begin{matrix} 2\Psi(m) + \Psi(m-\alpha-\beta) - \Psi(m-\alpha-n-1) \\ -\Psi(\alpha+\beta'+\gamma+m-1) - \Psi(\alpha+\beta'+\gamma'+m-1) \end{matrix} \right\} + \varepsilon\eta$$

$$= 2\varepsilon \mathfrak{F}\begin{pmatrix} 0_+, & 0_+, & \alpha+\beta_+ \\ \alpha+\beta'+\gamma_-, & \alpha+\beta'+\gamma'_-, & -\alpha-n_- \end{pmatrix} + \varepsilon\eta.$$

Wird ferner für $\alpha = \alpha'$, $A = A' = A_0$ gesetzt, so ist für $\alpha' = \alpha-\varepsilon$, $\alpha = \alpha+\varepsilon$:

$$A = A_0 + \varepsilon A_0 \left\{ \begin{matrix} \Psi(-\alpha-\beta) + \Psi(-\alpha-\beta') - \pi \operatorname{ctg}(n+\alpha)\pi \\ -\Psi(\alpha+\beta'+\gamma-1) - \Psi(\alpha+\beta'+\gamma'-1) \end{matrix} \right\} + \varepsilon\eta',$$

$$A' = A_0 - \varepsilon A_0 \left\{ \begin{matrix} \Psi(-\alpha-\beta) + \Psi(-\alpha-\beta') - \pi \operatorname{ctg}(n+\alpha)\pi \\ -\Psi(\alpha+\beta'+\gamma-1) - \Psi(\alpha+\beta'+\gamma'-1) \end{matrix} \right\} + \varepsilon\eta'',$$

worin η', η'' mit ε verschwinden. Nach diesen Vorbereitungen fliesst aus (108.)

(109.)
$$\left| \begin{matrix} W_+^{\alpha'=\alpha} = \dfrac{fac(-\alpha-\beta')fac(n+\alpha)}{fac(n-\beta')} F\begin{pmatrix} 0_+, & 0_+, & \alpha+\beta_+ \\ \alpha+\beta'+\gamma_-, & \alpha+\beta'+\gamma'_-, & -\alpha-n_- \end{pmatrix} \\ +(\pi \operatorname{ctg}(n+\alpha)\pi + \Psi(\alpha+\beta'+\gamma-1) + \Psi(\alpha+\beta'+\gamma'-1) - \Psi(-\alpha-\beta) - \Psi(-\alpha-\beta'))W_+^{\alpha}, \end{matrix} \right.$$

worin nun

$$W_+^{\alpha} = \frac{fac(n+\alpha)fac(-\alpha-\beta')}{fac(n-\beta')} F\begin{pmatrix} 0, & 0, & \alpha+\beta \\ \alpha+\beta'+\gamma, & \alpha+\beta'+\gamma', & -\alpha-n \end{pmatrix}$$

ist. Der W_+^{α} enthaltende Theil könnte, wenn es sich nur um eine Ersatzlösung der Recursionsformel (19.) handelte, weggelassen werden, weil er sich von der particulären Lösung W_+^{α} nur durch einen in n periodischen Factor unterscheidet. Die Eigenschaft aber, ungeändert zu bleiben, wenn man nicht bloss γ mit γ', sondern auch β mit β' vertauscht, kommt nur dem Aggregat, nicht den einzelnen Theilen zu. — Es folgen nun die zehn, formal und in ihren Convergenzbedingungen verschiedenen, analytisch aber einander gleichen Formen des Ersatzzweiges $W_+^{\alpha'=\alpha}$ in der den Formen (30.) entsprechenden Reihenfolge.

$$
\left\{\begin{aligned}
&W_+^{\alpha'=\alpha} = (\Psi(-\alpha-n-1)-\Psi(-\alpha-\beta)-\Psi(-\alpha-\beta'))W_+^{\alpha}+F\begin{pmatrix}0, & \alpha+\beta_+, & \alpha+\beta'_+\\ \gamma, & \gamma', & -\alpha-n_-\end{pmatrix}\\
&= (\pi\operatorname{ctg}(n+\alpha)\pi+\Psi(\alpha+\beta'+\gamma-1)+\Psi(\alpha+\beta'+\gamma'-1)-\Psi(-\alpha-\beta)-\Psi(-\alpha-\beta'))W_+^{\alpha}\\
&\quad+\frac{fac(-\alpha-\beta')fac(n+\alpha)}{fac(n-\beta')}F\begin{pmatrix}0_+, & 0_+, & \alpha+\beta_+\\ \alpha+\beta'+\gamma_-, & \alpha+\beta'+\gamma'_-, & -\alpha-n_-\end{pmatrix}\\
&= (\pi\operatorname{ctg}(n+\alpha)\pi+\Psi(\alpha+\beta+\gamma-1)+\Psi(\alpha+\beta+\gamma'-1)-\Psi(-\alpha-\beta)-\Psi(-\alpha-\beta'))W_+^{\alpha}\\
&\quad+\frac{fac(-\alpha-\beta)fac(n+\alpha)}{fac(n-\beta)}F\begin{pmatrix}0_+, & 0_+, & \alpha+\beta'_+\\ \alpha+\beta+\gamma_-, & \alpha+\beta+\gamma'_-, & -\alpha-n_-\end{pmatrix}\\
&= (\Psi(-\alpha-n-1)-\Psi(-\alpha-\beta)-\Psi(-\alpha-\beta'))W_+^{\alpha}\\
&\quad+\frac{fac(-\alpha-\beta)fac(-\alpha-\beta')fac(n+\alpha)}{fac(\alpha+\gamma+n)fac(\alpha+\gamma'+n)fac(-\alpha-n-1)}F\begin{pmatrix}0, & -\alpha-\gamma-n_+, & -\alpha-\gamma'-n_+\\ n+\alpha+1_-, & n-\beta+1, & n-\beta'+1\end{pmatrix}\\
&= (\Psi(-\alpha-\beta'-\gamma)+\Psi(-\alpha-\beta-\gamma')-\Psi(-\alpha-\beta)-\Psi(-\alpha-\beta')-\Psi(n+\alpha))W_+^{\alpha}\\
&\quad+\frac{fac(-\alpha-\beta')fac(n+\alpha)}{fac(-\alpha-\beta'-\gamma)fac(\alpha+\gamma+n)}F\begin{pmatrix}0, & \alpha+\beta_+, & -\alpha-\gamma-n_+\\ \gamma, & \alpha+\beta'+\gamma_-, & n-\beta+1\end{pmatrix}\\
&= (\Psi(-\alpha-\beta'-\gamma')+\Psi(-\alpha-\beta-\gamma)-\Psi(-\alpha-\beta)-\Psi(-\alpha-\beta')-\Psi(n+\alpha))W_+^{\alpha}\\
&\quad+\frac{fac(-\alpha-\beta')fac(n+\alpha)}{fac(-\alpha-\beta'-\gamma')fac(\alpha+\gamma'+n)}F\begin{pmatrix}0, & \alpha+\beta_+, & -\alpha-\gamma'-n_+\\ \gamma', & \alpha+\beta'+\gamma'_-, & n-\beta+1\end{pmatrix}\\
&= (\Psi(-\alpha-\beta-\gamma)+\Psi(-\alpha-\beta'-\gamma')-\Psi(-\alpha-\beta)-\Psi(-\alpha-\beta')-\Psi(n+\alpha))W_+^{\alpha}\\
&\quad+\frac{fac(-\alpha-\beta)fac(n+\alpha)}{fac(-\alpha-\beta-\gamma)fac(\alpha+\gamma+n)}F\begin{pmatrix}0, & \alpha+\beta'_+, & -\alpha-\gamma-n_+\\ \gamma, & \alpha+\beta+\gamma'_-, & n-\beta'+1\end{pmatrix}\\
&= (\Psi(-\alpha-\beta-\gamma')+\Psi(-\alpha-\beta'-\gamma)-\Psi(-\alpha-\beta)-\Psi(-\alpha-\beta')-\Psi(n+\alpha))W_+^{\alpha}\\
&\quad+\frac{fac(-\alpha-\beta)fac(n+\alpha)}{fac(-\alpha-\beta-\gamma')fac(\alpha+\gamma'+n)}F\begin{pmatrix}0, & \alpha+\beta'_+, & -\alpha-\gamma'-n_+\\ \gamma', & \alpha+\beta+\gamma'_-, & n-\beta'+1\end{pmatrix}\\
&= (\Psi(-\alpha-\beta'-\gamma)+\Psi(-\alpha-\beta-\gamma)-\Psi(-\alpha-\beta)-\Psi(-\alpha-\beta'))W_+^{\alpha}\\
&\quad+\frac{fac(-\alpha-\beta)fac(-\alpha-\beta')fac(n+\alpha)}{fac(\gamma-1)fac(\alpha+\gamma'+n)}F\begin{pmatrix}0_+, & 0_+, & -\alpha-\gamma'-n_+\\ \alpha+\beta+\gamma'_-, & \alpha+\beta'+\gamma'_-, & n+\alpha+1_-\end{pmatrix}\\
&= (\Psi(-\alpha-\beta'-\gamma')+\Psi(-\alpha-\beta-\gamma')-\Psi(-\alpha-\beta)-\Psi(-\alpha-\beta'))W_+^{\alpha}\\
&\quad+\frac{fac(-\alpha-\beta)fac(-\alpha-\beta')fac(n+\alpha)}{fac(\gamma'-1)fac(\alpha+\gamma+n)}F\begin{pmatrix}0_+, & 0_+, & -\alpha-\gamma-n_+\\ \alpha+\beta+\gamma_-, & \alpha+\beta'+\gamma_-, & n+\alpha+1_-\end{pmatrix}.
\end{aligned}\right. \tag{110.}
$$

Art. 15. Ersatz für den Zweig $W_-^{\alpha'}$, wenn $\alpha' = \alpha$ ist.

Die Zweige $W_-^{\alpha'}$ und W_-^{α} unterscheiden sich ebenfalls von einander nur durch einen constanten oder in n periodischen Factor, wenn $\alpha-\alpha' = \nu$ ist, so dass für einen dieser Zweige, etwa für $W_-^{\alpha'}$ ein Ersatz zu suchen ist, der mit dem andern W_-^{α} zusammengenommen im Stande ist, W vollständig darzustellen. Die Herstellung eines solchen Ersatzzweiges für ein beliebiges ν wird an späterer Stelle gegeben. In diesem Artikel sollen die

zehn einander analytisch gleichen, in der Form und den Convergenzbedingungen aber verschiedenen Ausdrücke für den Ersatzzweig gegeben werden, wenn $\alpha=\alpha'$ ist. Die entsprechenden Formeln für ein beliebiges ν würden umfangreicher ausfallen, aber nach derselben Methode erhalten werden. Der Ersatzzweig wird aus dem zugleich die Bezeichnung bestimmenden Grenzwerthe

$$\lim_{\varepsilon=0}\frac{1}{2\varepsilon}\left(W_-^{\alpha'=\alpha-\varepsilon}-W_-^{\alpha=\alpha+\varepsilon}\right)=W_-^{\alpha'=\alpha} \tag{111.}$$

gewonnen. Die Formeln folgen in der Ordnung, dass sie den Ausdrücken (31.) des Art. 5 der Reihe nach entsprechen. Da der Factor

$$fac(-\gamma)fac(-\gamma')fac(\beta-n-1)fac(\beta'-n-1):fac(-\alpha-n-1)$$

in diesen Formeln mehrfach vorkommt, so mag derselbe zur Abkürzung mit g bezeichnet werden. So erhalten wir die Formeln

$$\left\{\begin{aligned}
W_-^{\alpha'=\alpha} &= \left(\Psi(-\alpha-\beta'-\gamma)+\Psi(-\alpha-\beta'-\gamma')-\pi\operatorname{ctg}(n+\alpha)\pi\right)W_-^{\alpha}\\
&\quad+\frac{g:fac(\alpha+\beta)}{fac(\beta'-n-1)}F\left(\begin{matrix}0_+, & 0_+, & -\alpha-\beta_+\\ \alpha+\beta+\gamma_-, & \alpha+\beta+\gamma'_-, & \alpha+n+1_-\end{matrix}\right)\\
&=\left(\Psi(-\alpha-\beta-\gamma)+\Psi(-\alpha-\beta-\gamma')-\pi\operatorname{ctg}(n+\alpha)\pi\right)W_-^{\alpha}\\
&\quad+\frac{g:fac(\alpha+\beta')}{fac(\beta-n-1)}F\left(\begin{matrix}0_+, & 0_+, & -\alpha-\beta'_+\\ \alpha+\beta'+\gamma_-, & \alpha+\beta'+\gamma'_-, & \alpha+n+1_-\end{matrix}\right)\\
&=\Psi(n+\alpha)W_-^{\alpha}+\frac{g:fac(-\alpha-n-1)}{fac(\alpha+\beta)fac(\alpha+\beta')}F\left(\begin{matrix}0, & -\alpha-\beta_+, & -\alpha-\beta'_+\\ 1-\gamma, & 1-\gamma', & \alpha+n+1_-\end{matrix}\right)\\
&=\Psi(n+\alpha)W_-^{\alpha}+\frac{g:fac(n+\alpha)}{fac(-\alpha-\gamma-n)fac(-\alpha-\gamma'-n)}F\left(\begin{matrix}0, & \alpha+\gamma+n_+, & \alpha+\gamma'+n_+\\ \beta-n, & \beta'-n, & -\alpha-n_-\end{matrix}\right)\\
&=\left(\Psi(-\alpha-\beta-\gamma')+\Psi(-\alpha-\beta'-\gamma')\right)W_-^{\alpha}\\
&\quad+\frac{g:fac(-\gamma)}{fac(-\alpha-\gamma'-n)}F\left(\begin{matrix}0_+, & 0_+, & \alpha+\gamma'+n_+\\ \alpha+\beta+\gamma_-, & \alpha+\beta'+\gamma_-, & -\alpha-n_-\end{matrix}\right)\\
&=\left(\Psi(-\alpha-\beta-\gamma)+\Psi(-\alpha-\beta'-\gamma)\right)W_-^{\alpha}\\
&\quad+\frac{g:fac(-\gamma')}{fac(-\alpha-\gamma-n)}F\left(\begin{matrix}0_+, & 0_+, & \alpha+\gamma+n_+\\ \alpha+\beta+\gamma'_-, & \alpha+\beta'+\gamma'_-, & -\alpha-n_-\end{matrix}\right)\\
&=\left(\Psi(-\alpha-\beta-\gamma)+\Psi(-\alpha-\beta'-\gamma')-\Psi(-\alpha-n-1)\right)W_-^{\alpha}\\
&\quad+\frac{g:fac(\alpha+\beta)}{fac(-\alpha-\beta-\gamma)fac(-\alpha-\gamma'-n)}F\left(\begin{matrix}0, & -\alpha-\beta_+, & \alpha+\gamma'+n_+\\ \alpha+\beta+\gamma_-, & 1-\gamma', & \beta-n\end{matrix}\right)\\
&=\left(\Psi(-\alpha-\beta-\gamma')+\Psi(-\alpha-\beta'-\gamma)-\Psi(-\alpha-n-1)\right)W_-^{\alpha}\\
&\quad+\frac{g:fac(\alpha+\beta)}{fac(-\alpha-\beta-\gamma')fac(-\alpha-\gamma-n)}F\left(\begin{matrix}0, & -\alpha-\beta_+, & \alpha+\gamma+n_+\\ \alpha+\beta+\gamma'_-, & 1-\gamma, & \beta-n\end{matrix}\right)\\
&=\left(\Psi(-\alpha-\beta'-\gamma)+\Psi(-\alpha-\beta-\gamma')-\Psi(-\alpha-n-1)\right)W_-^{\alpha}\\
&\quad+\frac{g:fac(\alpha+\beta')}{fac(-\alpha-\beta'-\gamma)fac(-\alpha-\gamma'-n)}F\left(\begin{matrix}0, & -\alpha-\beta'_+, & \alpha+\gamma'+n_+\\ \alpha+\beta'+\gamma_-, & 1-\gamma' & \beta'-n\end{matrix}\right)\\
&=\left(\Psi(-\alpha-\beta'-\gamma')+\Psi(-\alpha-\beta-\gamma)-\Psi(-\alpha-n-1)\right)W_-^{\alpha}\\
&\quad+\frac{g:fac(\alpha+\beta')}{fac(-\alpha-\beta'-\gamma')fac(-\alpha-\gamma-n)}F\left(\begin{matrix}0, & -\alpha-\beta'_+, & \alpha+\gamma+n_+\\ \alpha+\beta'+\gamma'_-, & 1-\gamma, & \beta'-n\end{matrix}\right).
\end{aligned}\right. \tag{112.}$$

Art. 16. Beziehungen zwischen W_+^{α}, $W_+^{\alpha'=\alpha-\nu}$ und anderen Zweigen.

Jeder β- und jeder γ-Zweig lässt sich durch die beiden Zweige W_+^{α}, $W_+^{\alpha'=\alpha-\nu}$ ausdrücken, die von einander linear unabhängig sind. Bei Aufstellung dieser Bezeichnungen lassen wir die Beschränkung $\nu = 0$ fallen, und gelangen so beiläufig zu dem Ergänzungszweige $W_+^{\alpha'=\alpha-\nu}$ im allgemeinen Falle, gegenüber der Annahme des Art. 14, dass $\nu = 0$ sei. Zuerst behandeln wir die Gleichung

$$W_-^{\beta} = (\bar{\beta}, \overset{+}{\alpha}) W_+^{\alpha} + (\bar{\beta}, \overset{+}{\alpha'}) W_+^{\alpha'},$$

deren Coefficienten $(\bar{\beta}, \overset{+}{\alpha})$, $(\bar{\beta}, \overset{+}{\alpha'})$ im Art. 8 unter (55.) stehen, und setzen

$$W_+^{\alpha} = A\mathfrak{F}\begin{pmatrix} 0, & \alpha'+\beta, & \alpha'-\alpha \\ \alpha+\beta'+\gamma, & \alpha+\beta'+\gamma', & -\alpha'-n \end{pmatrix},$$

$$W_+^{\alpha'} = A'\mathfrak{F}\begin{pmatrix} 0, & \alpha+\beta, & \alpha-\alpha' \\ \alpha'+\beta'+\gamma, & \alpha'+\beta'+\gamma', & -\alpha-n \end{pmatrix},$$

$$A = \frac{fac(-\alpha'-\beta)fac(-\alpha'-\beta')fac(n+\alpha)fac(n+\alpha')\sin(n+\alpha'+1)\pi}{\pi fac(n-\beta')fac(\alpha+\beta'+\gamma-1)fac(\alpha+\beta'+\gamma'-1)},$$

$$A' = \frac{fac(-\alpha-\beta)fac(-\alpha-\beta')fac(n+\alpha)fac(n+\alpha')\sin(n+\alpha+1)\pi}{\pi fac(n-\beta)fac(\alpha'+\beta'+\gamma-1)fac(\alpha'+\beta'+\gamma'-1)}.$$

Dann ist

$$(\bar{\beta}, \overset{+}{\alpha}) A = D\frac{\sin(\alpha+\beta'+\gamma)\pi\sin(\alpha+\beta'+\gamma')\pi}{\sin(\alpha'-\alpha)\pi},$$

$$(\bar{\beta}, \overset{+}{\alpha'}) = D\frac{\sin(\alpha'+\beta'+\gamma)\pi\sin(\alpha'+\beta'+\gamma')\pi}{\sin(\alpha-\alpha')\pi},$$

$$D = \frac{fac(-\alpha-\beta')fac(-\alpha'-\beta')\operatorname{cosec}(n-\beta)\pi}{fac(-\alpha-n-1)fac(-\alpha'-n-1)fac(n-\beta')},$$

und es ist die Gleichung zu behandeln

$$(113.)\quad \begin{cases} W_-^{\beta} = D\dfrac{\sin(\alpha+\beta'+\gamma)\pi\sin(\alpha+\beta'+\gamma')\pi}{\sin(\alpha'-\alpha)\pi}\mathfrak{F}\begin{pmatrix} 0, & \alpha'+\beta, & \alpha'-\alpha \\ \alpha+\beta'+\gamma, & \alpha+\beta'+\gamma', & -\alpha'-n \end{pmatrix} \\ \quad +D\dfrac{\sin(\alpha'+\beta'+\gamma)\pi\sin(\alpha'+\beta'+\gamma')\pi}{\sin(\alpha-\alpha')\pi}\mathfrak{F}\begin{pmatrix} 0, & \alpha+\beta, & \alpha-\alpha' \\ \alpha'+\beta'+\gamma, & \alpha'+\beta'+\gamma', & -\alpha-n \end{pmatrix}. \end{cases}$$

In dieser Gleichung ersetzen wir α durch $\alpha+\varepsilon$, α' durch $\alpha-\nu-\varepsilon$, um nachher mit ε zur Grenze Null überzugehen. Es ist ersichtlich, dass man ε im Factor D ohne Weiteres gleich Null setzen kann, dass nur die übrigen Grössen eine nähere Betrachtung und Umformung nöthig machen. Dabei mögen zur Abkürzung mit η, η', η'' Grössen bezeichnet werden, die mit ε verschwinden. So ist

$$\frac{\sin(\alpha+\beta'+\gamma)\pi\sin(\alpha+\beta'+\gamma')\pi}{\sin(\alpha'-\alpha)\pi} = \frac{\cos(\gamma-\gamma')\pi+\cos(\alpha-\alpha'+\beta'-\beta)\pi}{2\sin(\alpha'-\alpha)\pi}$$

$$= \frac{\cos(\gamma-\gamma')\pi+\cos(\beta-\beta')\pi}{2\sin(\alpha'-\alpha)\pi}+\tfrac{1}{2}\sin(\beta'-\beta)\pi+\eta,$$

$$\frac{\sin(\alpha'+\beta'+\gamma)\pi\sin(\alpha'+\beta'+\gamma')\pi}{2\sin(\alpha-\alpha')\pi} = \frac{\cos(\gamma-\gamma')\pi+\cos(\beta-\beta')\pi}{2\sin(\alpha-\alpha')\pi}+\tfrac{1}{2}\sin(\beta'-\beta)\pi+\eta',$$

$$\mathfrak{F}\left(\begin{matrix}0, & \alpha+\beta+\varepsilon, & \nu+2\varepsilon\\ \alpha+\beta'+\gamma-\nu-\varepsilon, & \alpha+\beta'+\gamma'-\nu-\varepsilon, & -\alpha-\nu-\varepsilon\end{matrix}\right)$$

$$= \mathfrak{S}\frac{fac(\alpha+\beta'+\gamma+m-\nu-\varepsilon-1)fac(\alpha+\beta'+\gamma'+m-\nu-\varepsilon-1)fac(m-\alpha-n-\varepsilon-1)}{facm\,fac(m-\alpha-\beta-\varepsilon)fac(m-\nu-2\varepsilon)}$$

$$= \frac{(-1)^\nu\sin 2\varepsilon\pi}{\pi}\sum_{m=0}^{m=\nu-1}F_m+\mathfrak{F}\left(\begin{matrix}2\varepsilon, & -\nu, & \alpha+\beta+\varepsilon-\nu\\ \alpha+\beta'+\gamma+\varepsilon, & \alpha+\beta'+\gamma'-\varepsilon, & \nu-\alpha-n-\varepsilon\end{matrix}\right)+\varepsilon\eta'',$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$F_m = \frac{fac(\alpha+\beta'+\gamma+m-\nu-1)fac(\alpha+\beta'+\gamma'+m-\nu-1)fac(m-\alpha-n-1)}{(-1)^m facm\,fac(m-\alpha-\beta):fac(\nu-m-1)}.$$

Setzt man diese Ausdrücke in (113.) ein, so ergiebt sich

$$(114.)\quad\begin{cases} W_-^\beta = \frac{1}{2\pi}D(\cos(\gamma-\gamma')\pi+\cos(\beta-\beta')\pi)\sum_{m=0}^{m=\nu-1}F_m \\ \qquad +D\sin(\beta'-\beta)\pi\,\mathfrak{F}\left(\begin{matrix}0, & -\nu & \alpha+\beta-\nu\\ \alpha+\beta'+\gamma, & \alpha+\beta'+\gamma', & \nu-\alpha-n\end{matrix}\right) \\ +\frac{1}{2\pi}(-1)^\nu D(\cos(\gamma-\gamma')\pi+\cos(\beta-\beta')\pi)\,\mathfrak{F}\left(\begin{matrix}0_+, & -\nu_+, & \alpha+\beta-\nu_+\\ \alpha+\beta'+\gamma_-, & \alpha+\beta'+\gamma'_-, & \nu-\alpha-n_-\end{matrix}\right), \end{cases}$$

worin nun

$$D = \frac{fac(-\alpha-\beta')fac(-\alpha-\beta'+\nu)\operatorname{cosec}(n-\beta)\pi}{fac(-\alpha-n-1)fac(\nu-\alpha-n-1)fac(n-\beta')}$$

ist. Für $\nu=0$ vereinfacht sich die Formel dadurch erheblich, dass aus ihr die endliche Summe F_m ganz herausfällt. Aber auch sonst lässt sich die Formel vereinfachen, wenn man für W_+^α (und entsprechend für $W_+^{\alpha'}$) nicht die zweite, sondern die dritte der Formen unter (30.) nimmt. Dadurch erhält man

$$(114^a.)\quad\begin{cases} W_-^\beta = -\frac{fac(\nu-\alpha-\beta')fac(\nu-1)fac(\beta-n-1)}{fac(\nu-\alpha-\beta'-\gamma)fac(\nu-\alpha-\beta'-\gamma')fac(-n-\alpha+\nu-1)}G_\nu \\ \qquad +(-1)^\nu\Delta\,\mathfrak{F}\left(\begin{matrix}0_+, & \alpha+\beta'-\nu_+, & -\nu_+\\ \alpha+\beta+\gamma_-, & \alpha+\beta+\gamma'_-, & \nu-\alpha-n_-\end{matrix}\right), \end{cases}$$

wo G_ν die Summe der ersten ν Glieder der Reihe

$$F\left(\begin{matrix}0, & \alpha+\beta', & \nu\\ \alpha+\beta+\gamma-\nu, & \alpha+\beta+\gamma'-\nu, & -\alpha-n\end{matrix}\right)$$

bedeutet und

$$\Delta = \frac{fac(-\alpha-\beta')fac(\nu-\alpha-\beta')fac(\beta-n-1):fac(-n-\alpha-1)fac(\nu-n-\alpha-1)}{fac(-\alpha-\beta'-\gamma)fac(\nu-\alpha-\beta'-\gamma)fac(-\alpha-\beta'-\gamma')fac(\nu-\alpha-\beta'-\gamma')}$$

ist. — Auf den Fall $\nu = 0$ beschränke ich mich bei Herleitung einer weiteren Beziehung zwischen drei Zweigen, nämlich der Beziehung, welche aus der Gleichung

$$W_+^\beta = (\overset{+}{\beta},\ \overset{+}{\alpha})W_+^\alpha + (\overset{+}{\beta},\ \overset{+}{\alpha'})W_+^{\alpha'}$$

für $\alpha' = \alpha$ entspringt. Zur Darstellung von W_+^α und $W_+^{\alpha'}$ wählen wir diesmal die vorletzte der unter (30.) stehenden Formen, so dass

$$W_+^\alpha = B\mathfrak{F}\begin{pmatrix} 0, & \alpha'-\alpha, & -\alpha-\gamma'-n \\ \alpha+\beta+\gamma', & \alpha+\beta'+\gamma', & n+\alpha+1 \end{pmatrix},$$

$$W_+^{\alpha'} = B'\mathfrak{F}\begin{pmatrix} 0, & \alpha-\alpha', & -\alpha'-\gamma'-n \\ \alpha'+\beta+\gamma', & \alpha'+\beta'+\gamma', & n+\alpha'+1 \end{pmatrix},$$

$$B = \frac{fac(-\alpha'-\beta)fac(-\alpha'-\beta')}{fac(\gamma-1)fac(\alpha+\beta+\gamma'-1)fac(\alpha+\beta'+\gamma'-1)},$$

$$B' = \frac{fac(-\alpha-\beta)fac(-\alpha-\beta')}{fac(\gamma-1)fac(\alpha'+\beta+\gamma'-1)fac(\alpha'+\beta'+\gamma'-1)},$$

$$(\overset{+}{\beta},\ \overset{+}{\alpha})B = \frac{E\sin(\alpha+\beta)\pi\sin(\alpha+\beta'+\gamma')\pi}{\sin(\alpha'-\alpha)\pi},$$

$$(\overset{+}{\beta},\ \overset{+}{\alpha'})B' = \frac{E\sin(\alpha'+\beta)\pi\sin(\alpha'+\beta'+\gamma')\pi}{\sin(\alpha-\alpha')\pi},$$

$$E = -fac(-\gamma):\sin\gamma'\pi fac(-\alpha-\beta'-\gamma)fac(-\alpha'-\beta'-\gamma)$$

ist. Setzen wir nun $\alpha+\varepsilon$ für α, $\alpha-\varepsilon$ für α', und schreiben, um den Grenzübergang $\varepsilon = 0$ auszuführen,

$$W_+^\beta = ((\overset{+}{\beta},\ \overset{+}{\alpha})B + (\overset{+}{\beta},\ \overset{+}{\alpha'})B')\mathfrak{F}^{\alpha,\varepsilon} + (\overset{+}{\beta},\ \overset{+}{\alpha'})(\mathfrak{F}^{\alpha,-\varepsilon} - \mathfrak{F}^{\alpha,\varepsilon}),$$

wo zur Abkürzung

$$\mathfrak{F}^{\alpha,\pm\varepsilon} = \mathfrak{F}\begin{pmatrix} 0, & \mp 2\varepsilon, & -\alpha-\gamma'-n\mp\varepsilon \\ \alpha+\beta+\gamma'\pm\varepsilon, & \alpha+\beta'+\gamma'\pm\varepsilon, & n+\alpha+1\pm\varepsilon \end{pmatrix}$$

gesetzt ist, und beachten, dass

$$\sin(\alpha+\beta)\pi\sin(\alpha+\beta'+\gamma')\pi - \sin(\alpha'+\beta)\pi\sin(\alpha'+\beta'+\gamma')\pi = \sin\gamma\pi\sin(\alpha-\alpha')\pi$$

ist, so folgt hieraus

(115.)
$$\begin{cases} W_+^\beta = E\sin\gamma\pi\mathfrak{F}\begin{pmatrix} 0, & 0, & -\alpha-\gamma'-n \\ \alpha+\beta+\gamma', & \alpha+\beta'+\gamma', & n+\alpha+1 \end{pmatrix} \\ \qquad -E\sin(\alpha+\beta)\pi\sin(\alpha+\beta'+\gamma')\pi\mathfrak{F}\begin{pmatrix} 0_+, & 0_+, & -\alpha-\gamma'-n_+ \\ \alpha+\beta+\gamma'_-, & \alpha+\beta'+\gamma'_-, & n+\alpha+1_- \end{pmatrix}, \end{cases}$$

$$E = -fac(-\gamma):\sin\gamma'\pi fac(-\alpha-\beta'-\gamma)fac(-\alpha-\beta'-\gamma).$$

Art. 17. Darstellung der Zweige W_-^β, W_+^β durch die Zweige W_-^α, $W_-^{\alpha'=\alpha-\nu}$.

Um die Zweige W_-^β, W_+^β durch den Zweig W_-^α und den Ersatzzweig $W_-^{\alpha'=\alpha-\nu}$ auszudrücken, haben wir von den Formeln

$$W_-^\beta = (\bar\beta,\ \bar\alpha)\,W_-^\alpha + (\bar\beta,\ \bar\alpha')\,W_-^{\alpha'}, \quad W_+^\beta = (\overset{+}{\beta},\ \bar\alpha)\,W_-^\alpha + (\overset{+}{\beta},\ \bar\alpha')\,W_-^{\alpha'}$$

auszugehen. Im ersten Falle wählen wir zur Darstellung der Zweige W_-^α, $W_-^{\alpha'}$ die erste der unter (31.) stehenden Formen dieser Gebilde und schreiben

$$W_-^\alpha = A\mathfrak{F}\begin{pmatrix} 0, & \alpha'-\alpha, & -\alpha-\beta \\ \alpha+\beta+\gamma, & \alpha+\beta+\gamma', & \alpha+n+1 \end{pmatrix} = A\mathfrak{F}^{-\alpha},$$

$$W_-^{\alpha'} = A'\mathfrak{F}\begin{pmatrix} 0, & \alpha-\alpha', & -\alpha'-\beta \\ \alpha'+\beta+\gamma, & \alpha'+\beta+\gamma', & \alpha'+n+1 \end{pmatrix} = A'\mathfrak{F}^{-\alpha'},$$

$$A = \frac{fac(-\gamma)fac(-\gamma')fac(\beta-n-1)\sin(n+\alpha+1)\pi}{\pi fac(-\alpha'-\beta'-\gamma')fac(-\alpha'-\beta'-\gamma)},$$

$$A' = \frac{fac(-\gamma)fac(-\gamma')fac(\beta-n-1)\sin(n+\alpha'+1)\pi}{\pi fac(-\alpha-\beta'-\gamma')fac(-\alpha-\beta'-\gamma)}.$$

Es sind also hier A, A' so wie das noch einzuführende D andere Abkürzungen, als im vorigen Artikel. Weiter ist

$$(\bar\beta,\ \bar\alpha)A = \frac{D\sin(n+\alpha+1)\pi}{\pi\sin(\alpha+\beta')\pi\sin(\alpha-\alpha')\pi}, \quad (\bar\beta,\ \bar\alpha')A' = \frac{D\sin(n+\alpha'+1)\pi}{\pi\sin(\alpha'+\beta')\pi\sin(\alpha'-\alpha)\pi},$$

$$D = \frac{fac(-\gamma)fac(-\gamma')fac(\beta-n-1) : fac(\alpha+\beta'-1)fac(\alpha'+\beta'-1)}{fac(-\alpha-\beta'-\gamma)fac(-\alpha'-\beta'-\gamma)fac(-\alpha-\beta'-\gamma')fac(-\alpha'-\beta'-\gamma')}.$$

Der Zweigdarstellung $W_-^{\alpha'}$ geben wir die Form

$$W_-^{\alpha'} = A'\mathfrak{S}\frac{fac(\alpha'+\beta+\gamma+m-1)fac(\alpha'+\beta+\gamma'+m-1)fac(\alpha'+n+m)}{facmfac(m+\alpha'-\alpha)fac(m+\alpha'+\beta)}$$

$$= \frac{A'\sin(\alpha-\alpha')\pi}{\pi}\sum_{m=0}^{m=\nu-1} H_m + A'\mathfrak{F}\begin{pmatrix} -\nu, & \alpha-\alpha'-\nu, & -\alpha'-\beta-\nu \\ \alpha'+\beta+\gamma+\nu, & \alpha'+\beta+\gamma'+\nu, & \alpha+n+\nu+1 \end{pmatrix},$$

worin H_m die Abkürzung bedeutet:

$$H_m = \frac{fac(\alpha'+\beta+\gamma+m-1)fac(\alpha'+\beta+\gamma'+m-1)fac(\alpha'+n+m)}{(-1)^m facmfac(m+\alpha'+\beta) : fac(\alpha-\alpha'-m-1)}.$$

Die Gleichung $W_-^\beta = (\bar\beta,\ \bar\alpha)\,W_-^\alpha + (\bar\beta,\ \bar\alpha')\,W_-^{\alpha'}$ schreiben wir zunächst in der Form

$$W_-^\beta = ((\bar\beta,\ \bar\alpha)A + (\bar\beta,\ \bar\alpha')A')\mathfrak{F}^{-\alpha} + \frac{(\bar\beta,\ \bar\alpha')A'\sin(\alpha-\alpha')\pi}{\pi}\sum_{m=0}^{m=\nu-1} H_m$$

$$+ (\bar\beta,\ \bar\alpha')A'\left(\mathfrak{F}\begin{pmatrix} -\nu, & \alpha-\alpha'-\nu, & -\alpha'-\beta-\nu \\ \alpha'+\beta+\gamma+\nu, & \alpha+\beta+\gamma'+\nu, & \alpha+n+\nu+1 \end{pmatrix} - \mathfrak{F}^{-\alpha}\right),$$

sodann ersetzen wir α durch $\alpha+\varepsilon$, α' durch $\alpha-\nu-\varepsilon$, und gehen mit ε zur

Grenze Null über, so erhalten wir die Beziehung

$$(116.)\quad \begin{cases} W_{-}^{\beta} = \dfrac{D\sin(n-\beta')\pi}{\pi}\,\mathfrak{F}\begin{pmatrix} 0, & -\nu, & -\alpha-\beta \\ \alpha+\beta+\gamma, & \alpha+\beta+\gamma', & \alpha+n+1 \end{pmatrix} \\ +\dfrac{D\sin(n+\alpha+1)\pi}{\sin(\alpha+\beta')\pi}\left\{\sum_{m=0}^{m=\nu-1} -H_m+(-1)^{\nu}\,\mathfrak{F}\begin{pmatrix} 0_+, & -\nu_+, & -\alpha-\beta'+\nu_+ \\ \alpha+\beta+\gamma_-, & \alpha+\beta+\gamma'_-, & \alpha+n+1_- \end{pmatrix}\right\}, \end{cases}$$

worin

$$D = \frac{fac(-\gamma)fac(-\gamma')fac(\beta-n-1) : fac(\alpha+\beta'-1)fac(\alpha+\beta'-\nu-1)}{fac(-\alpha-\beta'-\gamma)fac(\nu-\alpha-\beta'-\gamma)fac(-\alpha-\beta'-\gamma')\,fac(\nu-\alpha-\beta'-\gamma')},$$

$$H_m = \frac{fac(\alpha+\beta+\gamma+m-\nu-1)fac(\alpha+\beta+\gamma'+m-\nu-1)fac(\alpha+m+n-\nu)}{(-1)^m fac\,m\,fac(m+\alpha+\beta-\nu) : fac(\nu-m-1)}$$

ist. — Der zur Darstellung von W_{+}^{β} durch W_{-}^{α}, $W_{-}^{\alpha'=\alpha}$ nöthige Coefficient $(\overset{+}{\beta}, \overset{-}{\alpha})$ findet sich in den früheren Artikeln nicht unmittelbar vor; man gelangt zu demselben durch folgende Betrachtung. Ersetzt man die Buchstaben

$$\alpha, \quad \alpha', \quad \beta, \quad \beta', \quad \gamma, \quad \gamma', \quad n$$

durch

$$-\beta', \quad -\beta, \quad -\alpha', \quad -\alpha, \quad 1-\gamma, \quad 1-\gamma', \quad n,$$

so verwandelt sich

$$W_{+}^{\alpha} \text{ in } W_{+}^{\beta} : \frac{C\sin(n-\beta)\pi\sin(n-\beta')\pi}{\sin(n+\alpha)\pi\sin(n+\alpha')\pi\,fac(\alpha+\beta)fac(\alpha'+\beta)},$$

$$W_{-}^{\beta} \text{ in } W_{+}^{\alpha} fac(\alpha+\beta)fac(\alpha+\beta') : C, \quad W_{-}^{\beta'} \text{ in } W_{-}^{\alpha'} fac(\alpha'+\beta)fac(\alpha'+\beta') : C,$$

wo

$$C = \frac{fac(-\gamma)fac(-\gamma')fac(\beta-n-1)fac(\beta'-n-1)}{fac(-\alpha-n-1)fac(-\alpha'-n-1)}$$

ist. Nimmt man diese Buchstabenvertauschung in der Gleichung (vgl. (56.))

$$W_{+}^{\alpha} = (\overset{+}{\alpha}, \overset{-}{\beta})W_{-}^{\beta} + (\overset{+}{\alpha}, \overset{-}{\beta'})W_{-}^{\beta'}$$

vor, so findet man

$$(117.)\quad (\overset{+}{\beta}, \overset{-}{\alpha}) = \frac{\pi\,\mathrm{cosec}(\alpha'-\alpha)\pi\sin(n-\beta)\pi}{fac(-\alpha-\beta'-\gamma')fac(-\alpha-\beta'-\gamma)\sin(n+\alpha+1)\pi}.$$

Nun setzen wir

$$W_{+}^{\beta} = (\overset{+}{\beta}, \overset{-}{\alpha})A\mathfrak{F}^{-\alpha} + (\overset{+}{\beta}, \overset{-}{\alpha'})A'\mathfrak{F}^{-\alpha'},$$

$$(\overset{+}{\beta}, \overset{-}{\alpha})A = G : \sin(\alpha'-\alpha)\pi, \quad (\overset{+}{\beta}, \overset{-}{\alpha'})A' = G : \sin(\alpha-\alpha')\pi,$$

$$G = \frac{-\pi\,fac(-\gamma)fac(-\gamma')fac(n-\beta)}{fac(-\alpha-\beta'-\gamma)fac(-\alpha'-\beta'-\gamma)fac(-\alpha-\beta'-\gamma')fac(-\alpha'-\beta'-\gamma')}.$$

Da $(\overset{+}{\beta}, \overset{-}{\alpha})A+(\overset{+}{\beta}, \overset{-}{\alpha'})A'$ verschwindet, so ist

$$W_+^\beta = (\overset{-}{\beta}, \overset{-}{\alpha'})A'(\mathfrak{F}^{-\alpha'}-\mathfrak{F}^{-\alpha}).$$

Setzen wir $\alpha-\nu-\varepsilon$ für α', $\alpha+\varepsilon$ für α und gehen mit ε zur Grenze Null über, so erhalten wir die Gleichung

$$(118.)\quad \begin{cases} W_+^\beta = \dfrac{G}{\pi}\sum_{m=0}^{m=\nu-1} H_m+(-1)^\nu \dfrac{G}{\pi}\mathfrak{F}\begin{pmatrix} 0_+, & -\nu_+, & -\alpha-\beta_+ \\ \alpha+\beta+\gamma_-, & \alpha+\beta+\gamma'_-, & \alpha+n+1_+ \end{pmatrix}, \\ G = \dfrac{-\pi\, fac(-\gamma)fac(-\gamma') : fac(n-\beta)}{fac(-\alpha-\beta'-\gamma')fac(-\alpha'-\beta'-\gamma')fac(-\alpha-\beta'-\gamma)fac(-\alpha'-\beta'-\gamma)}. \end{cases}$$

Art. 18. Der Fall $\alpha+\beta=\nu$.

Nachdem Ersatzzweige gefunden sind, falls $\alpha-\alpha'$ eine ganze Zahl ist, könnte man dazu schreiten, eben solche aufzustellen, falls $\beta-\beta'$ eine ganze Zahl ist. Die Formel ((16.) Art. 1)

$$W\begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma, & n \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \end{pmatrix} = W\begin{pmatrix} \beta, & \alpha, & \gamma, & -n-1 \\ \beta', & \alpha', & \gamma', & \end{pmatrix}$$

lässt jedoch erkennen, dass die Untersuchung dieses Falles von dem bereits behandelten nicht wesentlich verschieden ist, dass sie vielmehr auf eine blosse Buchstabenvertauschung hinauslaufen würde, weshalb vom Eingehen auf diesen Fall abgesehen werden darf.

Sodann kann der Fall untersucht werden, in welchem eine der Zahlen $\alpha+\beta$, $\alpha+\beta'$, $\alpha'+\beta$, $\alpha'+\beta'$ ganz ist. Auch dieser lässt sich mittels der Formel (15.) des Art. 1 auf den schon behandelten zurückführen, jedoch auf weniger einfache Weise. Deshalb sollen Ergänzungszweige der Function W aufgestellt werden, wenn $\alpha+\beta=\nu$ ist. In diesem Falle sind die Zweige

$$W_-^{\beta'} = F\begin{pmatrix} 0, & \alpha+\beta, & \alpha'+\beta \\ \gamma, & \gamma', & n-\beta+1 \end{pmatrix}, \quad W_+^{\alpha'} = F\begin{pmatrix} 0, & \alpha+\beta, & \alpha+\beta' \\ \gamma, & \gamma', & -\alpha-n \end{pmatrix}$$

bez. von den Zweigen W_-^α, W_+^β nur durch einen constanten Factor verschieden. Sie sind sogar zunächst illusorisch, indessen kann man ihnen solche Factoren geben, dass sie brauchbar bleiben, aber sie sind dann eben von den angegebenen Zweigen nicht linear unabhängig, und es muss nach ergänzenden Darstellungen gesucht werden. — Um zu möglichst einfachen Resultaten zu gelangen, setzen wir

$$\mathfrak{W}_-^\alpha = W_-^\alpha \frac{fac(\alpha+\beta+\gamma-1)fac(\alpha+\beta+\gamma'-1)\sin(n-\beta)\pi}{fac(-\gamma)fac(-\gamma')\sin(n+\alpha)\pi}$$

$$= \frac{1}{fac(n-\beta)}\mathfrak{F}\begin{pmatrix} 0, & -\alpha-\beta, & \alpha'-\alpha \\ a+\beta+\gamma, & \alpha+\beta+\gamma', & \alpha+n+1 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{W}_-^{\beta'} = W_-^{\beta'} \frac{fac(\gamma-1)fac(\gamma'-1)}{fac(-\alpha-\beta)fac(-\alpha-\beta')} = \frac{1}{fac(n-\beta)}\mathfrak{F}\begin{pmatrix} 0, & \alpha+\beta, & \alpha'+\beta \\ \gamma, & \gamma', & n-\beta+1 \end{pmatrix}.$$

$\mathfrak{W}_-^{\alpha}$, $\mathfrak{W}_-^{\beta'}$ sind dann ebenfalls Lösungen der Recursionsformel (19.), und es muss für die zweite, wenn $\alpha+\beta=\nu$ ist, eine Ergänzungslösung gefunden werden. Als eine solche ergiebt sich, wenn α durch $\alpha+\varepsilon$, α' durch $\alpha'-\varepsilon$, β durch $-\alpha+\nu$ ersetzt wird, der Grenzwerth

$$\lim_{\varepsilon=0}\frac{1}{\varepsilon}(\mathfrak{W}_-^{\beta'}-\mathfrak{W}_-^{\alpha}).$$

Wir schreiben zunächst

$$\mathfrak{W}_-^{\beta'} = \mathfrak{S}\frac{fac(\gamma+m-1)fac(\gamma'+m-1)fac(n+m-\beta)}{facmfac(m-\alpha-\beta)fac(m-\alpha'-\beta)fac(n-\beta)}$$

$$= \sum_{m=0}^{m=\nu-1}\frac{fac(\gamma+m-1)fac(\gamma'+m-1)fac(n+m-\beta)fac(\alpha+\beta-m-1)}{fac(n-\beta)facmfac(m-\alpha'-\beta)(-1)^m\operatorname{cosec}(\alpha+\beta)\pi}$$

$$+\frac{1}{fac(n-\beta)}\mathfrak{F}\left(\begin{matrix}-\nu, & \alpha+\beta-\nu, & \alpha'+\beta-\nu\\ \gamma+\nu, & \gamma'+\nu, & n+\nu-\beta+1\end{matrix}\right)$$

und setzen dann für α, α', β bez. $\alpha+\varepsilon$, $\alpha'-\varepsilon$, $\nu-\alpha$, so erhalten wir als Ergänzungslösung für $W_-^{\beta'}$ den Ausdruck

$$(119.)\quad \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{\varepsilon=0}\frac{1}{\varepsilon}(\mathfrak{W}_-^{\beta'}-\mathfrak{W}_-^{\alpha}) \\ = \sum\limits_{m=0}^{m=\nu-1}\frac{fac(\gamma+m-1)fac(\gamma'+m-1)fac(n+m+\alpha-\nu)fac(\nu-m-1)}{(-1)^{m+\nu}fac(n+\alpha-\nu)facmfac(m+\alpha-\alpha'-\nu)} \\ \quad +\frac{1}{fac(n+\nu-\alpha)}\mathfrak{F}\left(\begin{matrix}0_+, & -\nu_+, & \alpha'-\alpha_+\\ \gamma+\nu_-, & \gamma'+\nu_-, & \alpha+n+1_-\end{matrix}\right). \end{array}\right.$$

Ferner sei

$$\mathfrak{W}_+^{\alpha'} = \frac{1}{fac(-\alpha-n-1)}\mathfrak{F}\left(\begin{matrix}0, & \alpha+\beta, & \alpha+\beta'\\ \gamma, & \gamma', & -\alpha-n\end{matrix}\right)$$

$$= \sum_{m=0}^{m=\nu-1}\frac{fac(\gamma+m-1)fac(\gamma'+m-1)fac(m-\alpha-n-1)fac(\alpha+\beta-m-1)}{(-1)^m fac(-\alpha-n-1)facmfac(m-\alpha-\beta')\pi\operatorname{cosec}(\alpha+\beta)\pi}$$

$$+\frac{1}{fac(-\alpha-n-1)}\mathfrak{F}\left(\begin{matrix}-\nu, & \alpha+\beta-\nu, & \alpha+\beta'-\nu\\ \gamma+\nu, & \gamma'+\nu, & \nu-\alpha-n\end{matrix}\right),$$

$$\mathfrak{W}_+^{\beta} = \frac{1}{fac(-\alpha-n-1)}\mathfrak{F}\left(\begin{matrix}0, & \beta'-\beta, & -\alpha-\beta\\ \alpha+\beta+\gamma, & \alpha+\beta+\gamma', & \beta-n\end{matrix}\right).$$

Setzen wir wieder $\alpha+\varepsilon$, $\alpha'-\varepsilon$ $\nu-\alpha$ bez. für α, α', β, so erhalten wir durch Grenzübergang $\varepsilon=0$ für den Zweig $W_+^{\alpha'}$ als Ersatzzweig den Ausdruck

$$(120.)\quad \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{\varepsilon=0}\frac{1}{\varepsilon}(\mathfrak{W}_+^{\alpha'}-\mathfrak{W}_+^{\beta}) \\ = \sum\limits_{m=0}^{m=\nu-1}\frac{fac(\gamma+m-1)fac(\gamma'+m-1)fac(m-\alpha-n-1)fac(\nu-m-1)}{(-1)^{m+\nu}fac(-\alpha-n-1)facmfac(m-\alpha-\beta')} \\ \quad +\frac{1}{fac(-\alpha-n-1)}\mathfrak{F}\left(\begin{matrix}0_+, & -\nu_+, & \alpha+\beta'-\nu_+\\ \gamma+\nu_-, & \gamma'+\nu_-, & \nu-\alpha-n_-\end{matrix}\right). \end{array}\right.$$

Die Behandlung der Fälle, in denen $\alpha+\beta'$, $\alpha'+\beta$, $\alpha'+\beta'$ gleich ν ist, erfordert nur Buchstabenvertauschungen.

Art. 19. Der Fall $\gamma-\gamma'=0$.

Die Zweige W_+^γ, $W_+^{\gamma'}$; W_-^γ, $W_-^{\gamma'}$ unterscheiden sich von den α- und β-Zweigen hinsichtlich der Art ihrer Definition, welche auf das Verhalten dieser Zweige im Unendlichen gegründet ist, während bei der Definition der α- und β-Zweige ihr Verschwinden, oder ihr Unendlichwerden in Punktfolgen massgebend war. Deshalb sollen diese Zweige ausführlicher behandelt werden. Ist $\gamma-\gamma'=\nu$, so müssen für $W_+^{\gamma'}$, $W_-^{\gamma'}$, welche Zweige sich in diesem Falle bezüglich von W_+^γ, W_-^γ nur durch periodische Factoren unterscheiden, Ergänzungszweige aufgefunden werden. Bei Aufstellung der je zehn Formen dieser Ergänzungszweige beschränken wir uns aber wieder auf den Fall $\nu=0$, um nicht zu viel Raum in Anspruch zu nehmen. Es werde

$$(121.)\qquad W_+^{\gamma'=\gamma-\nu} = \lim_{\varepsilon=0} \frac{1}{2\varepsilon}\left(W_+^{\gamma'=\gamma-\nu-\varepsilon} - W_+^{\gamma=\gamma+\varepsilon}\right)$$

gesetzt, so dass $W_+^{\gamma'=\gamma-\nu}$ die eine Ergänzungslösung bedeutet. Ferner sei

$$W_+^\gamma = C\mathfrak{F}\begin{pmatrix} 0, & \gamma'-\gamma, & -\alpha-\gamma-n \\ \alpha+\beta+\gamma, & \alpha+\beta'+\gamma, & \gamma \end{pmatrix} = C\mathfrak{F}^\gamma,$$

$$W_+^{\gamma'} = C'\mathfrak{F}\begin{pmatrix} 0, & \gamma-\gamma', & -\alpha-\gamma'-n \\ \alpha+\beta+\gamma', & \alpha+\beta'+\gamma', & \gamma' \end{pmatrix} = C'\mathfrak{F}^{\gamma'},$$

$$C = \frac{fac(\gamma-\gamma')fac(n+\alpha)}{fac(\gamma-1)fac(-\alpha'-\beta'-\gamma')fac(-\alpha'-\beta-\gamma')},$$

$$C' = \frac{fac(\gamma'-\gamma)fac(n+\alpha)}{fac(\gamma'-1)fac(-\alpha'-\beta'-\gamma)fac(-\alpha'-\beta-\gamma)},$$

$$W_+^{\gamma'}-W_+^\gamma = (C'-C)\mathfrak{F}^{\gamma'}+C(\mathfrak{F}^{\gamma'}-\mathfrak{F}^\gamma).$$

Wenn man γ durch $\gamma+\varepsilon$, γ' durch $\gamma'-\varepsilon$ ersetzt, und mit 2ε dividirt, und mit ε zur Grenze Null übergeht, so gewinnt man die Ergänzungslösung

$$W_+^{\gamma'=\gamma} = \frac{fac(n+\alpha):fac(\gamma-1)}{fac(\alpha+\beta+\gamma-1)fac(\alpha+\beta'+\gamma-1)}\mathfrak{F}\begin{pmatrix} 0_+, & 0_+, & -\alpha-\gamma-n_+ \\ \alpha+\beta+\gamma_-, & \alpha+\beta'+\gamma_-, & \gamma_- \end{pmatrix}$$

$$+\mathfrak{F}^\gamma\left\{\begin{matrix}\Psi(\alpha+\beta+\gamma-1)+\Psi(\alpha+\beta'+\gamma-1)\\ +\Psi(\gamma-1)-2\Psi(0)\end{matrix}\right\}\frac{fac(n+\alpha):fac(\gamma-1)}{fac(\alpha+\beta+\gamma-1)fac(\alpha+\beta'+\gamma-1)}.$$

Nach dieser Methode erhält man aus (34.) zehn Formen für das Ergänzungsintegral, die einander analytisch gleich sind. Wir schreiben sie in der Reihenfolge hin, welche der unter (34.) entspricht.

(122.)
$$
\begin{cases}
W_+^{\gamma'=\gamma} = (\Psi(\gamma-1)+\Psi(\alpha+\beta+\gamma-1)+\Psi(\alpha+\beta'+\gamma-1)-2\Psi(0))W_+^{\gamma} \\
\quad + \dfrac{fac(n+\alpha)}{fac(\alpha+\gamma+n)} F\left(\begin{matrix} 0_+, & 0_+, & -\alpha-\gamma-n_+ \\ \alpha+\beta+\gamma_-, & \alpha+\beta'+\gamma_-, & \gamma_- \end{matrix}\right) \\
= (\Psi(\gamma-1)+\Psi(\alpha'+\beta+\gamma-1)+\Psi(\alpha'+\beta'+\gamma-1)-2\Psi(0))W_+^{\gamma} \\
\quad + \dfrac{fac(n+\alpha')}{fac(\alpha'+\gamma+n)} F\left(\begin{matrix} 0_+, & 0_+, & -\alpha'-\gamma-n_+ \\ \alpha'+\beta+\gamma_-, & \alpha'+\beta'+\gamma_-, & \gamma_- \end{matrix}\right) \\
= (\Psi(-\gamma)+\Psi(\alpha+\beta+\gamma-1)+\Psi(\alpha'+\beta+\gamma-1)-2\Psi(0))W_+^{\gamma} \\
\quad + \dfrac{fac(n+\alpha)fac(n+\alpha')}{fac(n-\beta)fac(n+1-\beta'-\gamma)} F\left(\begin{matrix} 0_+, & 0_+, & \beta'+\gamma-n-1_+ \\ \alpha+\beta+\gamma_-, & \alpha'+\beta+\gamma_-, & 1-\gamma_- \end{matrix}\right) \\
= (\Psi(-\gamma)+\Psi(\alpha+\beta'+\gamma-1)+\Psi(\alpha'+\beta'+\gamma-1)-2\Psi(0))W_+^{\gamma} \\
\quad + \dfrac{fac(n+\alpha)fac(n+\alpha')}{fac(n-\beta')fac(n+1-\beta-\gamma)} F\left(\begin{matrix} 0_+, & 0_+, & \beta+\gamma-n-1_+ \\ \alpha+\beta'+\gamma_-, & \alpha'+\beta'+\gamma_-, & 1-\gamma_- \end{matrix}\right) \\
= (\Psi(-\alpha-\beta-\gamma)+\Psi(-\alpha'-\beta'-\gamma)-2\Psi(0))W_+^{\gamma} \\
\quad + \dfrac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)\pi fac(n+\alpha')}{\pi fac(n-\beta')} \mathfrak{F}\left(\begin{matrix} 0, & \beta'+\gamma-n-1_+, & -\alpha-\gamma-n_+ \\ \alpha+\beta+\gamma_-, & n-\beta'+1, & \alpha+n+1 \end{matrix}\right) \\
= (\Psi(-\alpha'-\beta-\gamma)+\Psi(-\alpha-\beta'-\gamma)-2\Psi(0))W_+^{\gamma} \\
\quad + \dfrac{\sin(\alpha'+\beta+\gamma)\pi fac(n+\alpha)}{\pi fac(n-\beta')} \mathfrak{F}\left(\begin{matrix} 0, & \beta'+\gamma-n-1_+, & -\alpha'-\gamma-n_+ \\ \alpha'+\beta+\gamma_-, & n-\beta'+1, & \alpha'+n+1 \end{matrix}\right) \\
= (\Psi(-\alpha-\beta'-\gamma)+\Psi(\alpha+\beta'+\gamma-1)-2\Psi(0))W_+^{\gamma} \\
\quad + \dfrac{\sin(\alpha+\beta'+\gamma)\pi fac(n+\alpha')}{\pi fac(n-\beta)} \mathfrak{F}\left(\begin{matrix} 0, & \beta+\gamma-n-1_+, & -\alpha-\gamma-n_+ \\ \alpha+\beta'+\gamma_-, & n-\beta+1, & \alpha+n+1 \end{matrix}\right) \\
= (\Psi(-\alpha'-\beta'-\gamma)+\Psi(-\alpha-\beta-\gamma)-2\Psi(0))W_+^{\gamma} \\
\quad + \dfrac{\sin(\alpha'+\beta'+\gamma)\pi fac(n+\alpha)}{\pi fac(n-\beta)} \mathfrak{F}\left(\begin{matrix} 0, & \beta+\gamma-n-1_+, & -\alpha'-\gamma-n \\ \alpha'+\beta'+\gamma_-, & n-\beta+1, & \alpha'+n+1 \end{matrix}\right) \\
= (\Psi(-\gamma)+\Psi(\gamma-1)-2\Psi(0))W_+^{\gamma} \\
\quad + \dfrac{fac(n+\alpha)fac(n+\alpha'):fac(-\gamma)}{fac(\alpha+\gamma+n)fac(\alpha'+\gamma+n)} F\left(\begin{matrix} 0, & -\alpha-\gamma-n_+, & -\alpha'-\gamma-n_+ \\ \gamma_-, & n-\beta+1, & n-\beta'+1 \end{matrix}\right) \\
= (\Psi(-\gamma)+\Psi(\gamma-1)-2\Psi(0))W_+^{\gamma} \\
\quad + \dfrac{\sin\gamma\pi}{\pi} \mathfrak{F}\left(\begin{matrix} 0, & \beta+\gamma-n-1_+, & \beta'+\gamma-n-1_+ \\ 1-\gamma_-, & \alpha+n+1, & \alpha'+n+1 \end{matrix}\right).
\end{cases}
$$

Als Ersatzzweig für $W_-^{\gamma'}$, wenn $\gamma'=\gamma$ ist, wählen wir den Ausdruck

$$W_-^{\gamma'=\gamma} = \lim_{\varepsilon=0} \frac{1}{2\varepsilon} (W_-^{\gamma'=\gamma-\varepsilon} - W_-^{\gamma=\gamma+\varepsilon})$$

und erhalten die zehn Darstellungen

(123.)
$$\left\{\begin{aligned}
W_-^{\gamma'=\gamma} &= \big(\Psi(\gamma-1)+\Psi(\alpha+\beta+\gamma-1)+\Psi(\alpha'+\beta+\gamma-1)-2\Psi(0)\big)W_-^{\gamma}\\
&\quad+\frac{fac(\beta-n-1)}{fac(\beta+\gamma-n-1)}F\left(\begin{matrix}0_+, & 0_+, & n+1-\beta-\gamma_+\\ \alpha+\beta+\gamma_-, & \alpha'+\beta+\gamma_-, & \gamma_-\end{matrix}\right)\\
&= \big(\Psi(\gamma-1)+\Psi(\alpha+\beta'+\gamma-1)+\Psi(\alpha'+\beta'+\gamma-1)-2\Psi(0)\big)W_-^{\gamma}\\
&\quad+\frac{fac(\beta'-n-1)}{fac(\beta'+\gamma-n-1}F\left(\begin{matrix}0_+, & 0_+, & n+1-\beta'-\gamma_+\\ \alpha+\beta'+\gamma_-, & \alpha'+\beta'+\gamma_-, & \gamma_-\end{matrix}\right)\\
&= \big(\Psi(-\gamma)+\Psi(\alpha+\beta+\gamma-1)+\Psi(\alpha+\beta'+\gamma-1)-2\Psi(0)\big)W_-^{\gamma}\\
&\quad+\frac{fac(\beta-n-1)fac(\beta'-n-1)}{fac(-n-\alpha-1)fac(-\alpha'-\gamma-n)}F\left(\begin{matrix}0_+, & 0_+, & n+\alpha'+\gamma_+\\ \alpha+\beta+\gamma_-, & \alpha+\beta'+\gamma_-, & 1-\gamma_-\end{matrix}\right)\\
&= \big(\Psi(-\gamma)+\Psi(\alpha'+\beta+\gamma-1)+\Psi(\alpha'+\beta'+\gamma-1)-2\Psi(0)\big)W_-^{\gamma}\\
&\quad+\frac{fac(\beta-n-1)fac(\beta'-n-1)}{fac(-n-\alpha'-1)fac(-\alpha-\gamma-n)}F\left(\begin{matrix}0_+, & 0_+, & n+\alpha+\gamma_+\\ \alpha'+\beta+\gamma_-, & \alpha'+\beta'+\gamma_-, & 1-\gamma_-\end{matrix}\right)\\
&= \big(\Psi(-\alpha-\beta-\gamma)+\Psi(-\alpha'-\beta'-\gamma')-2\Psi(0)\big)W_-^{\gamma}\\
&\quad+\frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)\pi fac(\beta'-n-1)}{\pi fac(-\alpha'-n-1)}\mathfrak{F}\left(\begin{matrix}0, & \alpha'+\gamma+n_+, & n+1-\beta-\gamma_+\\ \alpha+\beta+\gamma_-, & -\alpha'-n, & \beta-n\end{matrix}\right)\\
&= \big(\Psi(-\alpha-\beta'-\gamma)+\Psi(-\alpha'-\beta-\gamma')-2\Psi(0)\big)W_-^{\gamma}\\
&\quad+\frac{\sin(\alpha+\beta'+\gamma)\pi fac(\beta-n-1)}{\pi fac(-\alpha'-n-1)}\mathfrak{F}\left(\begin{matrix}0, & \alpha'+\gamma+n_+, & n+1-\beta'-\gamma_+\\ \alpha+\beta'+\gamma_-, & -\alpha'-n, & \beta'-n\end{matrix}\right)\\
&= \big(\Psi(-\alpha'-\beta-\gamma)+\Psi(-\alpha-\beta'-\gamma)-2\Psi(0)\big)W_-^{\gamma}\\
&\quad+\frac{\sin(\alpha'+\beta+\gamma)\pi fac(\beta'-n-1)}{\pi fac(-\alpha-n-1)}\mathfrak{F}\left(\begin{matrix}0, & \alpha+\gamma+n_+, & n+1-\beta-\gamma_+\\ \alpha'+\beta+\gamma_-, & -\alpha-n, & \beta-n\end{matrix}\right)\\
&= \big(\Psi(-\alpha'-\beta'-\gamma)+\Psi(-\alpha-\beta-\gamma)-2\Psi(0)\big)W_-^{\gamma}\\
&\quad+\frac{fac(\beta-n-1)\sin(\alpha'+\beta'+\gamma)\pi}{\pi fac(-\alpha-n-1)}\mathfrak{F}\left(\begin{matrix}0, & \alpha+\gamma+n_+, & n+1-\beta'-\gamma_+\\ \alpha'+\beta'+\gamma_-, & -\alpha-n, & \beta'-n\end{matrix}\right)\\
&= \big(\Psi(-\gamma)+\Psi(\gamma-1)-2\Psi(0)\big)W_-^{\gamma}\\
&\quad+\frac{fac(\beta-n-1)fac(\beta'-n-1)}{fac(-\gamma)fac(\beta+\gamma-n-1)fac(\beta'+\gamma-n-1)}F\left(\begin{matrix}0, & n+1-\beta-\gamma_+, & n+1-\beta'-\gamma_+\\ \gamma_-, & -\alpha-n, & -\alpha'-n\end{matrix}\right)\\
&= \big(\Psi(-\gamma)+\Psi(\gamma-1)-2\Psi(0)\big)W_-^{\gamma}\\
&\quad+\frac{\sin\gamma\pi}{\pi}\mathfrak{F}\left(\begin{matrix}0, & \alpha+\gamma+n_+, & \alpha'+\gamma+n_+\\ 1-\gamma_-, & \beta-n, & \beta'-n\end{matrix}\right).
\end{aligned}\right.$$

Art. 20. Darstellung der α- und β-Zweige durch die γ-Zweige, wenn $\gamma-\gamma'=\nu$ ist.

Was wird aus der Gleichung

$$W_+^{\alpha} = (\overset{+}{\alpha}, \overset{+}{\gamma})W_+^{\gamma}+(\overset{+}{\alpha}, \overset{+}{\gamma'})W_+^{\gamma'},$$

wenn $\gamma' = \gamma - \nu$ ist? Es sei

$$W_+^\gamma = CF_+^\gamma = C\mathfrak{F}\left(\begin{matrix} 0, & \gamma'-\gamma, & -\alpha-\gamma-n \\ \alpha+\beta+\gamma, & \alpha+\beta'+\gamma, & \gamma \end{matrix}\right),$$

$$W_+^{\gamma'} = C'\mathfrak{F}_+^{\gamma'} = C'\mathfrak{F}\left(\begin{matrix} 0, & \gamma-\gamma', & -\alpha-\gamma'-n \\ \alpha+\beta+\gamma', & \alpha+\beta'+\gamma', & \gamma' \end{matrix}\right),$$

$$C = \frac{fac(n+\alpha)fac(\gamma-\gamma')}{fac(-\alpha'-\beta'-\gamma')fac(-\alpha'-\beta-\gamma')fac(\gamma-1)},$$

$$C' = \frac{fac(n+\alpha')fac(\gamma'-\gamma)}{fac(-\alpha'-\beta'-\gamma)fac(-\alpha'-\beta-\gamma)fac(\gamma'-1)},$$

so folgt

$$\overset{+}{(\alpha}, \overset{+}{\gamma)}C = D\pi\operatorname{cosec}(\gamma'-\gamma)\pi, \quad \overset{+}{(\alpha}, \overset{+}{\gamma')}C' = D\pi\operatorname{cosec}(\gamma-\gamma')\pi,$$

$$D = \frac{fac(-\alpha'-\beta)fac(-\alpha'-\beta')fac(n+\alpha) : fac(\gamma-1)fac(\gamma'-1)}{fac(-\alpha'-\beta-\gamma)fac(-\alpha'-\beta-\gamma')fac(-\alpha'-\beta'-\gamma)fac(-\alpha'-\beta'-\gamma')}.$$

Da also $\overset{+}{(\alpha}, \overset{+}{\gamma')}C' = -\overset{+}{(\alpha}, \overset{+}{\gamma)}C$ ist, so gewinnt die Gleichung, um die es sich handelt, die Form

$$W_+^a = \overset{+}{(\alpha}, \overset{+}{\gamma')}\, C'(\mathfrak{F}_+^{\gamma'} - \mathfrak{F}_+^{\gamma}) = D\pi(\mathfrak{F}_+^{\gamma'} - \mathfrak{F}_+^{\gamma})\operatorname{cosec}(\gamma-\gamma')\pi.$$

Wird die Summe der ersten ν Glieder der Reihe

$$F\left(\begin{matrix} 0, & \gamma-\gamma', & -\alpha-\gamma'-n \\ \alpha+\beta+\gamma', & \alpha+\beta'+\gamma', & \gamma' \end{matrix}\right)$$

mit F_ν, die der entsprechenden $\mathfrak{F}$-Reihe mit $\mathfrak{F}_\nu$ bezeichnet, so ist

$$W_+^a = \frac{\overset{+}{(\alpha}, \overset{+}{\gamma')}F_\nu fac(n+\alpha)}{fac(\alpha+\gamma'+n)} + \frac{D\pi(\mathfrak{F}_+^{\gamma'} - \mathfrak{F}_\nu - \mathfrak{F}_+^{\gamma})}{\sin(\gamma-\gamma')\pi}.$$

Wird sodann γ' durch $\gamma-\nu-\varepsilon$, γ durch $\gamma+\varepsilon$ ersetzt, so ist

$$\mathfrak{F}_+^{\gamma'} - \mathfrak{F}_\nu = \mathfrak{F}\left(\begin{matrix} 2\varepsilon, & -\nu, & \varepsilon-n-\alpha-\gamma \\ \alpha+\beta+\gamma-\varepsilon, & \alpha+\beta'+\gamma-\varepsilon, & \gamma-\varepsilon \end{matrix}\right),$$

und es folgt durch Grenzübergang

(124.)
$$\begin{cases} W_+^a = \dfrac{fac(-\alpha'-\beta)fac(-\alpha'-\beta')fac(n+\alpha)fac(\nu-1)F_\nu}{fac(\nu-\alpha'-\beta-\gamma)fac(\nu-\alpha'-\beta'-\gamma)fac(\alpha+\gamma-\nu+n)fac(\gamma-1)} \\ \qquad +(-1)^\nu D\mathfrak{F}\left(\begin{matrix} 0_+, & -\nu_+, & -n-\alpha-\gamma_+ \\ \alpha+\beta+\gamma_-, & \alpha+\beta'+\gamma_-, & \gamma_- \end{matrix}\right), \end{cases}$$

$$F_\nu = \sum_{m=0}^{m=\nu-1} \frac{(\alpha+\beta+\gamma-\nu,\ m)(\alpha+\beta'+\gamma-\nu,\ m)(\gamma-\nu,\ m)}{(1,\ m)(\alpha+\gamma+n+1-\nu,\ m)(1-\nu,\ m)},$$

$$D = \frac{fac(-\alpha'-\beta)fac(-\alpha'-\beta')fac(n+\alpha) : fac(\gamma-1)fac(\gamma-\nu-1)}{fac(-\alpha'-\beta-\gamma)fac(\nu-\alpha'-\beta-\gamma)fac(-\alpha'-\beta'-\gamma)fac(\nu-\alpha'-\beta'-\gamma)}.$$

Weiter fragen wir, was wird aus der Gleichung

$$W_+^\beta = (\overset{+}{\beta},\ \overset{+}{\gamma})C\mathfrak{F}_+^\gamma + (\overset{+}{\beta},\ \overset{+}{\gamma'})C'\mathfrak{F}_+^{\gamma'} = ((\overset{+}{\beta},\ \overset{+}{\gamma})C + (\overset{+}{\beta},\ \overset{+}{\gamma'}))C'\mathfrak{F}_+^\gamma + (\overset{+}{\beta},\ \overset{+}{\gamma'})C'(\mathfrak{F}_+^{\gamma'} - \mathfrak{F}_+^\gamma),$$

wenn $\gamma' = \gamma - \nu$ wird. Es ist

$$(\overset{+}{\beta},\ \overset{+}{\gamma})C = \frac{D'\sin\gamma\pi\sin(\alpha+\beta'+\gamma)\pi}{\pi\sin(\gamma'-\gamma)\pi}, \quad (\overset{+}{\beta},\ \overset{+}{\gamma'})C' = \frac{D'\sin\gamma'\pi\sin(\alpha+\beta'+\gamma')\pi}{\pi\sin(\gamma-\gamma')\pi},$$

$$D' = fac(-\gamma)fac(-\gamma')fac(n+\alpha) : fac(-\alpha'-\beta'-\gamma)fac(-\alpha'-\beta'-\gamma').$$

Für $\gamma' = \gamma - \nu - \varepsilon$, $\gamma = \gamma + \varepsilon$ fliesst hieraus, wenn mit ε zur Grenze Null übergegangen wird,

$$(125.)\quad \begin{cases} W_+^\beta = -\dfrac{D'\sin(\alpha'+\beta)\pi}{\pi}\mathfrak{F}\left(\begin{matrix}0, & -\nu, & -\alpha-\gamma-n\\ \alpha+\beta+\gamma, & \alpha+\beta'+\gamma, & \gamma\end{matrix}\right) \\ \qquad + \dfrac{fac(-\gamma)fac(\nu-1)fac(n+\alpha)F_\nu}{fac(\nu-\alpha-\beta-\gamma)fac(\nu-\alpha'-\beta'-\gamma)fac(\alpha+\gamma+n-\nu)} \\ \qquad + \dfrac{D'\sin\gamma\pi\sin(\alpha+\beta'+\gamma)\pi}{(-1)^\nu\pi^2}\mathfrak{F}\left(\begin{matrix}0_+, & -\nu_+, & -n-\alpha-\gamma_+\\ \alpha+\beta+\gamma_-, & \alpha+\beta'+\gamma_-, & \gamma_-\end{matrix}\right), \end{cases}$$

$$D' = fac(-\gamma)fac(\nu-\gamma)fac(n+\alpha) : fac(-\alpha'-\beta'-\gamma)fac(\nu-\alpha'-\beta'-\gamma).$$

Ersetzt man

$$\alpha,\quad \alpha',\quad \beta,\quad \beta',\quad \gamma,\quad \gamma',\quad n$$

bez. durch

$$\beta,\quad \beta',\quad \alpha,\quad \alpha',\quad \gamma,\quad \gamma',\quad -n-1,$$

so folgen aus (124.) und (125.) die beiden Gleichungen

$$(126.)\quad \begin{cases} W_-^\beta = \dfrac{fac(-\alpha-\beta')fac(-\alpha'-\beta')fac(\beta-n-1)fac(\nu-1)G_\nu}{fac(-\alpha-\beta'-\gamma)fac(\nu-\alpha'-\beta'-\gamma)fac(\gamma-1)fac(\beta+\gamma-\nu-n-1)} \\ \qquad + E\mathfrak{F}\left(\begin{matrix}0_+, & -\nu_+, & n+1-\beta-\gamma_+\\ \alpha+\beta+\gamma_-, & \alpha'+\beta+\gamma_-, & \gamma_-\end{matrix}\right), \end{cases}$$

$$G_\nu = \sum_{m=0}^{m=\nu-1} \frac{(\alpha+\beta+\gamma-\nu,\ m)(\alpha'+\beta+\gamma-\nu,\ m)(\gamma-\nu,\ m)}{(1,\ m)(1-\nu,\ m)(\beta+\gamma-n-\nu,\ m)},$$

$$E = \frac{(-1)^\nu fac(-\alpha-\beta')fac(-\alpha'-\beta')fac(\beta-n-1) : fac(\gamma-1)fac(\gamma-\nu-1)}{fac(-\alpha-\beta'-\gamma)fac(\nu-\alpha-\beta'-\gamma)fac(-\alpha'-\beta'-\gamma)fac(\nu-\alpha'-\beta'-\gamma)},$$

$$(127.)\quad \begin{cases} W_-^\alpha = -\dfrac{E'\sin(\alpha+\beta')\pi}{\pi}\mathfrak{F}\left(\begin{matrix}0, & -\nu, & n+1-\beta-\gamma\\ \alpha+\beta+\gamma, & \alpha'+\beta+\gamma, & \gamma\end{matrix}\right) \\ \qquad + \dfrac{fac(-\gamma)fac(\nu-1)fac(\beta-n-1)G_\nu}{fac(\nu-\alpha-\beta-\gamma)fac(\nu-\alpha'-\beta'-\gamma)} \\ \qquad + \dfrac{E'\sin\gamma\pi\sin(\alpha'+\beta+\gamma)\pi}{(-1)^\nu\pi^2}\mathfrak{F}\left(\begin{matrix}0_+, & -\nu_+, & n+1-\beta-\gamma_+\\ \alpha+\beta+\gamma_-, & \alpha'+\beta+\gamma_-, & \gamma_-\end{matrix}\right), \end{cases}$$

$$E' = fac(-\gamma)fac(\nu-\gamma)fac(\beta-n-1) : fac(-\alpha'-\beta'-\gamma)fac(\nu-\alpha'-\beta'-\gamma).$$

Art. 21. Grenzübergänge.

Setzt man $x\omega$ für n, $w(x)$ für $W(x\omega)$,

$$\Delta W(n) = w\left(x+\frac{1}{\omega}\right)-w(x) = \Delta w(x), \quad \lim_{\omega=\infty} \omega \Delta w(x) = w'(x),$$

und ersetzt β durch $\beta+\omega$, α' durch $\alpha'-\omega$, so giebt die Differenzengleichung (20.) des Art. 2

$$\frac{x\omega+2-\beta-\omega}{\omega}\,\frac{x\omega+2-\beta'}{\omega}\,\omega^2\Delta^2 w(x)+\gamma\gamma' w(x)$$
$$+\frac{x\omega(1+\gamma+\gamma')+\gamma\gamma'+(2-\beta-\omega)(2-\beta')-(\alpha+1)(\alpha'+1-\omega)}{\omega}\,\omega\Delta w(x) = 0$$

durch Grenzübergang $\lim\omega=\infty$ die Differentialgleichung

$$x(x-1)w''(x)+(x(1+\gamma+\gamma')+(\alpha+\beta'-1))w'(x)+\gamma\gamma' w(x) = 0,$$

und W_-^β geht über in die *Gauss*sche Reihe

$$F(\gamma,\ \gamma',\ 1-\alpha-\beta',\ x) = (1-x)^{\alpha'+\beta}F(\alpha'+\beta+\gamma,\ \alpha'+\beta+\gamma',\ 1-\alpha-\beta',\ x).$$

Nimmt man eine Buchstabenvertauschung in der Art vor, dass man

$$\alpha,\quad \beta',\quad \gamma,\quad \gamma',\quad \alpha'+\beta$$

bez. durch

$$\mathfrak{a},\quad -\mathfrak{a}',\quad \mathfrak{a}'+\mathfrak{b},\quad \mathfrak{a}'+\mathfrak{b}',\quad \mathfrak{c}=1-\mathfrak{a}-\mathfrak{a}'-\mathfrak{b}-\mathfrak{b}'$$

ersetzt, so erhält man durch Grenzübergang aus der ersten, zweiten, fünften und sechsten der Formen unter (29.) die Ausdrücke

(128.)
$$\begin{cases} \lim W_-^\beta = x^{-\mathfrak{a}'}P^{\mathfrak{a}'}\left(\begin{matrix}\mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & 0,\\ \mathfrak{a}', & \mathfrak{b}', & \mathfrak{c},\end{matrix}\ x\right) \\ = F(\mathfrak{a}'+\mathfrak{b},\ \mathfrak{a}'+\mathfrak{b}',\ 1+\mathfrak{a}'-\mathfrak{a},\ x) = (1-x)^{\mathfrak{c}}F(1-\mathfrak{a}-\mathfrak{b},\ 1-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}',\ 1+\mathfrak{a}'-\mathfrak{a},\ x) \\ = (1-x)^{-\mathfrak{a}'-\mathfrak{b}}F\left(\mathfrak{a}'+\mathfrak{b},\ 1-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}',\ 1+\mathfrak{a}'-\mathfrak{a},\ \frac{x}{x-1}\right) \\ = (1-x)^{-\mathfrak{a}'-\mathfrak{b}'}F\left(\mathfrak{a}'+\mathfrak{b}',\ 1-\mathfrak{a}-\mathfrak{b},\ 1+\mathfrak{a}'-\mathfrak{a},\ \frac{x}{x-1}\right). \end{cases}$$

Die übrigen sechs Formen von W_-^β lassen den Grenzübergang nicht zu. Natürlich sind die ausgeführten Grenzübergänge an gewisse Bedingungen gebunden, es muss namentlich in den beiden ersten Fällen $abs\,x<1$, in den beiden letzten $abs\,x : abs(x-1)<1$ sein. Sind aber diese Bedingungen erfüllt,

so wird man ω immer so über alle Grenzen wachsen lassen können, dass der Grenzübergang unbedenklich ist. Für reelle x z. B. wird es genügen, ω rein imaginär anzunehmen. Man vergleiche hierzu die Bemerkungen, die ich über den Grenzübergang bei Facultäten im XXVI. Bande der *Schlömilch*schen Zeitschrift auf S. 321 gemacht habe.

Die erste, zweite, fünfte und sechste der Formen unter (30.) geben durch denselben Grenzübergang und dieselbe Buchstabenveränderung:

$$(129.)\quad \begin{cases} x^{\alpha'} \lim W_+^{\alpha} = P^{\mathfrak{c}'=0}\left(\begin{matrix}\mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{c}, \\ \mathfrak{a}', & \mathfrak{b}', & \mathfrak{c}'=0,\end{matrix}\ x\right) \\ = x^{\alpha'} F(\mathfrak{a}'+\mathfrak{b},\ \mathfrak{a}'+\mathfrak{b}',\ 1-\mathfrak{c},\ 1-x) = x^{\alpha} F(\mathfrak{a}+\mathfrak{b},\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b}',\ 1-\mathfrak{c},\ 1-x) \\ = (-x)^{-\mathfrak{b}} F\left(\mathfrak{a}'+\mathfrak{b},\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b},\ 1-\mathfrak{c},\ \frac{x-1}{x}\right) \\ = (-x)^{-\mathfrak{b}'} F\left(\mathfrak{a}'+\mathfrak{b}',\ \mathfrak{a}'+\mathfrak{b},\ 1-\mathfrak{c},\ \frac{x-1}{x}\right). \end{cases}$$

Aus der ersten, zweiten, dritten und vierten der Formen unter (33.) folgt

$$(130.)\quad \begin{cases} \lim \omega^{\gamma} W_-^{\gamma} = (1-x)^{-\alpha'-\mathfrak{b}} F\left(\mathfrak{a}'+\mathfrak{b},\ 1-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}',\ 1+\mathfrak{b}-\mathfrak{b}',\ \frac{1}{1-x}\right) \\ = (-x)^{-\alpha'} P^{\mathfrak{b}}\left(\begin{matrix}\mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{c}, \\ \mathfrak{a}', & \mathfrak{b}', & 0,\end{matrix}\ x\right) = (-x)^{-\alpha'-\mathfrak{b}} F\left(\mathfrak{a}+\mathfrak{b},\ \mathfrak{a}'+\mathfrak{b},\ 1+\mathfrak{b}-\mathfrak{b}',\ \frac{1}{x}\right) \\ = (1-x)^{-\alpha-\mathfrak{b}} (-x)^{\alpha-\alpha'} F\left(\mathfrak{a}+\mathfrak{b},\ 1-\mathfrak{a}'-\mathfrak{b}',\ 1+\mathfrak{b}-\mathfrak{b}',\ \frac{1}{1-x}\right) \\ = (-x)^{\alpha+\mathfrak{b}'-1} (1-x)^{\mathfrak{c}} F\left(1-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}',\ 1-\mathfrak{a}'-\mathfrak{b}',\ 1+\mathfrak{b}-\mathfrak{b}',\ \frac{1}{x}\right). \end{cases}$$

Soll derselbe Grenzübergang in den Ergänzungsintegralen ausgeführt werden, so ist dies nicht unmittelbar möglich. Man führt den Grenzübergang beim negativen Zweige durch, wenn man als Ergänzungsintegral den Ausdruck nimmt ($\lim \varepsilon = 0$):

$$\begin{aligned} &\lim\left(W_-^{\gamma'=\gamma-\varepsilon}.\omega^{\gamma-\varepsilon} - W_-^{\gamma+\varepsilon}.\omega^{\gamma+\varepsilon}\right) : 2\varepsilon \\ &= \lim \frac{1}{2\varepsilon}\left(W_-^{\gamma'=\gamma-\varepsilon} - W_-^{\gamma=\gamma+\varepsilon}\right)\omega^{\gamma-\varepsilon} + W_-^{\gamma} \lim \frac{1}{2\varepsilon}\left(\omega^{\gamma-\varepsilon} - \omega^{\gamma+\varepsilon}\right) \\ &= W_-^{\gamma'=\gamma}.\omega^{\gamma} - \omega^{\gamma} \lg \omega\, W_-^{\gamma}. \end{aligned}$$

Lässt man ω, etwa rein imaginär, über alle Grenzen wachsen, führt die obige Buchstabenveränderung ein, so erhält man als Lösung der Differentialgleichung den Ausdruck:

$$(131.)\quad \begin{cases} (-x)^{-\alpha'}P^{\mathfrak{b}}\left(\begin{matrix}\mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{c}, \\ \mathfrak{a}', & \mathfrak{b}', & 0,\end{matrix}\ x\right)\left(\Psi(\mathfrak{a}'+\mathfrak{b}-1)+\Psi(-\mathfrak{a}-\mathfrak{b})-2\Psi(0)+\lg(1-x)\right) \\ \quad +(1-x)^{-\alpha'-\mathfrak{b}}F\left(\begin{matrix}0_+, & 0_+, & \frac{1}{1-x}\\ \mathfrak{a}'+\mathfrak{b}_-, & 1-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}_-, & \end{matrix}\right) \\ = (-x)^{-\alpha'}P^{\mathfrak{b}}.\left(\Psi(\mathfrak{a}'+\mathfrak{b}-1)+\Psi(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}-1)-2\Psi(0)+\lg x\right) \\ \quad +(-x)^{-\alpha'-\mathfrak{b}}F\left(\begin{matrix}0_+, & 0_+, & \frac{1}{x}\\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b}_-, & \mathfrak{a}'+\mathfrak{b}_-, & \end{matrix}\right) \\ = (-x)^{-\alpha'}P^{\mathfrak{b}}.\left(\Psi(-\mathfrak{a}'-\mathfrak{b})+\Psi(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}-1)-2\Psi(0)+\lg(1-x)\right) \\ \quad +(1-x)^{-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}}(-x)^{\mathfrak{a}-\alpha'}F\left(\begin{matrix}0_+, & 0_+, & \frac{1}{1-x}\\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b}_-, & 1-\mathfrak{a}'-\mathfrak{b}_-, & \end{matrix}\right) \\ = (-x)^{-\alpha'}P^{\mathfrak{b}}.\left(\Psi(-\mathfrak{a}'-\mathfrak{b})+\Psi(-\mathfrak{a}-\mathfrak{b})-2\Psi(0)+\lg x\right) \\ \quad +(-x)^{-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}}(1-x)^{\mathfrak{c}}F\left(\begin{matrix}0_+, & 0_+, & \frac{1}{x}\\ 1-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}_-, & 1-\mathfrak{a}'-\mathfrak{b}_-, & \end{matrix}\right), \end{cases}$$

worin für $(-x)^{-\alpha'}P^{\mathfrak{b}}$ jede der vier unter (130.) stehenden Formen genommen werden kann.

Da in der linken Seite der Gleichung (126.) der Grenzübergang ohne Weiteres ausführbar ist, so steht zu erwarten, dass dies auch auf der rechten Seite möglich sei. Diese Rechnung soll durchgeführt werden, wobei die Buchstaben E und G_ν dieselbe Bedeutung wie auf S. 98 haben.

Für rein imaginär über alle Grenzen wachsende ω ergiebt sich

$$\lim \frac{fac(-\alpha-\beta')fac(\omega-\alpha'-\beta')fac(\beta+(1-x)\omega-1)fac(\nu-1)G_\nu}{fac(\gamma-1)fac(\nu-\alpha-\beta'-\gamma)fac(\omega+\nu-\alpha'-\beta'-\gamma)fac(\beta+\gamma-\nu+(1-x)\omega-1)}$$

$$= \frac{(1-x)^{\nu-\gamma}fac(-\alpha-\beta')fac(\nu-1)}{fac(\gamma-1)fac(\nu-\alpha-\beta'-\gamma)}\sum_{m=0}^{m=\nu-1}\frac{(\alpha'+\beta+\gamma-\nu,\ m)(\gamma-\nu,\ m)}{(1-x)^m(1,\ m)(1-\nu,\ m)},$$

$$\lim \frac{Efac(\alpha+\beta+\gamma+\omega-1)fac(\alpha'+\beta+\gamma-1)fac(\gamma-1)}{fac\nu fac(\omega(1-x)+\beta+\gamma-1)}$$

$$= (1-x)^{-\gamma}\lim \frac{fac(-\alpha-\beta')fac(\omega-\alpha'-\beta')fac(\omega+\alpha+\beta+\gamma-1):fac\nu}{fac(\gamma-\nu-1)fac(-\alpha-\beta'-\gamma)fac(\omega-\alpha'-\beta'-\gamma)fac(\omega+\nu-\alpha'-\beta'-\gamma)}$$

$$= (1-x)^{-\gamma}fac(-\alpha-\beta'):fac\nu fac(\gamma-\nu-1)fac(-\alpha-\beta'-\gamma),$$

und hieraus fliesst mit Fortlassung des Factors $(1-x)^{-\gamma}$ die Formel

$$(132.)\quad \begin{cases} F\left(\gamma,\ \alpha'+\beta+\gamma,\ 1-\alpha-\beta',\ \frac{x}{x-1}\right) \\ \quad = \frac{fac(-\alpha-\beta')fac(\nu-1)}{fac(\gamma-1)fac(\nu-\alpha-\beta'-\gamma)}\sum_{m=0}^{m=\nu-1}\frac{(\alpha'+\beta+\gamma-\nu,\ m)(\gamma-\nu,\ m)}{(1-x)^{m-\nu}(1,\ m)(1-\nu,\ m)} \\ +(-1)^\nu K\left(F\left(\begin{matrix}0_+, & 0_+, & \frac{1}{1-x}\\ \alpha'+\beta+\gamma_-, & \gamma_-, & \end{matrix}\right)+\lg(1-x)F\left(\begin{matrix}0, & 0, & \frac{1}{1-x}\\ \alpha'+\beta+\gamma, & \gamma, & \end{matrix}\right)\right), \end{cases}$$

$$K = fac(-\alpha-\beta'):fac\nu fac(\gamma-\nu-1)fac(-\alpha-\beta'-\gamma).$$

Setzen wir $\gamma = \mathfrak{a}+\mathfrak{b}$, $\alpha'+\beta+\gamma = \mathfrak{a}+\mathfrak{b}'$, $\alpha+\beta' = \mathfrak{c}$, $x:(x-1) = 1-z$, $1:(1-x) = z$, so folgt

$$(133.)\quad \left\{\begin{aligned} &F(\mathfrak{a}+\mathfrak{b},\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b}',\ 1-\mathfrak{c},\ 1-z)\\ &= \frac{fac(-\mathfrak{c})fac(\nu-1)}{fac(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}'-1)fac(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}-1)}\sum_{m=0}^{m=\nu-1}\frac{(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}'-\nu,\ m)(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}-\nu,\ m)}{z^{m-\nu}(1,\ m)(1-\nu,\ m)}\\ &+\frac{(-1)^\nu fac(-\mathfrak{c}):facv}{fac(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}-\nu-1)fac(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}'-\nu-1)}\left\{F\begin{pmatrix}0_+,& 0_+,\\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b}'_-,& \mathfrak{a}+\mathfrak{b}_-,\end{pmatrix}z\right)\\ &\qquad -\log z\,F\begin{pmatrix}0,& 0,\\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b},& \mathfrak{a}+\mathfrak{b}',\end{pmatrix}z\right)\Big\}. \end{aligned}\right.$$

Zur Vergleichung werde diese Formel aus der Theorie der hypergeometrischen Reihe direct hergeleitet. Es ist

$$P^{\mathfrak{c}}\begin{pmatrix}\mathfrak{a},& \mathfrak{b},& \mathfrak{c},\\ \mathfrak{a}',& \mathfrak{b}',& \mathfrak{c}',\end{pmatrix}z = \mathfrak{c}_{\mathfrak{a}}P^{\mathfrak{a}}+\mathfrak{c}_{\mathfrak{a}'}P^{\mathfrak{a}'},$$

$$\mathfrak{c}_{\mathfrak{a}} = \frac{fac(\mathfrak{c}-\mathfrak{c}')fac(\mathfrak{a}'-\mathfrak{a}-1)}{fac(-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}'-\mathfrak{c}')fac(-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}-\mathfrak{c}')},\quad \mathfrak{c}_{\mathfrak{a}'} = \frac{fac(\mathfrak{c}-\mathfrak{c}')fac(\mathfrak{a}-\mathfrak{a}'-1)}{fac(-\mathfrak{a}'-\mathfrak{b}'-\mathfrak{c}')fac(-\mathfrak{a}'-\mathfrak{b}-\mathfrak{c}')},$$

$$P^{\mathfrak{a}} = \frac{z^{\mathfrak{a}}(1-z)^{\mathfrak{c}}fac(\mathfrak{a}-\mathfrak{a}')}{fac(-\mathfrak{a}'-\mathfrak{b}'-\mathfrak{c}')fac(-\mathfrak{a}'-\mathfrak{b}-\mathfrak{c}')}\mathfrak{S}\frac{z^m fac(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+m-1)fac(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}'+\mathfrak{c}+m-1)}{facmfac(\mathfrak{a}-\mathfrak{a}'+m)},$$

$$P^{\mathfrak{a}'} = \frac{z^{\mathfrak{a}'}(1-z)^{\mathfrak{c}'}fac(\mathfrak{a}'-\mathfrak{a})}{fac(-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}'-\mathfrak{c}')fac(-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}-\mathfrak{c}')}\mathfrak{S}\frac{z^m fac(\mathfrak{a}'+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+m-1)fac(\mathfrak{a}'+\mathfrak{b}'+\mathfrak{c}+m-1)}{facmfac(\mathfrak{a}'-\mathfrak{a}+m)}.$$

Die ersten ν Glieder der letzten Reihe mögen mit $z^{\mathfrak{a}'}(1-z)^{\mathfrak{c}}H_\nu$ bezeichnet werden, dann ist

$$P^{\mathfrak{c}} = \frac{z^{\mathfrak{a}'}(1-z)^{\mathfrak{c}}H_\nu fac(\mathfrak{c}-\mathfrak{c}')fac(\mathfrak{a}-\mathfrak{a}'-1)}{fac(-\mathfrak{a}'-\mathfrak{b}'-\mathfrak{c}')fac(-\mathfrak{a}'-\mathfrak{b}-\mathfrak{c}')} + \frac{(1-z)^{\mathfrak{c}}fac(\mathfrak{c}-\mathfrak{c}')\pi\,\mathrm{cosec}(\mathfrak{a}-\mathfrak{a}')\pi\,\Delta}{fac(-\mathfrak{a}'-\mathfrak{b}'-\mathfrak{c}')fac(-\mathfrak{a}'-\mathfrak{b}-\mathfrak{c}')fac(-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}'-\mathfrak{c}')fac(-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}-\mathfrak{c}')},$$

$$\Delta = \mathfrak{S}\frac{z^{\mathfrak{a}'+m+\nu}fac(\mathfrak{a}'+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+m+\nu-1)fac(\mathfrak{a}'+\mathfrak{b}'+\mathfrak{c}+m+\nu-1)}{fac(m+\nu)fac(\mathfrak{a}'-\mathfrak{a}+m+\nu)} - \mathfrak{S}\frac{z^{\mathfrak{a}+m}fac(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+m-1)fac(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}'+\mathfrak{c}+m-1)}{facmfac(\mathfrak{a}-\mathfrak{a}'+m)}.$$

Setzen wir hierin $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}-\nu-\varepsilon$, und $\mathfrak{a}+\varepsilon$ für $\mathfrak{a}$ und gehen mit ε zur Grenze Null über, so erhalten wir

$$(134.)\quad \left\{\begin{aligned} P^{\mathfrak{c}} &= z^{\mathfrak{a}-\nu}(1-z)^{\mathfrak{c}}F(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}-\nu,\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b}'+\mathfrak{c}-\nu,\ \mathfrak{c}-\mathfrak{c}'+1,\ 1-z)\\ &= z^{\mathfrak{a}}(1-z)^{\mathfrak{c}}F(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c},\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b}'+\mathfrak{c},\ \mathfrak{c}-\mathfrak{c}'+1,\ 1-z)\\ &= \frac{z^{\mathfrak{a}-\nu}(1-z)^{\mathfrak{c}}fac(\mathfrak{c}-\mathfrak{c}')fac(\nu-1)}{fac(\nu-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}'-\mathfrak{c}')fac(\nu-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}-\mathfrak{c}')}\sum_{m=0}^{m=\nu-1}\frac{z^m(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}-\nu,\ m)(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}'+\mathfrak{c}-\nu,\ m)}{(1,\ m)(1-\nu,\ m)}\\ &\quad +z^{\mathfrak{a}}L(-1)^\nu\left\{F\begin{pmatrix}0_+,& -\nu_+,\\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}_-,& \mathfrak{a}+\mathfrak{b}'+\mathfrak{c}_-,\end{pmatrix}z\right)-\log z\,F\begin{pmatrix}0,& -\nu,\\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c},& \mathfrak{a}+\mathfrak{b}'+\mathfrak{c},\end{pmatrix}z\right)\Big\},\\ L &= fac(\mathfrak{c}-\mathfrak{c}'):facvfac(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}-\nu-1)fac(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}'+\mathfrak{c}-\nu-1). \end{aligned}\right.$$

Eine neue Gleichung erhält man hieraus, wenn man $\mathfrak{c}$ mit $\mathfrak{c}'$ vertauscht. Setzt man aber in (134.) $\mathfrak{c}=0$ und schreibt dann $\mathfrak{c}$ für $\mathfrak{c}'$, so geht diese Gleichung unmittelbar in (133.) über. Setzen wir ausserdem noch $\mathfrak{a}=\nu$, so finden wir

$$F(\mathfrak{b},\ \mathfrak{b}',\ \mathfrak{b}+\mathfrak{b}'+\nu,\ 1-z) = \frac{fac(\mathfrak{b}+\mathfrak{b}'+\nu-1)fac(\nu-1)}{fac(\mathfrak{b}+\nu-1)fac(\mathfrak{b}'+\nu-1)} \sum_{0}^{\nu-1} \frac{z^m(\mathfrak{b},\ m)(\mathfrak{b}',\ m)}{(1,\ m)(1-\nu,\ m)}$$

$$+ \frac{(-1)^\nu fac(\mathfrak{b}+\mathfrak{b}'+\nu-1):facv}{fac(\mathfrak{b}-1)fac(\mathfrak{b}'-1)} \left\{F\left(\begin{matrix}0_+, & -\nu_+, \\ \mathfrak{b}_-, & \mathfrak{b}'_-,\end{matrix}\ z\right) - \log z\, F\left(\begin{matrix}0, & -\nu, \\ \mathfrak{b}, & \mathfrak{b}',\end{matrix}\ z\right)\right\},$$

eine Formel, welche sich schon bei *Gauss* im dritten Bande seiner Werke auf Seite 216 vorfindet.

Ueber die Irreducibilität ganzer rationaler Functionen mit ganzzahligen Coefficienten.

(Von Herrn *David Hilbert* in Königsberg i. Pr.)

Wenn eine ganze rationale Function mit ganzzahligen Coefficienten und mit den Veränderlichen $x, y, \ldots, w; t, r, \ldots, q$ vorgelegt ist und wir behalten in dieser Function einige von den Veränderlichen, etwa die Veränderlichen $x, y, \ldots, w,$ als Unbestimmte bei, während wir für die übrigen Veränderlichen $t, r, \ldots, q$ irgend welche ganze positive oder negative Zahlen einsetzen, so entsteht ein System von unbegrenzt vielen ganzen rationalen Functionen der Veränderlichen $x, y, \ldots, w$ mit ganzzahligen Coefficienten, und wir werden auf die Frage geführt, ob in diesem Systeme nothwendig irreducible Functionen der Veränderlichen $x, y, \ldots, w$ vorhanden sein müssen, sobald die ursprünglich vorgelegte Function eine irreducible Function der Veränderlichen $x, y, \ldots, w; t, r, \ldots, q$ ist. Dabei wird eine ganze rationale Function mit ganzzahligen Coefficienten irreducibel genannt, wenn sie nicht als Product mehrerer solcher ganzer ganzzahliger Functionen darstellbar ist. Die angeregte Frage und ihre Erweiterung auf beliebige Rationalitätsbereiche rückt den Begriff der Irreducibilität in ein neues Licht, und überdies gestatten die sich ergebenden Resultate mannigfache besondere Anwendungen auf die Theorie der Gleichungen und der Rationalitätsbereiche.

Unsere Entwickelungen beruhen auf folgendem Hülfssatze:

Es sei eine unendliche Zahlenreihe $a_1, a_2, a_3, \ldots$ vorgelegt, in welcher allgemein a_s eine der a ganzen positiven Zahlen $1, 2, \ldots, a$ bedeutet; es sei überdies m irgend eine ganze positive Zahl. Dann lassen sich stets m ganze positive Zahlen $\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \ldots, \mu^{(m)}$ so bestimmen, dass die 2^m Elemente

$$
\begin{array}{l}
a_\mu, \\
a_{\mu+\mu^{(1)}}, \\
a_{\mu+\mu^{(2)}}, \quad a_{\mu+\mu^{(1)}+\mu^{(2)}}, \\
a_{\mu+\mu^{(3)}}, \quad a_{\mu+\mu^{(1)}+\mu^{(3)}}, \quad a_{\mu+\mu^{(2)}+\mu^{(3)}}, \quad a_{\mu+\mu^{(1)}+\mu^{(2)}+\mu^{(3)}}, \\
\cdot\ \cdot \\
a_{\mu+\mu^{(m)}}, \quad a_{\mu+\mu^{(1)}+\mu^{(m)}}, \quad a_{\mu+\mu^{(2)}+\mu^{(m)}}, \quad \cdots, \quad a_{\mu+\mu^{(1)}+\mu^{(2)}+\cdots+\mu^{(m)}}
\end{array}
$$

für unendlich viele ganzzahlige Werthe μ sämmtlich gleich der nämlichen Zahl G sind, wo G eine der Zahlen 1, 2, ..., a bedeutet. Dabei wird der Index $\mu+\mu^{(1)}$ des zweiten Elementes erhalten, indem man die Zahl $\mu^{(1)}$ zu dem Index μ des ersten Elementes addirt; die Indices des dritten und vierten Elementes entstehen aus den Indices des ersten und zweiten Elementes, indem man zu diesen die Zahl $\mu^{(2)}$ addirt; die Indices des fünften, sechsten, siebenten, achten Elementes entstehen aus den Indices der vier ersten Elemente, wenn man zu diesen die Zahl $\mu^{(3)}$ addirt, und schliesslich erhält man die Indices der 2^{m-1} letzten Elemente, indem man zu den schon bestimmten Indices der 2^{m-1} ersten Elemente die Zahl $\mu^{(m)}$ addirt.

Beim Beweise ist es nothwendig, einzelne Theile der vorgelegten Reihe für sich zu betrachten. Wenn insbesondere i auf einander folgende Elemente der Reihe herausgegriffen werden, etwa die Elemente a_μ, $a_{\mu+1}$, $a_{\mu+2}$, ..., $a_{\mu+i-1}$, so nenne ich diese i Elemente ein Intervall der Reihe von der Länge i. Wir grenzen nun innerhalb der vorgelegten Reihe irgend ein Intervall von der Länge $a+1$ ab. In diesem Intervalle tritt dann mindestens eine der Zahlen 1, 2, ..., a, etwa die Zahl G, zweimal auf, d. h. in dem Intervalle von der Länge $a+1$ kommt jedenfalls eine der folgenden Gruppirungen vor:

$$
\begin{aligned}
G_2^{(1)} &= GG, \\
G_3^{(1)} &= G.G, \\
G_4^{(1)} &= G..G, \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
G_{a+1}^{(1)} &= G\ldots\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \ldots G.
\end{aligned}
$$

Wie schon durch die Schreibweise kenntlich gemacht ist, bedeutet hierin allgemein $G_s^{(1)}$ ein Intervall von der Länge s, dessen erstes und letztes Element einander gleich, nämlich gleich der Zahl G sind. Man sieht, dass die Anzahl aller möglichen von einander verschiedenen Gruppirungen $G_s^{(1)}$

gleich a^2 und somit jedenfalls kleiner als die Zahl $(a+1)^2$ ist. Wir grenzen jetzt innerhalb der vorgelegten Reihe hinter einander $(a+1)^2$ Intervalle ab, deren jedes die Länge $a+1$ besitzt, und betrachten dann das so entstehende Gesammtintervall von der Länge $(a+1)^3$. In demselben tritt nothwendig mindestens eine der Gruppirungen $G_s^{(1)}$, etwa die Gruppirung $G_{\nu(1)}^{(1)}$, zweimal auf, d. h. in dem Intervalle von der Länge $(a+1)^3$ kommt jedenfalls eine der folgenden Gruppirungen vor:

$$\begin{aligned}
G^{(2)}_{2\nu(1)} &= G^{(1)}_{\nu(1)} G^{(1)}_{\nu(1)},\\
G^{(2)}_{2\nu(1)+1} &= G^{(1)}_{\nu(1)} . G^{(1)}_{\nu(1)},\\
G^{(2)}_{2\nu(1)+2} &= G^{(1)}_{\nu(1)} .. G^{(1)}_{\nu(1)},\\
&\cdots\cdots\cdots\\
G^{(2)}_{(a+1)^3} &= G^{(1)}_{\nu(1)} \ldots \quad . \quad . \quad . \quad \ldots G^{(1)}_{\nu(1)}.
\end{aligned}$$

Hier bedeutet allgemein $G_s^{(2)}$ ein Intervall von der Länge s, welches mit der Gruppirung $G_{\nu(1)}^{(1)}$ beginnt und mit der nämlichen Gruppirung schliesst. Die Anzahl aller von einander verschiedenen Gruppirungen $G_s^{(2)}$ ist offenbar kleiner als das Product der Intervalllänge $(a+1)^3$ in die Anzahl aller möglichen Gruppirungen $G_s^{(1)}$, und folglich ist jene Anzahl der Gruppirungen $G_s^{(2)}$ jedenfalls kleiner als $(a+1)^5$. Wenn wir daher innerhalb der vorgelegten Reihe hinter einander $(a+1)^5$ Intervalle abgrenzen und zwar ein jedes von der Länge $(a+1)^3$, so tritt in dem so entstehenden Intervalle von der Gesammtlänge $(a+1)^8$ mindestens eine der Gruppirungen $G_s^{(2)}$, etwa die Gruppirung $G_{\nu(2)}^{(2)}$, zweimal auf, d. h. in dem Intervalle von der Länge $(a+1)^8$ kommt jedenfalls eine der folgenden Gruppirungen vor:

$$\begin{aligned}
G^{(3)}_{2\nu(2)} &= G^{(2)}_{\nu(2)} G^{(2)}_{\nu(2)},\\
G^{(3)}_{2\nu(2)+1} &= G^{(2)}_{\nu(2)} . G^{(2)}_{\nu(2)},\\
G^{(3)}_{2\nu(2)+2} &= G^{(2)}_{\nu(2)} .. G^{(2)}_{\nu(2)},\\
&\cdots\cdots\cdots\\
G^{(3)}_{(a+1)^8} &= G^{(2)}_{\nu(2)} \ldots \quad . \quad . \quad . \quad \ldots G^{(2)}_{\nu(2)}.
\end{aligned}$$

Hier bedeutet allgemein $G_s^{(3)}$ ein Intervall von der Länge s, welches mit der Gruppirung $G_{\nu(2)}^{(2)}$ beginnt und mit der nämlichen Gruppirung schliesst.

Nach m-maliger Anwendung des nämlichen Verfahrens gelangen wir zu Gruppirungen von der Gestalt

$$G^{(m)} = G^{(m-1)} \ldots \quad . \quad . \quad . \quad \ldots G^{(m-1)}$$

und erkennen, dass in jedem Intervall der Reihe von einer gewissen Länge l nothwendig eine jener Gruppirungen $G^{(m)}$ vorkommen muss. Dabei bedeutet l eine bestimmte endliche und nur von a und m abhängige Zahl. Die Anzahl aller von einander verschiedenen Gruppirungen $G^{(m)}$ ergiebt sich wiederum kleiner als eine gewisse endliche Zahl k, welche leicht aus a und m berechnet werden kann. In der vorgelegten Reihe können wir nun hinter einander beliebig viele Intervalle von der Länge l abgrenzen, und es folgt daher, dass es unter den Gruppirungen $G^{(m)}$ nothwendig eine giebt, welche in der vorgelegten Reihe unendlich oft vorkommt. Diese Gruppirung sei die folgende

$$G^{(m)}_{\nu^{(m)}} = G^{(m-1)}_{\nu^{(m-1)}} \ldots \quad . \quad . \quad . \quad \ldots G^{(m-1)}_{\nu^{(m-1)}},$$

wo $G^{(m)}_{\nu^{(m)}}$ und $G^{(m-1)}_{\nu^{(m-1)}}$ Intervalle von der Länge $\nu^{(m)}$ beziehungsweise von der Länge $\nu^{(m-1)}$ bedeuten.

Wir erkennen hieraus leicht die Richtigkeit des obigen Hülfssatzes. Es ist nämlich die Gruppirung $G^{(m)}_{\nu^{(m)}}$ durch die folgenden Recursionsformeln bestimmt:

$$\begin{aligned}
G^{(1)}_{\nu^{(1)}} &= G \ldots \quad . \quad . \quad . \quad \ldots G, \\
G^{(2)}_{\nu^{(2)}} &= G^{(1)}_{\nu^{(1)}} \ldots \quad . \quad . \quad . \quad \ldots G^{(1)}_{\nu^{(1)}}, \\
G^{(3)}_{\nu^{(3)}} &= G^{(2)}_{\nu^{(2)}} \ldots \quad . \quad . \quad . \quad \ldots G^{(2)}_{\nu^{(2)}}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
G^{(m)}_{\nu^{(m)}} &= G^{(m-1)}_{\nu^{(m-1)}} \ldots \quad . \quad . \quad . \quad \ldots G^{(m-1)}_{\nu^{(m-1)}},
\end{aligned}$$

wo stets die unteren Indices die Anzahl der Elemente angeben, aus denen die betreffenden Intervalle bestehen. Ich setze

$$\begin{aligned}
\mu^{(1)} &= \nu^{(1)} - 1, \\
\mu^{(2)} &= \nu^{(2)} - \nu^{(1)}, \\
\mu^{(3)} &= \nu^{(3)} - \nu^{(2)}, \\
&\ldots\ldots \\
\mu^{(m)} &= \nu^{(m)} - \nu^{(m-1)}
\end{aligned}$$

und behaupte dann, dass die so entstehenden, ganzen positiven Zahlen $\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \ldots, \mu^{(m)}$ von derjenigen Beschaffenheit sind, welche unser Hülfssatz verlangt. In der That: es ist eben bewiesen worden, dass in der vorgelegten Reihe $a_1, a_2, a_3, \ldots$ die Gruppirung $G^{(m)}_{\nu^{(m)}}$ unendlich oft vorkommt, d. h. es giebt unendlich viele ganzzahlige Werthe von μ, für welche

$$a_\mu a_{\mu+1} \ldots a_{\mu+\nu^{(m)}-1} = G^{(m)}_{\nu^{(m)}}$$

wird. Aus dem Aufbau der Gruppirung $G^{(m)}_{\nu^{(m)}}$ folgt dann

$$\begin{aligned}
a_{\mu} &= G,\\
a_{\mu+\mu^{(1)}} &= G,\\
a_{\mu+\mu^{(2)}} &= a_{\mu+\mu^{(1)}+\mu^{(2)}} = G,\\
a_{\mu+\mu^{(3)}} &= a_{\mu+\mu^{(1)}+\mu^{(3)}} = a_{\mu+\mu^{(2)}+\mu^{(3)}} = a_{\mu+\mu^{(1)}+\mu^{(2)}+\mu^{(3)}} = G,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_{\mu+\mu^{(m)}} &= a_{\mu+\mu^{(1)}+\mu^{(m)}} = a_{\mu+\mu^{(2)}+\mu^{(m)}} = \cdots = a_{\mu+\mu^{(1)}+\mu^{(2)}+\cdots+\mu^{(m)}} = G,
\end{aligned}$$

und damit ist der Hülfssatz bewiesen.

Wir kehren jetzt zu der anfangs gestellten Frage zurück und beweisen zunächst das folgende Theorem:

I. *Wenn $f(x, t)$ eine irreducible ganze rationale Function der beiden Veränderlichen x und t mit ganzzahligen Coefficienten bezeichnet, so ist es stets auf unendlich viele Weisen möglich, in $f(x, t)$ für t eine ganze rationale Zahl einzusetzen, so dass dadurch die Function $f(x, t)$ in eine irreducible Function der einen Veränderlichen x übergeht. Dabei heisst eine ganze rationale Function mit ganzzahligen Coefficienten irreducibel, wenn sie nicht als Product mehrerer solcher Functionen mit ganzzahligen Coefficienten dargestellt werden kann.*

Wir setzen

$$f(x, t) = Tx^n + T_1x^{n-1} + \cdots + T_n,$$

wo T, T_1, ..., T_n ganze rationale Functionen von t mit ganzzahligen Coefficienten sind, und nehmen dann — im Gegensatze zu der in obigem Theoreme ausgesprochenen Behauptung — an, dass die Function $f(x, t)$ stets gleich einem Producte zweier oder mehrerer ganzer ganzzahliger Functionen von x wird, sobald wir für t irgend eine ganze positive, oberhalb einer bestimmten Grenze C gelegene Zahl einsetzen. Vermöge der Substitution $x = \frac{y}{T}$ erhalten wir

$$f(x, t) = \frac{1}{T^{n-1}}\{y^n + S_1y^{n-1} + S_2y^{n-2} + \cdots + S_n\},$$

wo S_1, S_2, ..., S_n wiederum ganze ganzzahlige Functionen von t bedeuten, und es wird dann auch die Function

$$g(y, t) = y^n + S_1y^{n-1} + S_2y^{n-2} + \cdots + S_n$$

reducibel für jeden positiven ganzzahligen Werth von t, welcher eine gewisse Grenze C' überschreitet, wo $C' \geqq C$ und überdies so gross gewählt

sein möge, dass die Function T für alle über C' hinaus liegenden Werthe t von Null verschieden bleibt.

Wir entwickeln jetzt die n Wurzeln $y_1, y_2, \ldots, y_n$ der Gleichung

$$y^n + S_1 y^{n-1} + S_2 y^{n-2} + \cdots + S_n = 0$$

in der von *Puiseux**) zuerst angegebenen Weise nach fallenden ganzen Potenzen von $\tau = t^{\frac{1}{k}}$, wo k eine in bekannter Weise zu bestimmende positive ganze Zahl ist, und wo unter $t^{\frac{1}{k}}$ der positive reelle Werth der Wurzel verstanden werden soll. Zu Anfang der Entwickelungen erhält man eine endliche Anzahl von positiven ganzen Potenzen von τ. Es sei h der höchste positive Exponent von τ, welcher auftritt; wir finden dann die Entwickelungen:

$$\begin{aligned}
y_1 &= \alpha_1 \tau^h + \beta_1 \tau^{h-1} + \cdots + \lambda_1 + \frac{\pi_1}{\tau} + \frac{\varrho_1}{\tau^2} + \frac{\sigma_1}{\tau^3} + \cdots, \\
y_2 &= \alpha_2 \tau^h + \beta_2 \tau^{h-1} + \cdots + \lambda_2 + \frac{\pi_2}{\tau} + \frac{\varrho_2}{\tau^2} + \frac{\sigma_2}{\tau^3} + \cdots, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_n &= \alpha_n \tau^h + \beta_n \tau^{h-1} + \cdots + \lambda_n + \frac{\pi_n}{\tau} + \frac{\varrho_n}{\tau^2} + \frac{\sigma_n}{\tau^3} + \cdots,
\end{aligned}$$

wo die Coefficienten $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \pi, \varrho, \sigma, \ldots$ sämmtlich völlig bestimmte rationale oder irrationale, reelle oder imaginäre Zahlen sind. Die gefundenen Potenzreihen convergiren stets, wenn $t = \tau^k$ eine gewisse positive Grösse C'' übersteigt.

Wir wählen zunächst unter den n Wurzeln $y_1, y_2, \ldots, y_n$ irgend zwei aus, etwa y_1 und y_2, und bilden dann die Potenzreihen für die beiden elementarsymmetrischen Functionen derselben, wie folgt

$$\begin{aligned}
y_1 + y_2 &= (\alpha_1 + \alpha_2)\tau^h + (\beta_1 + \beta_2)\tau^{h-1} + \cdots, \\
y_1 y_2 &= \alpha_1 \alpha_2 \tau^{2h} + (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1)\tau^{2h-1} + \cdots.
\end{aligned}$$

Da wir auf $\frac{n(n-1)}{1.2} = \binom{n}{2}$ Weisen je zwei Wurzeln aus den n Wurzeln $y_1, y_2, \ldots, y_n$ auswählen können, so ergeben sich im Ganzen $\binom{n}{2}$ Systeme

---

*) Die Originalarbeit von *Puiseux* befindet sich in *Liouville*s Journal Bd. 15, 16 (1850, 1851). — Diese Potenzentwickelungen sind bereits von Herrn *C. Runge* dazu benutzt worden, um gewisse nothwendige Bedingungen dafür abzuleiten, dass eine Gleichung zwischen zwei Unbekannten unendlich viele ganzzahlige Lösungen besitzt, vgl. dieses Journal Bd. 100 S. 425.

von je zwei Potenzreihen. Wir wählen ferner aus den n Wurzeln y_1, $y_2, \ldots, y_n$ irgend drei aus, etwa y_1, y_2, y_3, und bilden dann die Potenzreihen für die drei elementarsymmetrischen Functionen derselben, wie folgt

$$\begin{aligned} y_1+y_2+y_3 &= (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\tau^h+(\beta_1+\beta_2+\beta_3)\tau^{h-1}+\cdots, \\ y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3 &= (\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)\tau^{2h} \\ &\quad +(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1+\alpha_1\beta_3+\alpha_3\beta_1+\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2)\tau^{2h-1}+\cdots, \\ y_1y_2y_3 &= \alpha_1\alpha_2\alpha_3\tau^{3h}+(\alpha_1\alpha_2\beta_3+\alpha_1\alpha_3\beta_2+\alpha_2\alpha_3\beta_1)\tau^{3h-1}+\cdots. \end{aligned}$$

Da wir auf $\binom{n}{3}$ Weisen je drei Wurzeln aus den n Wurzeln y_1, y_2, …, y_n auswählen können, so ergeben sich im Ganzen $\binom{n}{3}$ Systeme von je drei Potenzreihen. In derselben Weise gelangen wir zu $\binom{n}{4}$ Systemen von je vier Potenzreihen, zu $\binom{n}{5}$ Systemen von je fünf Potenzreihen u. s. f. Schliesslich wählen wir unter den n Wurzeln y_1, y_2, …, y_n irgend $n-1$ aus etwa y_1, y_2, …, y_{n-1} und bilden die Potenzreihen für die $n-1$ elementarsymmetrischen Functionen derselben, wie folgt

$$\begin{aligned} y_1+y_2+\cdots+y_{n-1} &= (\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1})\tau^h+(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_{n-1})\tau^{h-1}+\cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots

ganzzahlige Functionen von y zerlegt werden kann, so muss unter den 2^n-2 Systemen von Potenzreihen mindestens ein System existiren, dessen sämmtliche Potenzreihen sich gleich ganzen rationalen Zahlen ergeben, wenn man ihre Werthe für $\tau = p^{\frac{1}{k}}$ berechnet. Das erste dieser Systeme habe die Nummer a_1. Wir setzen ferner $\tau = 2p^{\frac{1}{k}}$. Da infolge unserer Annahme die Function $g(y, 2^k p)$ reducibel wird, so muss wiederum unter den 2^n-2 Systemen von Potenzreihen mindestens ein System existiren, dessen sämmtliche Potenzreihen für $\tau = 2p^{\frac{1}{k}}$ ganzzahlige Werthe annehmen. Das erste dieser Systeme besitze die Nummer a_2. In Folge der Substitution $\tau = 3p^{\frac{1}{k}}$ mögen alle diejenigen Potenzreihen ganzzahlige Werthe annehmen, welche dem Systeme mit der Nummer a_3 angehören u. s. f.

Durch dieses Verfahren ist eine unendliche Zahlenreihe $a_1, a_2, a_3, \ldots$ definirt, in welcher allgemein a_s eine der 2^n-2 ganzen Zahlen $1, 2, \ldots, 2^n-2$ bedeutet. Wir wenden auf diese unendliche Reihe den oben bewiesenen Hülfssatz an, indem wir $a = 2^n-2$ und $m = (n-1)h+1$ setzen. Es lassen sich dann zufolge jenes Satzes m Zahlen $\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \ldots, \mu^{(m)}$ so bestimmen, dass die 2^m Elemente

$$
\begin{array}{l}
a_\mu, \\
a_{\mu+\mu^{(1)}}, \\
a_{\mu+\mu^{(2)}}, \quad a_{\mu+\mu^{(1)}+\mu^{(2)}}, \\
a_{\mu+\mu^{(3)}}, \quad a_{\mu+\mu^{(1)}+\mu^{(3)}}, \quad a_{\mu+\mu^{(2)}+\mu^{(3)}}, \quad a_{\mu+\mu^{(1)}+\mu^{(2)}+\mu^{(3)}}, \\
\ldots\ldots\ldots

stimmte rationale oder irrationale, reelle oder imaginäre Zahlen; einige derselben haben den Werth Null, da ja die positiven Exponenten von τ im Allgemeinen kleiner sein werden als $m-1=(n-1)h$. Wir setzen in die obigen ν Potenzreihen $\tau=\sigma p^{\frac{1}{k}}$ ein und erhalten dann

$$y_1+y_2+\cdots+y_\nu = A_1\sigma^{m-1}+B_1\sigma^{m-2}+\cdots+L_1+\frac{P_1}{\sigma}+\frac{R_1}{\sigma^2}+\frac{S_1}{\sigma^3}+\cdots,$$

. . . . . .

$$y_1y_2\ldots y_\nu = A_\nu\sigma^{m-1}+B_\nu\sigma^{m-2}+\cdots+L_\nu+\frac{P_\nu}{\sigma}+\frac{R_\nu}{\sigma^2}+\frac{S_\nu}{\sigma^3}+\cdots,$$

wo die Coefficienten A, B, ..., L, P, R, S, ... wiederum bestimmte numerische Grössen sind.

Es giebt, wie unsere Entwickelungen zeigen, unendlich viele ganze Zahlen μ derart, dass in den letzten Formeln die rechten Seiten sämmtlich ganze Zahlen darstellen, sobald wir für σ eine der ganzen Zahlen

$$\begin{array}{l}
\mu,\\
\mu+\mu^{(1)},\\
\mu+\mu^{(2)},\quad \mu+\mu^{(1)}+\mu^{(2)},\\
\mu+\mu^{(3)},\quad \mu+\mu^{(1)}+\mu^{(3)},\quad \mu+\mu^{(2)}+\mu^{(3)},\quad \mu+\mu^{(1)}+\mu^{(2)}+\mu^{(3)},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mu+\mu^{(m)},\quad \mu+\mu^{(1)}+\mu^{(m)},\quad \mu+\mu^{(2)}+\mu^{(m)},\quad \ldots,\quad \mu+\mu^{(1)}+\mu^{(2)}+\cdots+\mu^{(m)}
\end{array}$$

einsetzen. Wir wählen jetzt irgend eine von den ν Potenzreihen des in Rede stehenden Systems aus, etwa die Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(\sigma) = A_1\sigma^{m-1}+B_1\sigma^{m-2}+\cdots+L_1+\frac{P_1}{\sigma}+\frac{R_1}{\sigma^2}+\frac{S_1}{\sigma^3}+\cdots,$$

und bilden aus derselben die folgenden m Potenzreihen

$$\begin{aligned}
\mathfrak{P}^{(1)}(\sigma) &= \mathfrak{P}(\sigma)-\mathfrak{P}(\sigma+\mu^{(1)}),\\
\mathfrak{P}^{(2)}(\sigma) &= \mathfrak{P}^{(1)}(\sigma)-\mathfrak{P}^{(1)}(\sigma+\mu^{(2)}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mathfrak{P}^{(m)}(\sigma) &= \mathfrak{P}^{(m-1)}(\sigma)-\mathfrak{P}^{(m-1)}(\sigma+\mu^{(m)}).
\end{aligned}$$

Aus der vorhin bewiesenen Thatsache folgt, dass auch jede von diesen m Potenzreihen für unendlich viele ganzzahlige Argumente $\sigma=\mu$ ganzzahlige Werthe annimmt. Wir setzen ferner zur Abkürzung

$$\varphi_{m-1}(\sigma) = A_1\sigma^{m-1}+B_1\sigma^{m-2}+\cdots+L_1.$$

Die weiteren Coefficienten P_1, R_1, S_1, ... der Potenzreihe $\mathfrak{P}(\sigma)$ seien nicht

sämmtlich gleich Null, und es bezeichne $\frac{V_1}{\sigma^v}$ das erste Glied, dessen Coefficient V_1 nicht verschwindet. Wir erhalten dann

$$\mathfrak{P}^{(1)}(\sigma) = \varphi_{m-1}(\sigma) - \varphi_{m-1}(\sigma+\mu^{(1)}) + V_1\left[\frac{1}{\sigma^v} - \frac{1}{(\sigma+\mu^{(1)})^v}\right] + \cdots.$$

Hier ist die erste auf der rechten Seite stehende Differenz eine ganze rationale Function vom $(m-2)$ten Grade in σ; wir setzen

$$\varphi_{m-2}(\sigma) = \varphi_{m-1}(\sigma) - \varphi_{m-1}(\sigma+\mu^{(1)}).$$

Die übrigen Glieder auf der rechten Seite entwickeln wir nach fallenden Potenzen von σ; es wird dann

$$\mathfrak{P}^{(1)}(\sigma) = \varphi_{m-2}(\sigma) + \mu^{(1)} v \frac{V_1}{\sigma^{v+1}} + \cdots.$$

In entsprechender Weise erhalten wir

$$\mathfrak{P}^{(2)}(\sigma) = \varphi_{m-3}(\sigma) + \mu^{(1)}\mu^{(2)} v(v+1) \frac{V_1}{\sigma^{v+2}} + \cdots,$$

wo $\varphi_{m-3}(\sigma)$ eine ganze rationale Function vom $(m-3)$ten Grade in σ bedeutet. Nach m Schritten gelangen wir schliesslich zu der Formel

$$\mathfrak{P}^{(m)}(\sigma) = \mu^{(1)}\mu^{(2)} \ldots \mu^{(m)} v(v+1) \ldots (v+m-1) \frac{V_1}{\sigma^{v+m}} + \cdots.$$

Da diese Potenzreihe mit negativen Potenzen von σ beginnt, so lässt sich eine positive Grösse I' angeben derart, dass für alle diese Grenze I' überschreitenden Werthe von σ der Werth der Potenzreihe absolut genommen kleiner als Eins ausfällt. Andererseits wird die Potenzreihe $\mathfrak{P}^{(m)}(\sigma)$ für unendlich viele ganzzahlige Argumente σ selbst gleich einer ganzen Zahl, und da eine ganze Zahl, deren absoluter Betrag unterhalb der Einheit liegt, nothwendig gleich Null sein muss, so folgt, dass es unendlich viele ganzzahlige Werthe von σ giebt, für welche die Potenzreihe $\mathfrak{P}^{(m)}(\sigma)$ verschwindet.

Aus der letzten Formel ergiebt sich aber

$$\lim_{\sigma=\infty} [\sigma^{v+m}\mathfrak{P}^{(m)}(\sigma)] = \mu^{(1)}\mu^{(2)} \ldots \mu^{(m)} v(v+1) \ldots (v+m-1) V_1,$$

wo der Ausdruck rechter Hand eine von Null verschiedene Grösse darstellt. Dieser Umstand steht mit der eben bewiesenen Thatsache in Widerspruch, und es ist daher unmöglich, dass unter den Coefficienten P_1, R_1, S_1, ... ein von Null verschiedener Coefficient V_1 auftritt. In derselben Weise folgt, dass auch die Coefficienten P_2, R_2, S_2, ..., P_ν, R_ν, S_ν, ... sämmtlich

gleich Null sind, und wir erhalten daher die Gleichungen:

$$\begin{aligned} y_1+y_2+\cdots+y_\nu &= A_1\sigma^{m-1}+B_1\sigma^{m-2}+\cdots+L_1,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ y_1y_2\ldots y_\nu &= A_\nu\sigma^{m-1}+B_\nu\sigma^{m-2}+\cdots+L_\nu. \end{aligned}$$

Da die rechten Seiten für unendlich viele ganzzahlige Werthe von σ ganze Zahlen darstellen sollen, so folgt leicht, dass die Coefficienten A, B, ..., L sämmtlich rationale Zahlen sind*). Führen wir wiederum die Veränderliche τ ein, indem wir $\sigma = \tau p^{-\frac{1}{k}}$ setzen, so wird

$$\begin{aligned} y_1+y_2+\cdots+y_\nu &= A_1p^{-\frac{m-1}{k}}\tau^{m-1}+B_1p^{-\frac{m-2}{k}}\tau^{m-2}+\cdots+L_1,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ y_1y_2\ldots y_\nu &= A_\nu p^{-\frac{m-1}{k}}\tau^{m-1}+B_\nu p^{-\frac{m-2}{k}}\tau^{m-2}+\cdots+L_\nu. \end{aligned}$$

Die bisherigen Entwickelungen ergeben das folgende Resultat: Bestimmen wir irgend eine Primzahl p, welche oberhalb einer gewissen Grenze liegt, so giebt es unter den oben aufgestellten 2^n-2 Systemen von Potenzreihen mindestens eines, dessen Functionen die eben angegebene Gestalt annehmen, wobei die Coefficienten A, B, ..., L sämmtlich rationale Zahlen sind.

Wir bestimmen 2^n-2 Primzahlen p', p'', ..., $p^{(2^n-2)}$, welche unter sich verschieden und grösser sind als die Primzahl p. Auch für jede dieser Primzahlen giebt es dann unter den in Rede stehenden 2^n-2 Systemen von Potenzreihen eines von der entsprechenden Gestalt. Da aber die Anzahl der Primzahlen p, p', p'', ..., $p^{(2^n-2)}$ gleich 2^n-1 ist, während die Anzahl der Systeme nur 2^n-2 beträgt, so muss es nothwendig ein System geben, dessen Functionen eine doppelte Darstellung zulassen. Es sei etwa, wie oben

$$\begin{aligned} y_1+y_2+\cdots+y_\nu &= A_1p^{-\frac{m-1}{k}}\tau^{m-1}+B_1p^{-\frac{m-2}{k}}\tau^{m-2}+\cdots+L_1,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ y_1y_2\ldots y_\nu &= A_\nu p^{-\frac{m-1}{k}}\tau^{m-1}+B_\nu p^{-\frac{m-2}{k}}\tau^{m-2}+\cdots+L_\nu \end{aligned}$$

*) Man darf nicht schliessen, dass jene Coefficienten ***ganze*** rationale Zahlen sind, da es bekanntlich sehr wohl ganze rationale Functionen einer Veränderlichen giebt, welche für alle ganzzahligen Werthe derselben ganzen Zahlen gleich werden und trotzdem gebrochene Coefficienten besitzen; vgl. Math. Annalen Bd. 36 S. 512, wo ich die allgemeinsten Functionen solcher Art aufgestellt habe.

und zugleich

$$\begin{aligned} y_1+y_2+\cdots+y_\nu &= A'_1 p'^{-\frac{m-1}{k}} \tau^{m-1}+B'_1 p'^{-\frac{m-2}{k}} \tau^{m-2}+\cdots+L'_1, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_1 y_2 \cdots y_\nu &= A'_\nu p'^{-\frac{m-1}{k}} \tau^{m-1}+B'_\nu p'^{-\frac{m-2}{k}} \tau^{m-2}+\cdots+L'_\nu. \end{aligned}$$

Durch Vergleichung der nämlichen Potenzen von τ auf der rechten Seite ergiebt sich

$$\begin{aligned} A_1 p^{-\frac{m-1}{k}} &= A'_1 p'^{-\frac{m-1}{k}}, \quad \ldots, \quad A_\nu p^{-\frac{m-1}{k}} = A'_\nu p'^{-\frac{m-1}{k}}, \\ B_1 p^{-\frac{m-2}{k}} &= B'_1 p'^{-\frac{m-2}{k}}, \quad \ldots, \quad B_\nu p^{-\frac{m-2}{k}} = B'_\nu p'^{-\frac{m-2}{k}}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ L_1 &= L'_1, \quad \ldots, \quad L_\nu = L'_\nu. \end{aligned}$$

Da die Coefficienten $A, B, \ldots, L, A', B', \ldots, L'$ sämmtlich rationale Zahlen sind und p, p' zwei von einander verschiedene Primzahlen bedeuten, so zeigen die gefundenen Gleichungen, dass nur diejenigen Coefficienten von Null verschieden sein können, für welche der zugehörige Potenzexponent von τ eine durch k theilbare Zahl ist, d. h. die Functionen unseres Systems hängen ganz und rational von τ^k ab, und wenn wir $\tau^k = t$ setzen, so wird

$$\begin{aligned} y_1+y_2+\cdots+y_\nu &= F_1(t), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_1 y_2 \cdots y_\nu &= F_\nu(t), \end{aligned}$$

wo $F_1(t), \ldots, F_\nu(t)$ ganze rationale Functionen von t mit rationalen Zahlencoefficienten sind. Das gefundene Resultat zeigt, dass die ganze rationale Function $g(y, t)$ durch die ganze rationale Function

$$\Psi(y, t) = y^\nu - F_1(t) y^{\nu-1} + F_2(t) y^{\nu-2} + \cdots + (-1)^\nu F_\nu(t)$$

theilbar sein muss, d. h. es ist

$$g(y, t) = \Psi(y, t) \Psi'(y, t),$$

wo Ψ und Ψ' ganze rationale Functionen von y und t mit rationalen Zahlencoefficienten bedeuten. Mittelst der Substitution $y = xT$ erhalten wir hieraus für die ursprünglich vorgelegte Function die Gleichung

$$f(x, t) = \frac{\Phi(x, t) \Phi'(x, t)}{AT^{n-1}},$$

wo $\Phi(x, t)$ und $\Phi'(x, t)$ ganze rationale Functionen von x und t mit ganzzahligen Coefficienten bedeuten, während A eine ganze Zahl und

T eine ganze ganzzahlige Function der einen Veränderlichen t ist. Bezeichnet dann P irgend eine in A oder in sämmtlichen Coefficienten von T aufgehende Primzahl, so wird der Quotient

$$\frac{\Phi(x, t)\Phi'(x, t)}{P}$$

gleich einer ganzen ganzzahligen Function von x und t, und hieraus folgt leicht durch bekannte Schlüsse, dass entweder die sämmtlichen Coefficienten von $\Phi(x, t)$ oder diejenigen von $\Phi'(x, t)$ durch P theilbar sein müssen. Wenn ferner $U(t)$ eine ganze ganzzahlige irreducible in T aufgehende Function von t bezeichnet, so wird der Quotient

$$\frac{\Phi(x, t)\Phi'(x, t)}{U(t)}$$

ebenfalls gleich einer ganzen ganzzahligen Function von x und t, und hieraus folgt in ähnlicher Weise, dass entweder in $\Phi(x, t)$ oder in $\Phi'(x, t)$ die sämmtlichen Potenzen von x mit Functionen von t multiplicirt sind, welche die Function $U(t)$ als Factor enthalten. Durch Fortheben der sämmtlichen Primzahlen P und irreduciblen Functionen $U(t)$ gelangen wir zu einer Gleichung von der Gestalt

$$f(x, t) = \varphi(x, t)\varphi'(x, t),$$

wo $\varphi(x, t)$ und $\varphi'(x, t)$ ganze rationale Functionen von x und t mit ganzzahligen Coefficienten sind. Diese Gleichung sagt aus, dass die ursprünglich vorgelegte Function $f(x, t)$ reducibel ist. Da aber diese Folgerung mit der Voraussetzung unseres Theorems in Widerspruch steht, so ist unsere anfangs gemachte Annahme unzulässig, d. h. es giebt keine Grenze C derart, dass die vorgelegte Function $f(x, t)$ für alle diese Grenze C überschreitenden ganzzahligen Werthe von t reducibel wird, und damit ist der Beweis unseres Theorems vollständig erbracht.

Der Kürze wegen habe ich die ganze Untersuchung so geführt, dass dieselbe nur die Existenz einer Zahl t von der im Theorem verlangten Beschaffenheit erkennen lässt. Es kann jedoch die Entwickelung ohne Schwierigkeit so ergänzt werden, dass aus derselben zugleich hervorgeht, wie sich eine solche Zahl t mittelst Rechnung durch eine endliche Anzahl von Handlungen wirklich finden lässt, sobald eine bestimmte ganzzahlige Function vorgelegt ist.

Im Folgenden beschäftigen wir uns mit einigen Verallgemeinerungen und Anwendungen des eben bewiesenen Theorems I. Dabei genüge hin-

sichtlich der Beweise der Sätze eine kurze Andeutung der anzuwendenden Schlüsse.

Zunächst nehmen wir an, es seien statt der einen irreduciblen Function $f(x, t)$ mehrere irreducible Functionen $f(x, t)$, $g(x, t)$, ..., $k(x, t)$ vorgelegt. Wir finden dann durch eine leicht erkennbare Abänderung des obigen Schlussverfahrens den folgenden Satz:

Wenn $f(x, t)$, $g(x, t)$, ..., $k(x, t)$ sämmtlich ganze ganzzahlige irreducible Functionen der beiden Veränderlichen x und t sind, so ist es stets auf unendlich viele Weisen möglich, für t eine ganze rationale Zahl einzusetzen, so dass dadurch jede dieser Functionen $f(x, t)$, $g(x, t)$, ..., $k(x, t)$ in eine irreducible Function der einen Veränderlichen x übergeht.

Sprechen wir diese Thatsache für das Product $F(x, t)$ der sämmtlichen vorgelegten Functionen $f(x, t)$, $g(x, t)$, ..., $k(x, t)$ aus, so ergiebt sich der Satz:

In einer beliebig gegebenen ganzen ganzzahligen Function $F(x, t)$ der beiden Veränderlichen x und t lässt sich stets für t auf unendlich viele Weisen eine ganze Zahl derart einsetzen, dass in Bezug auf die Veränderliche x die entstehende Function genau in ebenso viele ganze ganzzahlige irreducible Functionen zerfällt, wie die ursprüngliche Function $F(x, t)$ bei unbestimmtem Parameter t.

Schwieriger ist es, unser Theorem I sowie die eben erwähnten Folgerungen auf den Fall auszudehnen, dass die gegebenen Functionen statt der einen Veränderlichen x beliebig viele Veränderliche $x, y, \ldots, w$ und statt des einen Parameters t beliebig viele Parameter $t, r, \ldots, q$ enthalten. Um diesen allgemeinsten Fall zu behandeln, beweisen wir zunächst den folgenden Satz:

Wenn $F(x, t, r, \ldots, q)$ eine irreducible ganze ganzzahlige Function der Veränderlichen x und der Parameter $t, r, \ldots, q$ bezeichnet, so kann man stets für $t, r, \ldots, q$ lineare ganze ganzzahlige Functionen eines Parameters u einsetzen, so dass dadurch die Function $F(x, t, r, \ldots, q)$ in eine irreducible Function der beiden Veränderlichen x und u übergeht.*)

Es sei

$$F(x, t, r, \ldots, q) = fx^n + f_1 x^{n-1} + \cdots + f_n,$$

*) Vgl. die von *L. Kronecker* zu ähnlichem Zwecke angegebene Substitution: Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen, dieses Journal Bd. 92, S. 11.

wo $f, f_1, \ldots, f_n$ ganze ganzzahlige Functionen von $t, r, \ldots, q$ sind. Setzen wir hierin $x = \frac{y}{f}$ ein und multipliciren dann mit f^{n-1}, so ergiebt sich eine Function, welche ebenfalls irreducibel ist und die Gestalt

$$G(y, t, r, \ldots, q) = y^n + g_1 y^{n-1} + \cdots + g_n$$

besitzt, wo $g_1, \ldots, g_n$ wiederum ganze ganzzahlige Functionen von $t, r, \ldots, q$ sind. Wir bilden die Discriminante D des Ausdruckes rechter Hand; dieselbe ist eine ganze Function von $t, r, \ldots, q$, welche nicht identisch für alle Werthe dieser Parameter verschwinden kann, da in diesem Falle $G(y, t, r, \ldots, q)$ einen quadratischen Factor enthalten und somit reducibel sein müsste. Wir bestimmen ein System von ganzen rationalen Zahlen

$$t = t_0, \quad r = r_0, \quad \ldots, \quad q = q_0,$$

für welche D nicht Null ist, und setzen diese ganzzahligen Werthe in die Function $G(y, t, r, \ldots, q)$ ein. Die so entstehende Function von y zerlegen wir in ihre irreduciblen ganzen ganzzahligen Factoren: es sei

$$G(y, t_0, r_0, \ldots, q_0) = \varphi(y) \cdots \chi(y),$$

wo $\varphi(y), \ldots, \chi(y)$ ganze ganzzahlige Functionen beziehentlich vom νten, …, μten Grade in y sind.

Nunmehr betrachten wir die durch die Gleichung

$$G(y, t, r, \ldots, q) = 0$$

bestimmte algebraische Function y; die Entwickelung dieser Function an der Stelle $t = t_0, r = r_0, \ldots, q = q_0$ liefert n Potenzreihen, welche nach ganzen positiven Potenzen der Grössen

$$t' = t - t_0, \quad r' = r - r_0, \quad \ldots, \quad q' = q - q_0$$

fortschreiten und von folgender Gestalt sind

$$\begin{aligned}
y_1 &= \Sigma \alpha_1^{(\tau, \varrho, \ldots, \varkappa)} t'^{\tau} r'^{\varrho} \ldots q'^{\varkappa}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_\nu &= \Sigma \alpha_\nu^{(\tau, \varrho, \ldots, \varkappa)} t'^{\tau} r'^{\varrho} \ldots q'^{\varkappa}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_{n-\mu+1} &= \Sigma \gamma_1^{(\tau, \varrho, \ldots, \varkappa)} t'^{\tau} r'^{\varrho} \ldots q'^{\varkappa}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_n &= \Sigma \gamma_\mu^{(\tau, \varrho, \ldots, \varkappa)} t'^{\tau} r'^{\varrho} \ldots q'^{\varkappa}.
\end{aligned}$$

$(\tau, \varrho, \ldots, \varkappa = 1, 2, 3, \ldots)$

Dabei sind die constanten Glieder der ν ersten Potenzreihen $\alpha_1^{(0,0,\ldots,0)}, \ldots,$

$\alpha_\nu^{(0,0,\ldots,0)}$ gleich den ν Wurzeln der Gleichung $\varphi(y)=0$ und die constanten Glieder der μ letzten Potenzreihen $\gamma_1^{(0,0,\ldots,0)}, \ldots, \gamma_\mu^{(0,0,\ldots,0)}$ sind gleich den μ Wurzeln der Gleichung $\chi(y)=0$. Wir bilden jetzt die elementarsymmetrischen Functionen der ν ersten Entwickelungen und erhalten dadurch die folgenden ν Potenzreihen

$$\begin{aligned} y_1+\cdots+y_\nu &= \Sigma \mathsf{A}_1^{(\tau,\varrho,\ldots,\varkappa)} t'^\tau r'^\varrho \ldots q'^\varkappa, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_1 \ldots y_\nu &= \Sigma \mathsf{A}_\nu^{(\tau,\varrho,\ldots,\varkappa)} t'^\tau r'^\varrho \ldots q'^\varkappa; \end{aligned}$$
$$(\tau, \varrho, \ldots, \varkappa = 1, 2, 3, \ldots)$$

so fortfahrend bilden wir schliesslich die elementarsymmetrischen Functionen der μ letzten Entwickelungen, wie folgt:

$$\begin{aligned} y_{n-\mu+1}+\cdots+y_n &= \Sigma \Gamma_1^{(\tau,\varrho,\ldots,\varkappa)} t'^\tau r'^\varrho \ldots q'^\varkappa, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{n-\mu+1} \ldots y_n &= \Sigma \Gamma_\mu^{(\tau,\varrho,\ldots,\varkappa)} t'^\tau r'^\varrho \ldots q'^\varkappa. \end{aligned}$$
$$(\tau, \varrho, \ldots, \varkappa = 1, 2, 3, \ldots)$$

Wir sind somit zu Systemen von Potenzreihen gelangt, von denen das erste System aus ν Potenzreihen und das letzte System aus μ Potenzreihen besteht: die Coefficienten $\mathsf{A}, \ldots, \Gamma$ dieser Potenzreihen sind rationale Zahlen, und es brechen jedenfalls die Potenzreihen eines Systems nicht sämmtlich im Endlichen ab; denn dieser Umstand hätte, wie man leicht zeigt, die Reducibilität der Function $G(y, t, r, \ldots, q)$ zur Folge. Wir combiniren nunmehr noch die verschiedenen Systeme von Potenzentwickelungen unter einander, z. B. die Entwickelungen $y_1, \ldots, y_\nu$ und $y_{n-\mu+1}, \ldots, y_n$, und stellen dann auch für diese combinirten Systeme die elementarsymmetrischen Functionen auf, so dass wir schliesslich zu einer jeden irreduciblen oder reduciblen in $G(y, t_0, r_0, \ldots, q_0)$ aufgehenden ganzzahligen Function je ein System von Potenzreihen mit folgenden Eigenschaften erhalten: die Coefficienten der Potenzreihen sind rationale Zahlen, und es brechen jedenfalls die Potenzreihen eines Systems nicht sämmtlich im Endlichen ab.

Nachdem dies geschehen ist, setzen wir

$$t' = t_1 u, \quad r' = r_1 u, \quad \ldots, \quad q' = q_1 u$$

und verwandeln dadurch unsere Potenzreihen in Potenzreihen der einen Veränderlichen u: es ist dann unsere Aufgabe zu zeigen, dass man stets für $t_1, r_1, \ldots, q_1$ ganze rationale Zahlen so wählen kann, dass auch nach dieser Substitution die Potenzreihen eines Systems nicht sämmtlich im Endlichen abbrechen. Um diesen Beweis zu führen, bezeichnen wir mit E

eine Zahl, welche grösser ist als die Summe der Exponenten der höchsten Potenzen von $t, r, \ldots, q$, welche in dem Ausdruck $G(y, t, r, \ldots, q)$ vorkommen. Es sei ferner $\mathsf{A} t'^{\tau_\alpha} r'^{\varrho_\alpha} \ldots q'^{\varkappa_\alpha}$ ein solches Glied in einer dem ersten System angehörigen Potenzreihe, für welches der Coefficient A von Null verschieden ist und ausserdem die Exponentensumme $\tau_\alpha + \varrho_\alpha + \cdots + \varkappa_\alpha$ die Zahl E übertrifft; wir wählen auch in jedem der übrigen Systeme von Potenzreihen ein Glied von der nämlichen Beschaffenheit aus, und es sei etwa $\Gamma t'^{\tau_\gamma} r'^{\varrho_\gamma} \ldots q'^{\varkappa_\gamma}$ ein Glied in dem zum Factor χ gehörigen Systeme, dessen Coefficient Γ von Null verschieden und wo $\tau_\gamma + \varrho_\gamma + \cdots + \varkappa_\gamma$ grösser als die Zahl E ist. Wie eine einfache Ueberlegung zeigt, kann man für $t_1, r_1, \ldots, q_1$ ganze rationale Zahlen derart wählen, dass in den so entstehenden Potenzreihen der Veränderlichen u beziehentlich die mit

$$u^{\tau_\alpha + \varrho_\alpha + \cdots + \varkappa_\alpha}, \quad \ldots, \quad u^{\tau_\gamma + \varrho_\gamma + \cdots + \varkappa_\gamma}, \quad \ldots$$

multiplicirten Glieder Coefficienten haben, welche von Null verschieden sind. Hieraus folgt aber, dass die einem und dem nämlichen System angehörigen Potenzreihen für die Veränderliche u nicht sämmtlich im Endlichen abbrechen können; denn wäre dies der Fall, so müsste nothwendig die Function $G(y, t, r, \ldots, q)$ nach Einführung der Werthe

$$t = t_1 u + t_0, \quad r = r_1 u + r_0, \quad \ldots, \quad q = q_1 u + q_0$$

in eine Function von y und u übergehen, welche in zwei oder mehr ganze ganzzahlige Factoren zerfällt. Es würde aber dieser Umstand seinerseits erfordern, dass in den sämmtlichen dem Systeme angehörigen Potenzreihen die Coefficienten aller derjenigen Glieder verschwinden, für welche der Exponent der Potenz von u die Zahl E überschreitet, und letzteres ist thatsächlich nicht der Fall. Damit haben wir bewiesen, dass auch nach Ausführung jener Substitution die Potenzreihen eines Systems nicht sämmtlich im Endlichen abbrechen, und hieraus wiederum folgt, dass die aus $G(y, t, r, \ldots, q)$ vermöge jener Substitution entstehende Function der beiden Veränderlichen y und u nothwendig irreducibel ist. Wenn wir jetzt in der ursprünglich vorgelegten Function $F(x, t, r, \ldots, q)$ jene Substitution ausführen, so folgt, dass die entstehende Function der beiden Veränderlichen x und u jedenfalls nicht in mehrere von x abhängige Factoren zerfallen kann. Es bliebe mithin nur noch die Möglichkeit übrig, dass die aus $F(x, t, r, \ldots, q)$ vermöge jener Substitution entstehende Function einen Factor besitzt, welcher allein die Veränderliche u enthält. Man kann aber, wie ersichtlich ist, die

ganzen Zahlen $t_1, r_1, \ldots, q_1$ zugleich so wählen, dass auch dieser Fall nicht eintritt. Damit ist der Beweis für den vorhin ausgesprochenen Satz vollständig erbracht. Mit Hülfe dieses Satzes beweisen wir jetzt das folgende allgemeine Theorem:

II. *Wenn $F(x, y, \ldots, w; t, r, \ldots, q)$ eine irreducible ganze ganzzahlige Function der Veränderlichen $x, y, \ldots, w$ und der Parameter $t, r, \ldots, q$ bezeichnet, so ist es stets auf unendlich viele Weisen möglich, für die Parameter $t, r, \ldots, q$ ganze rationale Zahlen einzusetzen, so dass dadurch die Function $F(x, y, \ldots, w; t, r, \ldots, q)$ in eine irreducible Function der Veränderlichen $x, y \ldots, w$ übergeht.*

Wenn wir in der vorgelegten Function $F(x, y, \ldots, w; t, r, \ldots, q)$ die Substitution

$$y = \eta x, \quad \ldots, \quad w = \omega x$$

vornehmen und dann die etwa als gemeinsamer Factor auftretende Potenz von x fortlassen, so entsteht eine Function $G(x, \eta, \ldots, \omega, t, r, \ldots, q)$ der Veränderlichen x und der Parameter $\eta, \ldots, \omega, t, r, \ldots, q$, welche ebenfalls irreducibel ist. Wir setzen zunächst nach dem eben bewiesenen Satze für diese Parameter lineare ganzzahlige Functionen eines einzigen Parameters u ein, nämlich

$$\eta = \eta_1 u + \eta_0, \quad \ldots, \quad \omega = \omega_1 u + \omega_0,$$
$$t = t_1 u + t_0, \quad \ldots, \quad q = q_1 u + q_0,$$

so dass jene Function übergeht in eine irreducible Function $g(x, u)$ der beiden Veränderlichen x und u. Es lässt sich dann nach unserem Theoreme I. für u eine ganze rationale Zahl u_0 einsetzen, so dass die Function $g(x, u_0)$ eine irreducible Function der einen Veränderlichen x wird. Nunmehr erkennen wir, dass die ursprünglich vorgelegte Function $F(x, y, \ldots, w; t, r, \ldots, q)$ nothwendig in eine irreducible Function der Veränderlichen $x, y, \ldots, w$ übergeht, wenn wir für die Parameter die ganzen Zahlen

$$t = t_1 u_0 + t_0, \quad r = r_1 u_0 + r_0, \quad \ldots, \quad q = q_1 u_0 + q_0$$

einsetzen; denn die so entstehende Function würde in eine irreducible Function der einen Veränderlichen x übergehen, wenn wir überdies noch setzen:

$$y = (\eta_1 u_0 + \eta_0) x, \quad \ldots, \quad w = (\omega_1 u_0 + \omega_0) x$$

und von einer etwa als Factor auftretenden Potenz der Veränderlichen x absehen. Damit ist der verlangte Nachweis geführt.

Wir haben bisher in allen unseren Entwickelungen und Betrachtungen über die Irreducibilität stets den Bereich der rationalen Zahlen zu Grunde gelegt: eine ganze Function wurde dann kurzweg irreducibel genannt, wenn sie sich nicht als Product von mehreren ganzen Functionen mit ganzzahligen rationalen Coefficienten darstellen liess. Es ist jetzt nothwendig, die gefundenen Sätze auf den Fall eines beliebigen durch eine algebraische Zahl bestimmten Rationalitätsbereiches auszudehnen. Wir nennen dementsprechend, wie es üblich ist, eine ganze rationale Function, deren Coefficienten einem gegebenen durch eine algebraische Zahl bestimmten Rationalitätsbereiche angehören, irreducibel in diesem Bereiche, wenn sie nicht als Product von mehreren ganzen rationalen Functionen dargestellt werden kann, deren Coefficienten in eben jenem Rationalitätsbereiche liegen. Es gilt dann das folgende Theorem:

III. *Wenn die Function $F(x, y, \ldots, w; t, r, \ldots, q)$ in einem gewissen durch eine algebraische Zahl bestimmten Rationalitätsbereiche irreducibel ist, so ist es stets auf unendlich viele Weisen möglich, in dieser Function $F(x, y, \ldots, w; t, r, \ldots, q)$ für die Parameter $t, r, \ldots, q$ ganze rationale Zahlen einzusetzen, so dass dadurch diese Function in eine Function der Veränderlichen $x, y, \ldots, w$ übergeht, welche in eben jenem Rationalitätsbereiche irreducibel ist.*

Das eben ausgesprochene Theorem III. lässt sich auf das Theorem II. zurückführen, und zwar mit Hülfe eines Verfahrens, welches *L. Kronecker**) anwendet, um in einem beliebigen Rationalitätsbereiche die Zerlegung einer ganzen rationalen Function in ihre irreducibeln Factoren zu bewirken. Wir sorgen nöthigenfalls zunächst durch Multiplication mit einer Zahl des gegebenen Bereiches und durch geeignete Transformation der Veränderlichen dafür, dass die Function F mindestens ein Glied mit einem ganzen rationalen Coefficienten enthält, und dass ausserdem alle zu F conjugirten Functionen von einander verschieden sind. Wir bilden das Product dieser sämmtlichen conjugirten Functionen und erhalten dann nach Multiplication mit einer geeigneten ganzen rationalen Zahl eine ganze rationale Function G von $x, y, \ldots, w, t, r, \ldots, q$ mit ganzen rationalen Coefficienten, welche im Bereiche der rationalen Zahlen irreducibel ist. Es lassen sich daher

---

*) Vgl. Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen, dieses Journal Bd. 92 S. 12 und 13.

zufolge des Theorems II. für $t, r, \ldots, q$ ganze rationale Zahlen so bestimmen, dass nach deren Einsetzung G in eine Function der Veränderlichen $x, y, \ldots, w$ übergeht, welche im Bereiche der rationalen Zahlen irreducibel ist. Wie leicht gezeigt werden kann, geht dann die ursprünglich vorgelegte Function $F(x, y, \ldots, w; t, r, \ldots, q)$ nach Einsetzung der nämlichen ganzzahligen Werthe für $t, r, \ldots, q$ in eine Function der Veränderlichen $x, y, \ldots, w$ über, welche in dem gegebenen durch jene algebraische Zahl bestimmten Rationalitätsbereiche irreducibel ist.

Wir wenden nun die gewonnenen Resultate auf die Theorie der Gleichungen an. Es sei eine Gleichung $n$ten Grades in x vorgelegt von der Gestalt

$$F_0 x^n + F_1 x^{n-1} + \cdots + F_n = 0,$$

deren Coefficienten $F_0, F_1, \ldots, F_n$ ganze rationale Functionen der Parameter $t, r, \ldots, q$ mit ganzen rationalen Zahlencoefficienten sind. Um die Gruppe Γ der Gleichung in dem durch die rationalen Zahlen und die Parameter $t, r, \ldots, q$ bestimmten Rationalitätsbereiche zu finden, bilden wir das über alle Permutationen $i_1, i_2, \ldots, i_n$ der n Zahlen $1, 2, \ldots, n$ erstreckte Product:

$$\Pi(u + x_{i_1} u_1 + x_{i_2} u_2 + \cdots + x_{i_n} u_n),$$

wo $u, u_1, u_2, \ldots, u_n$ unbestimmte Parameter und $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die n Wurzeln der Gleichung bedeuten. Dieses Product Π wird nach Multiplication mit $F_0^{n!}$ eine ganze ganzzahlige Function der Unbestimmten $u, u_1, u_2, \ldots, u_n, t, r, \ldots, q$, und wenn $G(u, u_1, \ldots, u_n, t, r, \ldots, q)$ ein ganzer ganzzahliger im Bereiche der rationalen Zahlen irreducibler Factor dieser Function ist, so wird die gesuchte Gruppe Γ durch diejenigen Permutationen bestimmt, welche die Function G ungeändert lassen. Wie wir jetzt mit Hülfe der obigen Entwickelungen zeigen wollen, *kann man in die vorgelegte Gleichung auf unendlich viele Weisen für die Parameter $t, r, \ldots, q$ ganze rationale Zahlen derart einsetzen, dass die so entstehende ganzzahlige Gleichung im Bereiche der rationalen Zahlen die nämliche Gruppe Γ besitzt.* Um dies zu beweisen, berechnen wir die Discriminante D der vorgelegten Gleichung; dieselbe wird nach Multiplication mit einer Potenz von F_0 eine ganze ganzzahlige nicht identisch verschwindende Function der Parameter $t, r, \ldots, q$. Wir können dann nach Theorem II. zunächst für t unbegrenzt viele ganze rationale Zahlen bestimmen, nach deren Einsetzung G eine im

Bereich der rationalen Zahlen irreducible Function der Veränderlichen u, $u_1, \ldots, u_n, r, \ldots, q$ wird. Unter diesen ganzen rationalen Zahlen t wählen wir eine solche aus, für welche D nicht identisch verschwindet. Hierauf bestimmen wir eine ganze rationale Zahl r, bei deren Einsetzung die Function G eine im Bereiche der rationalen Zahlen irreducible Function der übrig bleibenden Veränderlichen wird, und für welche überdies die Discriminante D von Null verschieden bleibt. So fortfahrend erhalten wir für $t, r, \ldots, q$ ganze rationale Zahlen, nach deren Einsetzung G in eine ganze ganzzahlige irreducible Function g der Unbestimmten $u, u_1, \ldots, u_n$ übergeht, und für welche die Discriminante D der Gleichung eine von Null verschiedene rationale Zahl wird. Es ist nun einerseits offenbar, dass alle Substitutionen, welche G zulässt, auch die Function g nicht ändern können, und andererseits kann die Function g ausser diesen Substitutionen nicht noch andere Substitutionen zulassen, da die Ordnung der Gruppe für die entstehende ganzzahlige Gleichung jedenfalls nicht grösser als die Ordnung der Gruppe Γ sein kann: Γ ist mithin zugleich die Gruppe der durch Einsetzung jener ganzen Zahlen entstehenden ganzzahligen Gleichung.

Nehmen wir beispielsweise in einer Gleichung die Coefficienten selber als die unbestimmten Parameter $t, r, \ldots, q$ an, so ist die Gruppe Γ der Gleichung die symmetrische, und es folgt daher, ***dass es unbegrenzt viele Gleichungen $n$ten Grades mit ganzzahligen Coefficienten giebt, deren Gruppe im Bereiche der rationalen Zahlen die symmetrische Gruppe ist.***

Zu solchen Gleichungen kann man im Allgemeinen sogar gelangen, wenn man sich lediglich die geeignete Wahl des letzten Coefficienten in der Gleichung vorbehält. Um dies einzusehen, nehmen wir in der Gleichung

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + t = 0$$

die Coefficienten $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ als ganze rationale Zahlen irgendwie an mit der Einschränkung, dass die Gleichung

$$f'(x) = n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} = 0$$

lauter verschiedene Wurzeln besitzt und die Function $f(x)$ für diese Wurzeln lauter verschiedene Werthe annimmt. Die Discriminante der ersteren Gleichung wird dann eine ganze rationale Function $(n-1)$ten Grades in t, welche lauter verschiedene Linearfactoren besitzt. Aus diesem Umstande kann mit Hülfe derjenigen Principien, welche Herr *A. Hurwitz**) dargelegt hat, gefolgert werden,

*) Mathematische Annalen Bd. 39 S. 1.

dass die Monodromiegruppe jener Gleichung bezüglich des Parameters t die symmetrische ist*). Aus dem vorhin bewiesenen allgemeinen Satze ergiebt sich sodann, dass man in unserer Gleichung auf unendlich viele Weisen für den letzten Coefficienten t eine ganze Zahl derart einsetzen kann, dass die entstehende ganzzahlige Gleichung im Bereich der rationalen Zahlen die symmetrische Gruppe besitzt.

Durch ähnliche Schlüsse sind wir im Stande zu zeigen, *dass es unbegrenzt viele Gleichungen mit ganzen rationalen Zahlencoefficienten giebt, deren Gruppe im Bereiche der rationalen Zahlen die alternirende Gruppe ist.* Zum Beweise brauchen wir einige Sätze, deren Richtigkeit man ohne Schwierigkeit mittelst derjenigen Methoden erkennen kann, welche Herr *A. Hurwitz* in den vorhin angeführten Arbeiten auseinandersetzt. Der erste dieser Sätze lautet, wie folgt:

Es sei $f(x)$ eine ganze rationale Function der Veränderlichen x vom geraden Grade n, welche den Factor x^2 besitzt, und der Differentialquotient dieser Function habe die Gestalt

$$f'(x) = nx(x-a)^2(x-b)^2 \dots (x-k)^2;$$

dabei seien $a, b, \dots, k$ von Null und unter einander verschiedene Grössen, und auch die Werthe $f(a), f(b), \dots, f(k)$ seien unter einander verschieden: dann ist die Monodromiegruppe der Gleichung

$$f(x)+t^2 = 0$$

bezüglich des Parameters t gleich der alternirenden Gruppe.

Wir berechnen zunächst die Discriminante dieser Gleichung, indem wir uns dabei einer bekannten Formel für die Resultante zweier ganzen Functionen bedienen. Wenn nämlich $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zwei ganze rationale Functionen der Veränderlichen x vom Grade ν und μ und mit den Nullstellen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu$ und $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\mu$ bedeuten, und wenn wir dementsprechend

$$\varphi(x) = \alpha(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_\nu),$$
$$\psi(x) = \beta(x-\beta_1)(x-\beta_2)\dots(x-\beta_\mu)$$

setzen, so gilt die Formel

$$R(\varphi, \psi) = \beta^\nu \varphi(\beta_1)\varphi(\beta_2)\dots\varphi(\beta_\mu)$$
$$= (-1)^{\nu\mu}\alpha^\mu \psi(\alpha_1)\psi(\alpha_2)\dots\psi(\alpha_\nu).$$

---

*) Vgl. ausserdem *A. Hurwitz:* Ueber diejenigen algebraischen Gebilde, welche eindeutige Transformationen in sich zulassen. Nachrichten der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1887 S. 103, wo die oben von mir benutzte Thatsache ebenfalls zur Geltung kommt.

Mit Hülfe derselben finden wir für die Discriminante der obigen Gleichung, d. h. für das Product der quadrirten Wurzeldifferenzen, den Werth

$$D = n^n t^2 (f(a)+t^2)^2 (f(b)+t^2)^2 \dots (f(k)+t^2)^2,$$

und das Product der Wurzeldifferenzen selbst wird daher

$$D^{\frac{1}{2}} = n^{\frac{n}{2}} t (f(a)+t^2)(f(b)+t^2) \dots (f(k)+t^2).$$

Wir setzen jetzt für $a, b, \dots, k$ irgend welche rationalen positiven und von einander verschiedenen Zahlen. Nach Annahme dieser Zahlen ist $f(x)$ völlig bestimmt, und auch die Werthe $f(a), f(b), \dots, f(k)$ sind unter einander sämmtlich verschieden; denn es ist beispielsweise $f(b)-f(a)$ gleich dem von a bis b erstreckten Integrale über die in diesem Intervalle nirgends negative Function $f'(x)$. Da n eine gerade Zahl ist, so ist der gefundene Ausdruck für $D^{\frac{1}{2}}$ eine ganze rationale Function von t mit rationalen Zahlencoefficienten, und folglich ist auch die Gruppe der Gleichung in dem durch die rationalen Zahlen und den Parameter t bestimmten Bereiche gleich der alternirenden Gruppe. Man kann jetzt nach dem oben bewiesenen allgemeinen Satze auf unendlich viele Weisen für t eine ganze Zahl einsetzen, so dass die entstehende ganzzahlige Gleichung im Bereiche der rationalen Zahlen die alternirende Gruppe besitzt, und damit ist unsere Behauptung für Gleichungen geraden Grades bewiesen.

Um die entsprechende Thatsache für Gleichungen vom ungeraden Grade n einzusehen, benutzen wir einen Satz, welcher wiederum ohne Schwierigkeit aus den von Herrn *A. Hurwitz* entwickelten Principien gefolgert werden kann. Dieser Satz lautet:

Es sei $f(x)$ eine ganze rationale Function der Veränderlichen x vom ungeraden Grade n, welche mit ihrem Differentialquotienten $f'(x)$ durch die Formel

$$xf'(x)-f(x) = (n-1)(x-a)(x-b)^2(x-c)^2 \dots (x-k)^2$$

verbunden ist; dabei seien $a, b, c, \dots, k$ von Null und unter einander verschiedene Grössen, und auch die Werthe $f'(b), f'(c), \dots, f'(k)$ seien von einander verschieden: dann ist die Monodromiegruppe der Gleichung

$$f(x)+(t^2-f'(a))x = 0$$

bezüglich des Parameters t gleich der alternirenden Gruppe.

Indem wir uns der oben angegebenen Formel für die Resultante zweier ganzen Functionen und ausserdem der Formel

$$R(\varphi-x\psi, \psi) = R(\varphi, \psi)$$

bedienen, finden wir für die Discriminante jener Gleichung, d. h. für das Product der quadrirten Wurzeldifferenzen, den Werth

$$D = (n-1)^{n-1}t^2(t^2+f'(b)-f'(a))^2(t^2+f'(c)-f'(a))^2 \ldots (t^2+f'(k)-f'(a))^2,$$

und das Product der Wurzeldifferenzen selbst wird daher

$$D^{\frac{1}{2}} = (n-1)^{\frac{n-1}{2}}t(t^2+f'(b)-f'(a))(t^2+f'(c)-f'(a)) \ldots (t^2+f'(k)-f'(a)).$$

Wir wählen jetzt für $b, c, \ldots, k$ irgend welche rationalen positiven und von einander verschiedenen Zahlen und setzen

$$a = -\frac{1}{2\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\cdots+\frac{1}{k}\right)}.$$

In Folge der letzteren Annahme verschwindet auf der rechten Seite der Formel

$$xf'(x)-f(x) = (n-1)(x-a)(x-b)^2(x-c)^2 \ldots (x-k)^2$$

der Coefficient von x, gerade wie dies auf der linken Seite der Fall ist, und es lässt sich deswegen eine ganze rationale Function $f(x)$ vom $n$ten Grade mit rationalen Zahlencoefficienten bestimmen, welche dieser Formel genügt. Diese Function $f(x)$ besitzt zugleich die Eigenschaft, dass die Werthe $f'(b), f'(c), \ldots, f'(k)$ sämmtlich von einander verschieden sind; denn es ist beispielsweise

$$f'(c)-f'(b) = \frac{f(c)}{c} - \frac{f(b)}{b} = \int_b^c \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}\,dx,$$

und hierin wird die unter dem Integralzeichen stehende Function zwischen den Integrationsgrenzen nirgends negativ. Da n eine ungerade Zahl ist, so ist der gefundene Ausdruck für $D^{\frac{1}{2}}$ eine ganze rationale Function von t mit rationalen Zahlencoefficienten, und folglich ist auch die Gruppe der Gleichung in dem durch die rationalen Zahlen und den Parameter t bestimmten Bereiche gleich der alternirenden Gruppe. Man kann jetzt nach dem oben bewiesenen allgemeinen Satze auf unendlich viele Weisen für t eine ganze Zahl einsetzen, so dass die entstehende ganzzahlige Gleichung im Bereiche der rationalen Zahlen die alternirende Gruppe besitzt, und damit ist unsere Behauptung auch für Gleichungen ungeraden Grades bewiesen.

Mit Hülfe des Theorems III. lassen sich die bisher über die Gruppe einer Gleichung angestellten Betrachtungen auf beliebige durch eine algebraische Zahl bestimmte Rationalitätsbereiche ausdehnen. Wir gelangen so durch die entsprechenden Schlüsse zu dem folgenden Satze:

IV. ***Es sei eine algebraische Zahl $\Re$ und ausserdem eine Gleichung $n$ten Grades von der Gestalt***

$$F_0 x^n + F_1 x^{n-1} + \cdots + F_n = 0$$

gegeben; die Coefficienten F_0, F_1, ..., F_n seien ganze rationale Functionen der Parameter t, r, ..., q, deren Coefficienten Zahlen des durch $\Re$ bestimmten Rationalitätsbereiches sind. Ist dann Γ die Gruppe der Gleichung in dem durch die algebraische Zahl $\Re$ und durch die Parameter t, r, ..., q bestimmten Rationalitätsbereiche, so lassen sich stets auf unendlich viele Weisen für die Parameter t, r, ..., q ganze rationale Zahlen einsetzen derart, dass die so entstehende numerische Gleichung in dem durch die algebraische Zahl $\Re$ bestimmten Rationalitätsbereiche eben jene Gruppe Γ besitzt.

Dieser Satz bietet ein principielles Interesse, indem er zeigt, dass die formal in den Coefficienten der Gleichung und im Rationalitätsbereiche auftretenden Parameter stets durch ganze rationale Zahlen ersetzt werden können, sobald es sich lediglich um die gruppentheoretischen Eigenschaften der Gleichung handelt: man vermeidet also auf diesem Wege die Adjunction algebraischer Functionen.

Um zu zeigen, wie sich mit den gewonnenen Mitteln der Begriff der Monodromiegruppe in arithmetischer Weise erklären lässt, nehmen wir an, es sei eine Gleichung gegeben, deren Coefficienten ganze rationale Functionen des einen Parameters t sind, und die Coefficienten dieser ganzen rationalen Functionen seien Zahlen eines durch die Zahl $\Re$ bestimmten Rationalitätsbereiches. Wir setzen jetzt für t irgend eine ganze rationale Zahl ein und denken uns die Gruppen aller so entstehenden numerischen Gleichungen in dem durch $\Re$ bestimmten Rationalitätsbereiche aufgestellt. Es sei ferner $\mathfrak{A}$ eine algebraische Zahl, durch deren Adjunction die Gruppen jener Gleichungen sämmtlich eine Verkleinerung erleiden, und es gebe nun keine Zahl mehr, bei deren Adjunction eine weitere Verkleinerung sämmtlicher Gruppen eintritt. Diejenige von den verkleinerten Gruppen, welche die grösste Ordnung besitzt, stimmt überein mit der Monodromiegruppe der ursprünglich gegebenen Gleichung bezüglich des Parameters t.

Auf Grund des Theorems IV. können wir auch unsere früheren Sätze über die symmetrische und alternirende Gruppe verallgemeinern; wir finden dann folgende Thatsachen: ***wenn ein beliebiger durch eine algebraische Zahl bestimmter Rationalitätsbereich gegeben ist, so kann man stets Gleichungen mit rationalen Zahlencoefficienten angeben, deren Gruppe in jenem Rationalitäts-***

bereiche die symmetrische und ebenso solche, deren Gruppe in jenem Rationalitätsbereiche die alternirende ist. Es giebt also auch in jedem durch eine algebraische Zahl bestimmten Rationalitätsbereiche Gleichungen von beliebigem die Zahl vier übersteigendem Grade n mit rationalen Zahlencoefficienten, welche in jenem Bereiche durch Wurzelziehen nicht lösbar sind.

Ebenso zeigt man leicht, ***dass es unbegrenzt viele von einander verschiedene Bereiche von bestimmtem Grade n*** (Gattungsbereiche $n$ter Ordnung, Zahlenkörper $n$ten Grades) ***giebt, in denen — abgesehen vom Bereiche aller rationalen Zahlen — kein Bereich niederen Grades enthalten ist.*** Gäbe es nämlich nur eine endliche Anzahl solcher Bereiche, so vereinigen wir diese zu einem neuen Rationalitätsbereiche $\mathfrak{R}$. Nach den obigen Entwickelungen giebt es dann eine Gleichung $n$ten Grades mit rationalen Coefficienten, welche im Bereiche $\mathfrak{R}$ die symmetrische Gruppe besitzt. Diese Gleichung definirt dann offenbar einen Bereich $n$ten Grades, welcher von den eben angenommenen Bereichen $n$ten Grades verschieden ist und überdies keinen Bereich niederen Grades enthält. Entsprechend beweisen wir die allgemeinere Thatsache, dass es unbegrenzt viele Bereiche vom Grade $n = \nu\mu$ giebt, welche einen gegebenen Bereich νten Grades und — vom Bereiche aller rationalen Zahlen abgesehen — nur diesen enthalten.

In der vorstehenden Untersuchung ist lediglich die Existenz der Gleichungen und Bereiche von gewissen Eigenschaften behauptet und bewiesen worden. Es kann jedoch entsprechend dem oben bei Ableitung des Theorems I. hervorgehobenen Umstande die Entwickelung so ergänzt werden, dass aus derselben zugleich hervorgeht, wie sich jene Gleichungen und Bereiche wirklich durch Rechnung aufstellen lassen.

Zum Schluss erwähne ich noch einen Satz, welcher sich ebenfalls mit den oben benutzten Hülfsmitteln erledigen lässt, aber auch direct durch geeignete Anwendung von Potenzentwickelungen bewiesen werden kann. Dieser Satz lautet: Wenn eine algebraische Function von t für alle rationalen in einem beliebig kleinen Intervalle gelegenen Werthe stets selber rationale Werthe annimmt, so ist sie nothwendig eine rationale Function*).

*) Eine analytische Function kann sehr wohl für alle rationalen Argumente rationale Werthe annehmen, wie dies neuerdings von ***E. Strauss*** gezeigt worden ist.

Ueber die bei den linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung auftretenden Primformen.

(Von Herrn *Ludwig Schlesinger*.)

In einer Abhandlung*) hat Herr *Fuchs* hervorgehoben und an Beispielen dargethan, dass es unter den gewöhnlichen Differentialgleichungen jeder Ordnung und jeden Grades solche gebe, deren Lösungen für jeden beliebigen complexen Werth der unabhängigen Veränderlichen jedem Werthe beliebig nahe kommen können. Das heisst mit anderen Worten: Der zu einem beliebigen Werthe der unabhängigen Variabeln gehörige Werthvorrath einer solchen Lösung bildet eine Punktmenge, deren erste Ableitung**) die Gesammtheit aller complexen Werthe umfasst. Die Lösungen einer homogenen, linearen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten zeigen im Allgemeinen ein ähnliches Verhalten, indem nämlich der zu einem willkürlichen Werthe der unabhängigen Veränderlichen gehörige Werthvorrath einer Lösung eine Punktmenge bildet, deren erste Ableitung, wenn auch nicht die ganze Ebene, so doch einen oder mehrere zusammenhängende Theile derselben vollständig bedeckt. Bei besonderer Wahl der Coefficienten der Differentialgleichung kann es sich jedoch ereignen, dass die zu einem willkürlichen Werthe der unabhängigen Variabeln gehörige Werthenmenge des allgemeinen Integrals aus *isolirten* Punkten besteht, d. h. so beschaffen ist, dass sich um jeden dieser Punkte eine Umgebung von endlicher Ausdehnung derart abgrenzen lässt, dass innerhalb derselben kein zweiter Punkt eben dieser Werthenmenge liegt. Für Differentialgleichungen zweiter Ordnung, wo man statt des allgemeinen Integrals den Quotienten eines Fundamentalsystems von Integralen betrachten kann, ist hierzu offenbar erforderlich und hinreichend, dass die Gruppe der Differentialgleichung eine

*) Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1885 I, S. 5 ff.

**) *G. Cantor*, Mathematische Annalen Bd. 5.

discontinuirliche sei*), und dass die Stellen, wo dieselbe uneigentlich discontinuirlich ist**), keine Flächen sondern höchstens Linien erfüllen. Das heisst nichts anderes, als dass jede in der Gruppe enthaltene elliptische Substitution eine periodische sein muss, und dass die Doppelpunkte der parabolischen, hyperbolischen und loxodromischen Substitutionen Linien erfüllen, welche die Ebene in zwei oder mehrere zusammenhängende Bereiche theilen***). Diese Bedingung ist allemal erfüllt, wenn die unabhängige Variable eine eindeutige Function des Quotienten zweier Fundamentalintegrale ist; da dies aber nicht für jede Differentialgleichung mit discontinuirlicher Gruppe (wir bezeichnen kurz durch diesen Ausdruck eine Gruppe, welche nicht nur keine infinitesimale Substitution enthält, sondern auch mit Ausnahme von Linien in der Nähe jedes Punktes eigentlich discontinuirlich, also in der Bezeichnung von Herrn *Poincaré* ein groupe fuchsien oder kleinéen ist) der Fall zu sein braucht, erkennt man, dass es lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung giebt, in denen zwar die unabhängige Variable ξ eine mehrdeutige Function des Integralquotienten η, dieser als Function von ξ betrachtet aber trotzdem so beschaffen ist, dass sein zu einem willkürlichen Werthe von ξ gehöriger Werthvorrath aus isolirten Punkten besteht.

In dem allgemeinen Falle einer Differentialgleichung zweiter Ordnung mit continuirlicher Gruppe gewinnt man die beste Uebersicht über den Werthvorrath eines Integralquotienten η, wenn man diesen und die unabhängige Variable ξ als eindeutige Functionen eines Parameters t darstellt, und es erhellt die Wichtigkeit der den discontinuirlichen Gruppen entsprechenden Fälle schon daraus, dass, wie zuerst Herr *Poincaré* gezeigt hat, dieser Parameter t eben als Integralquotient einer gewissen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit discontinuirlicher Gruppe gewählt werden kann. Aber auch noch von einem anderen Gesichtspunkte aus tritt die ausgezeichnete Stellung der Differentialgleichungen mit discontinuirlicher Gruppe hervor. Während im Falle einer continuirlichen Gruppe die functionale Beziehung zwischen dem Integralquotienten η und der unabhängigen Variabeln ξ nur durch zwei eindeutige Gleichungen, die noch eine dritte Variable t enthalten, definirt werden kann, ist diese Beziehung im Falle

*) *Poincaré*, Acta Mathematica Bd. I, S. 8, § 3.
**) *Poincaré*, ebenda Bd. III, S. 57, § 2.
***) Vgl. *Klein*, Mathematische Annalen Bd. 21.

einer discontinuirlichen Gruppe stets durch eine oder mehrere eindeutige Gleichungen ***zwischen*** η ***und*** ξ ***allein*** darstellbar. Diese Thatsache, deren Nachweis im Folgenden geliefert werden soll, lässt die Klasse der Differentialgleichungen mit discontinuirlicher Gruppe als die den algebraisch integrirbaren am nächsten stehende erscheinen, indem für die letzteren jene eindeutigen Gleichungen sich einfach auf *eine* gleich Null gesetzte ganze rationale Function von ξ und η reduciren. Die Analogie zwischen den Differentialgleichungen mit discontinuirlicher Gruppe und jenen mit durchaus algebraischen Integralen wird noch durch den Umstand erhöht, dass die Theorie der Primformen, auf welche Herr ***Fuchs****) die Theorie der algebraisch integrirbaren Differentialgleichungen zweiter Ordnung gegründet, eine fast vollständige Uebertragung auf Differentialgleichungen mit discontinuirlicher Gruppe zulässt; nach dieser Richtung hin suchen die nachstehenden Bemerkungen jene Analogie zu verfolgen. In einem folgenden Aufsatze soll dann insbesondere die Frage erörtert werden, unter welchen Bedingungen die Anzahl der Werthe der unabhängigen Variabeln, für welche, auf geeigneten Wegen fortgesetzt, der Integralquotient einen und denselben Werth erreicht, eine endliche ist; auch behalte ich mir vor, bei nächster Gelegenheit eine Verallgemeinerung der hier begonnenen Untersuchung auf Differentialgleichungen von höherer als der zweiten Ordnung zu unternehmen. — Während der Drucklegung des vorliegenden, der Journal-Redaction Anfangs Februar d. J. eingereichten Aufsatzes wurde mir die Dissertation des Herrn ***Ernst Ritter*** „Die eindeutigen automorphen Formen vom Geschlecht Null“ (Mathematische Annalen Bd. 41) durch die Güte des Herrn Verfassers zugesandt. Dieselbe bietet, insbesondere in den §§ 8—10, Berührungspunkte mit den nachfolgenden Betrachtungen dar; ich möchte es deshalb nicht unterlassen, an dieser Stelle auf die erwähnte Arbeit hinzuweisen.

I.

Ist in einer homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\text{(A.)} \qquad \frac{d^2\mathfrak{y}}{d\xi^2} = Q(\xi)\mathfrak{y}$$

$Q(\xi)$ eine rationale Function von ξ, so genügt bekanntlich der Quotient η eines Fundamentalsystems von Integralen der Differentialgleichung dritter

*) Dieses Journal Bd. 81, S. 97 ff.; Bd. 85, S. 1 ff.

Ordnung

$$\Delta\left(\frac{\eta}{\xi}\right)=\frac{3\left(\frac{d^2\eta}{d\xi^2}\right)^2-2\frac{d\eta}{d\xi}\frac{d^3\eta}{d\xi^3}}{4\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}=Q(\xi),$$

und wenn, wie wir im Folgenden stets voraussetzen, die Integrale dieser Differentialgleichung überall bestimmt sind*), ist

$$Q(\xi)=\frac{\varphi(\xi)}{\prod_{\varkappa=1}^{\sigma}(\xi-b_\varkappa)^2},$$

wo $\varphi(\xi)$ eine ganze Function vom höchstens $(\sigma-2)$ten Grade bedeutet. Ein Fundamentalsystem der Gleichung (A.) wird, wie man weiss, geliefert durch die beiden Integrale

$$(1.)\qquad \mathfrak{y}_1=\left(\frac{d\xi}{d\eta}\right)^{\frac{1}{2}},\quad \mathfrak{y}_2=\eta\mathfrak{y}_1,$$

und um die Gruppe der Substitutionen zu finden, welche η beziehungsweise $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{y}_2$ erleiden, wenn ξ alle möglichen Umläufe vollzieht, hat man bekanntlich**) folgendermassen zu verfahren. — Es sei $\mathfrak{y}_{\varkappa 1}$, $\mathfrak{y}_{\varkappa 2}$ das zum singulären Punkte $\xi=b_\varkappa$ gehörige kanonische Fundamentalsystem, dann ist also entweder***)

$$(2.)\qquad \begin{cases}\mathfrak{y}_{\varkappa 1}=(\xi-b_\varkappa)^{r_\varkappa}\mathfrak{P}_{\varkappa 1}(\xi|b_\varkappa),\\ \mathfrak{y}_{\varkappa 2}=(\xi-b_\varkappa)^{1-r_\varkappa}\mathfrak{P}_{\varkappa 2}(\xi|b_\varkappa),\end{cases}$$

oder

$$(3.)\qquad \begin{cases}\mathfrak{y}_{\varkappa 1}=(\xi-b_\varkappa)^{r_\varkappa}\{(\xi-b_\varkappa)\mathfrak{P}_{\varkappa 1}(\xi|b_\varkappa)+B_\varkappa(\xi-b_\varkappa)^{1-2r_\varkappa}\mathfrak{P}_{\varkappa 2}(\xi|b_\varkappa)\log(\xi-b_\varkappa)\},\\ \mathfrak{y}_{\varkappa 2}=(\xi-b_\varkappa)^{1-r_\varkappa}\mathfrak{P}_{\varkappa 2}(\xi|b_\varkappa),\end{cases}$$

wo $\mathfrak{P}_{\varkappa 1}(\xi|b_\varkappa)$, $\mathfrak{P}_{\varkappa 2}(\xi|b_\varkappa)$ nach positiven ganzen Potenzen von $\xi-b_\varkappa$ fortschreitende Reihen, die für $\xi=b_\varkappa$ nicht verschwinden, $r_\varkappa$ die in ihrem realen Theile algebraisch kleinere Wurzel der zu $\xi=b_\varkappa$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung bedeuten. Wenn im Falle (3.), wo $1-2r_\varkappa$ eine ganze Zahl ist, $B_\varkappa$ verschwindet, so ist in der Umgebung von $\xi=b_\varkappa$ jeder Integralquotient eindeutig; Herr ***Fuchs*** bezeichnet in seinen Vorlesungen einen solchen Punkt als ***unwesentlich singulären*** (point à apparence singulière bei Herrn

*) ***Fuchs***, Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1886, I, S. 281 ff.; dieses Journal Bd. 66, S. 146.

) ***Fuchs*, dieses Journal Bd. 75, S. 177 ff.

) ***Fuchs, dieses Journal Bd. 66, S. 131—139.

*Poincaré**)). — Wenn nun

$$\mathfrak{y}_{\varkappa 1} = a_{11}^{(\varkappa)}\mathfrak{y}_1 + a_{12}^{(\varkappa)}\mathfrak{y}_2,$$
$$\mathfrak{y}_{\varkappa 2} = a_{21}^{(\varkappa)}\mathfrak{y}_1 + a_{22}^{(\varkappa)}\mathfrak{y}_2,$$

so lassen sich die Coefficienten $a_{\lambda\mu}^{(\varkappa)}$, wie Herr *Fuchs* gezeigt hat, durch unendliche Reihen darstellen, und es ist:

$$\zeta_\varkappa = \frac{\mathfrak{y}_{\varkappa 2}}{\mathfrak{y}_{\varkappa 1}} = \frac{a_{22}^{(\varkappa)}}{a_{12}^{(\varkappa)}} \cdot \frac{\eta - \alpha_\varkappa}{\eta - \bar{\alpha}_\varkappa}, \quad \alpha_\varkappa = -\frac{a_{21}^{(\varkappa)}}{a_{22}^{(\varkappa)}}, \quad \bar{\alpha}_\varkappa = -\frac{a_{11}^{(\varkappa)}}{a_{12}^{(\varkappa)}}.$$

Da $\zeta_\varkappa$ für $\xi = b_\varkappa$ verschwindet, so nimmt η im Punkte $\xi = b_\varkappa$ den Werth $\alpha_\varkappa$ an, und es stellt im Falle (2.)

$$\frac{\eta_\varkappa - \alpha_\varkappa}{\eta_\varkappa - \bar{\alpha}_\varkappa} = e^{2\pi i \delta_\varkappa} \frac{\eta - \alpha_\varkappa}{\eta - \bar{\alpha}_\varkappa}, \quad \delta_\varkappa = 1 - 2r_\varkappa,$$

im Falle (3.)

$$\frac{1}{\eta_\varkappa - \alpha_\varkappa} = \frac{1}{\eta - \alpha_\varkappa} + \gamma_\varkappa, \quad \gamma_\varkappa = -\frac{B.a_{22}^{(\varkappa)}.2\pi i}{a_{11}^{(\varkappa)}a_{22}^{(\varkappa)} - a_{12}^{(\varkappa)}a_{21}^{(\varkappa)}}$$

die zum Punkte $\xi = b_\varkappa$ gehörige Fundamentalsubstitution in der kanonischen Form dar.

Im Allgemeinen brauchen die zu den verschiedenen Punkten $\xi = b_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, \sigma)$, gehörigen Fundamentalsubstitutionen nicht sämmtlich von einander verschieden zu sein, sie können zum Theil übereinstimmen, zum Theil auch Potenzen oder Producte von Potenzen von einander sein. Sondert man von diesen σ Substitutionen ein System von einander verschiedener aus, so erhält man ein System von Fundamentalsubstitutionen der Gruppe G der Differentialgleichung. An diesem System lässt sich nach den von Herrn *Poincaré* gegebenen Methoden stets entscheiden, ob die Gruppe G eine discontinuirliche, d. h. eine *Fuchs*sche oder *Klein*sche Gruppe ist. — Wenn dies der Fall ist, und auch nur dann, können wir schliessen, dass der zu einem willkürlichen Werthe von ξ gehörige Werthvorrath von η eine Menge isolirter Punkte bildet, deren Häufungsstellen durch die Doppelpunkte der nicht periodischen Substitutionen der Gruppe geliefert werden, und dass diese Doppelpunkte, dem Begriff der discontinuirlichen Gruppe zufolge, gewisse Linien überall dicht erfüllen. Durch diese Linien wird**) die Ebene der complexen Variabeln ξ in eine stets endliche Anzahl von Bereichen $L_1, L_2, \ldots, L_q$ getheilt, entsprechend den verschiedenen

*) Acta Mathematica, Bd. IV, S. 217.

**) *Poincaré*, Acta Mathematica, Bd. III, S. 70.

Seitenflächen zweiter Art des „polyèdre-générateur“, und es ist leicht einzusehen, dass der gesammte zu einem bestimmten ξ gehörige Werthvorrath von η, sich stets innerhalb eines einzigen dieser Bereiche vorfindet. Im Falle einer *Fuchs*schen Gruppe ist die Anzahl q gleich eins oder zwei, je nachdem die Gruppe der ersten, zweiten, sechsten oder der dritten, vierten, fünften, siebenten Familie angehört, und man kann stets annehmen, dass die Gesammtheit der Doppelpunkte der nicht periodischen Substitutionen der Gruppe auf der Peripherie des Einheitskreises der η-Ebene gelegen sei.

Bedeutet nun $f(u)$ irgend eine, bei den Substitutionen der Gruppe G unveränderliche eindeutige Function der Variabeln u, und setzt man in diese Function an Stelle von u den Integralquotienten $\eta(\xi)$ der Differentialgleichung (A.), so geht $f(u)$ über in einen offenbar eindeutigen Ausdruck $E(\xi)$ von ξ, so dass also

$$f(\eta) = E(\xi),$$

und diese eindeutige Gleichung definirt die Function η von ξ insofern, als dieselbe für jeden Werth von ξ, für welchen der Ausdruck $E(\xi)$ existirt, die sämmtlichen zugehörigen η-Werthe liefert. In der That braucht der Existenzbereich des Ausdrucks $E(\xi)$ nicht alle ξ-Werthe zu umfassen, für welche die Function η definirt ist. Sei z. B. $f(u)$ eine *Fuchs*sche bez. *Klein*sche Function, die zur Gruppe G gehört, dann ist der Existenzbereich von $f(u)$ auf einen der Bereiche $L_1, L_2, \ldots, L_q$ beschränkt, da jeder Doppelpunkt einer nicht periodischen Substitution von G eine wesentliche singuläre Stelle von $f(u)$ bildet, dagegen kann ein solcher Doppelpunkt $\eta = \alpha$ für Werthe $\xi = a$ zum Vorschein kommen, die nicht zu den singulären Stellen der Differentialgleichung (A.) gehören, so dass der Existenzbereich der Function ξ von η im Allgemeinen mehrere der Bereiche $L_1, \ldots, L_q$, etwa $L_1, \ldots, L_r$, umfasst. — Ist dann $f_\varkappa(u)$ die in dem Bereiche $L_\varkappa$ $(\varkappa = 1, \ldots, r)$ existirende *Fuchs*sche oder *Klein*sche Function, so existirt $E_\varkappa(\xi) = f_\varkappa(\eta)$ nur in einem beschränkten Bereiche $\Delta_\varkappa$ der ξ-Ebene, der aber nicht nothwendig aus einem zusammenhängenden Stück besteht, sondern seinerseits wieder in mehrere, unter einander gar nicht oder nur längs gewissen Linien zusammenhängende Bereiche $\Delta_\varkappa^{(1)}, \Delta_\varkappa^{(2)} \ldots$ zerfallen kann. In jedem dieser Bereiche, deren Begrenzung durch jene ξ-Werthe geliefert wird, die den an der Grenze von $L_\varkappa$ gelegenen η-Werthen zugehören, stellt dann $E_\varkappa(\xi)$ eine andere *eindeutige analytische Function* dar, und es können die verschiedenen Bereiche $\Delta_\varkappa^{(i)}$ auch für verschiedene Werthe von

$\varkappa$ sich niemals gegenseitig überdecken, da ja, wie bereits hervorgehoben wurde, die sämmtlichen zu einem ξ gehörigen η-Werthe allemal in einem und demselben $L_\varkappa$ gelegen sind. Die Gleichung

$$E_\varkappa(\xi) = f_\varkappa(\eta) \tag{4.}$$

stellt also nicht das ganze analytische Gebilde (η, ξ) dar, vielmehr sind hierzu die r Gleichungen, welche aus (4.) für $\varkappa = 1, 2, \ldots, r$ entstehen, erforderlich. Diese r Gleichungen müssen aber nothwendig alle Werthenpaare des Gebildes (η, ξ) liefern, die zu einem willkürlichen ξ oder einem willkürlichen η gehören, und da jedes $f_\varkappa(\eta)$ nur innerhalb des Bereichs $L_\varkappa$ existirt, schliessen wir hieraus, dass jede der Gleichungen (4.) nicht nur sämmtliche η-Werthe, die zu einem ξ des Bereichs $\Delta_\varkappa$, sondern auch umgekehrt die sämmtlichen ξ-Werthe, die zu einem η des Bereichs $L_\varkappa$ gehören, liefern müsse, dass also diese ξ-Werthe insgesammt innerhalb $\Delta_\varkappa$ liegen. Da nun die Werthe der unabhängigen Variabeln, für welche eine eindeutige Function dieser Variabeln denselben Werth annimmt, stets eine Menge isolirter Punkte bilden, so folgt, dass, ***wenn die Gruppe der Differentialgleichung eine discontinuirliche ist, nicht nur zu jedem Werthe der unabhängigen Variabeln ξ eine Menge isolirter Werthe des Integralquotienten η, sondern auch umgekehrt zu jedem Werthe von η eine Menge isolirter Punkte ξ gehört.***

Wir knüpfen hieran die Bemerkung, dass also, während eine ebene algebraische Curve stets durch eine Gleichung dargestellt werden kann, zur Darstellung einer transcendenten Curve, selbst wenn sich dieselbe überhaupt durch eindeutige Gleichungen definiren lässt, im Allgemeinen *eine* eindeutige Gleichung nicht ausreicht.

Ist der Existenzbereich der Function ξ von η auch auf einen der Bereiche $L_\varkappa$ beschränkt, so wird das Gebilde schon durch *eine* eindeutige Gleichung vollständig dargestellt; das ist z. B. stets der Fall, wenn $q = 1$, d. h. wenn G die Gruppe einer in der ganzen Ebene existirenden *Fuchs*schen oder *Klein*schen Function ist.

Ein Beispiel, wo der Existenzbereich der Function ξ von η mehrere der durch die wesentlichen singulären Punkte der Gruppe*) der Differentialgleichung von einander geschiedenen Bereiche $L_1, \ldots, L_q$ umfasst, bietet

*) *Poincaré,* Acta Mathem. Bd. I, S. 198.

die Differentialgleichung

$$\frac{d^2\mathfrak{y}}{d\xi^2} = -\frac{1}{4}\frac{1}{\xi(1-\xi)^2}\mathfrak{y},$$

welcher die Periodicitätsmoduln des elliptischen Integrals zweiter Gattung (abgesehen von dem Factor $\sqrt{\xi-1}$) genügen. Die Gruppe dieser Differentialgleichung ist bekanntlich *) dieselbe wie die der gewöhnlichen elliptischen Modulfunction, für welche also bei geeigneter Wahl von η der Einheitskreis den Ort der wesentlichen singulären Stellen ausmacht, und wie Herr ***Fuchs*** gezeigt hat, existirt ξ als unendlich vieldeutige Function von η für alle complexen Werthe von η. Bedeutet nun $x_1 = f_1(u)$ die nur für Werthe von u innerhalb des Einheitskreises definirte elliptische Modulfunction, $x_2 = f_2(u)$ die analoge, nur ausserhalb des Einheitskreises existirende Function, so werden, wenn man $u = \eta$ setzt:

$$(5.) \qquad \begin{cases} f_1(\eta) = E_1(\xi), \\ f_2(\eta) = E_2(\xi), \end{cases}$$

wo $E_1(\xi)$, $E_2(\xi)$ in ξ eindeutige Ausdrücke bedeuten, deren jeder nur in einem beschränkten Bereiche von ξ existirt, und die Gleichungen (5.) stellen zusammengenommen das ganze analytische Gebilde (ξ, η) mit Ausnahme der den η-Werthen vom absoluten Betrage Eins entsprechenden Stellen desselben dar.

Die Gruppe G der Differentialgleichung (A.) braucht im Allgemeinen nicht vom Geschlecht Null zu sein. Ist sie vom Geschlecht p, und bedeutet x eine zu G gehörige ***Fuchs***sche oder ***Klein***sche Function, die innerhalb des Bereiches L_x existirt und innerhalb des Fundamentalbereichs jeden Werth an $m \geqq p+1$ Stellen $u_1, u_2, \ldots, u_m$ annimmt, so werden die Werthe $\eta = u_1, u_2, \ldots, u_m$ stets ***von einander verschiedenen*** ξ-Werthen entsprechen müssen, da alle η-Werthe, die zu einem und demselben ξ gehören, durch die Substitutionen von G aus einem derselben hervorgehen. Ein auf diesen Fall bezügliches Beispiel lässt sich leicht auf folgende Weise bilden.

Wenn in der Differentialgleichung der ***Gauss***schen Reihe

$$\frac{d^2\mathfrak{y}}{d\xi^2} = \frac{1}{4}\left\{\frac{\lambda^2-1}{\xi^2} + \frac{\nu^2-1}{(1-\xi)^2} + \frac{\lambda^2+\nu^2-\mu^2-1}{\xi(1-\xi)}\right\}\mathfrak{y}$$

die λ, μ, ν rein imaginäre Zahlen sind, so sind die Substitutionen S_1, S_2, S_3, welche ein Integralquotient η erleidet, wenn ξ einfache Umläufe um die

*) *Fuchs*, dieses Journal Bd. 83.

singulären Punkte $\xi = 0,\ 1,\ \infty$ vollzieht, hyperbolische, und da

$$S_3^{-1} = S_1 S_2,$$

ist die zu dieser Differentialgleichung gehörige Gruppe G aus den beiden hyperbolischen Fundamentalsubstitutionen S_1, S_2 componirt. Damit eine solche Gruppe eine discontinuirliche sei, genügt es, zwischen den λ, μ, ν gewisse Ungleichheitsbedingungen festzusetzen, welche sich in der grundlegenden Abhandlung von Herrn *Poincaré* *) explicite angegeben finden. Setzen wir diese als erfüllt voraus, so ist die Gruppe G eine *Fuchs*sche der dritten Familie vom Geschlecht Zwei. Die zugehörigen *Fuchs*schen Functionen der Variabeln u existiren in der ganzen Ebene und lassen sich durch zwei derselben, $x = \varphi(u)$, $y = \psi(u)$, rational ausdrücken, während zwischen x, y eine Gleichung der Form

$$(6.) \qquad y^2 = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)(x-a_5)$$

besteht, wo die a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 reale Grössen bedeuten **). Setzt man in φ und ψ an Stelle von u den Integralquotienten η, so werden

$$(7.) \qquad \begin{cases} \varphi(\eta) = E(\xi), \\ \psi(\eta) = F(\xi) \end{cases}$$

eindeutige Functionen von ξ, die in der ganzen ξ-Ebene definirt sind, und jede der Gleichungen (7.) stellt für sich das ganze analytische Gebilde (η, ξ) dar. Gleichzeitig liefern die Gleichungen

$$x = E(\xi), \quad y = F(\xi)$$

eine, von der *Poincaré*schen verschiedene Darstellung der durch die algebraische Gleichung (6.) verknüpften Variabeln als eindeutige Functionen eines Parameters.

Betrachten wir im allgemeinen Falle einer discontinuirlichen Gruppe G eine zu dieser Gruppe gehörige Θ-Reihe

$$(8.) \qquad \Theta(u) = \sum_{\varkappa} H(S_\varkappa u)\left(\frac{dS_\varkappa u}{du}\right)^m,$$

wo $H(u)$ den Algorithmus einer rationalen Function von u, m eine ganze Zahl > 1,

$$S_\varkappa u = \frac{a_\varkappa u + b_\varkappa}{c_\varkappa u + d_\varkappa}, \quad a_\varkappa d_\varkappa - b_\varkappa c_\varkappa = 1, \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots)$$

*) Acta Mathem. Bd. I, S. 53.

**) ebenda S. 278.

die Substitutionen von G in irgend einer Reihenfolge bedeutet, so ist bekanntlich

$$\Theta(S_\lambda u) = (c_\lambda u + d_\lambda)^{2m}\Theta(u).$$

Setzt man in $\Theta(u)$ an die Stelle von u den Integralquotienten η, so erhält man einen Ausdruck in ξ, der im Allgemeinen nicht eindeutig ist, sondern sich, wenn ξ Umläufe vollzieht, noch mit Factoren der Form

$$(c_\lambda \eta + d_\lambda)^{2m}$$

multiplicirt. Dagegen bleibt der in $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{y}_2$ homogene Ausdruck

$$\mathfrak{y}_1^{-2m}\Theta(\eta) = \mathfrak{H}(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2) = F(\xi) \tag{9.}$$

bei allen Umläufen von ξ, d. h. bei Anwendung der Substitutionen der Gruppe G auf $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{y}_2$, ungeändert, ist also in ξ absolut eindeutig. Derselbe kann jedoch, wenn $q > 1$ und ξ als Function von η in mehreren der Bereiche $L_\varkappa$ existirt, in den verschiedenen entsprechenden Bereichen $\Delta_\varkappa^{(\nu)}$ verschiedene analytische Functionen von ξ darstellen, da die Reihe $\Theta(u)$ zwar*) für alle innerhalb eines der Bereiche $L_1, L_2, \ldots, L_q$ gelegenen Werthe von u convergirt, aber in jedem dieser Bereiche eine andere analytische Function ausdrückt. Wir denken uns im Folgenden η beziehungsweise ξ immer auf einen *bestimmten* der Bereiche $L_\varkappa$ bez. $\Delta_\varkappa^{(\nu)}$ beschränkt, indem sich ja die für einen solchen Bereich anzustellenden Betrachtungen unmittelbar auf alle übrigen in Betracht kommenden Bereiche übertragen lassen.

Wir finden also, dass sich, wenn die Gruppe G der Differentialgleichung (A.) discontinuirlich ist, stets unendlich viele, aus den Elementen $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{y}_2$ eines Fundamentalsystems gebildete (natürlich transcendente) homogene Functionen, oder wie wir kurz sagen wollen, *Formen* von endlichem Grade angeben lassen, welche gleich eindeutigen Functionen von ξ sind. Wenn die Differentialgleichung (A.) durch algebraische Functionen von ξ integrirt werden kann, stimmt dieser Satz im Wesentlichen mit demjenigen überein, den Herr *Fuchs* in seiner Abhandlung**) aufgestellt hat; in diesem Falle sind nämlich $\Theta(\eta)$ und $F(\xi)$ rationale Functionen ihrer Argumente. Herr *Fuchs* zeigt aber auch umgekehrt, dass aus dem Vorhandensein einer aus den Elementen eines Fundamentalsystems gebildeten Form, welche gleich einer rationalen Function von ξ ist, im Allgemeinen erschlossen werden

*) *Poincaré*, a. a. O. S. 210 ff.

**) Dieses Journal Bd. 81, S. 97 ff.

könne, dass die Differentialgleichung algebraisch integrirbar sei. — Wir können ebenso beweisen, dass, wenn für eine Differentialgleichung zweiter Ordnung eine eindeutige homogene Function von $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{y}_2$ von ganzzahligem Grade gleich einer eindeutigen Function von ξ ist, die Gruppe der Differentialgleichung eine discontinuirliche sein müsse. In diesem Falle besteht nämlich eine wie (9.) gestaltete Beziehung. Aus derselben folgt*) durch wiederholte Differentiation und Elimination unter Benutzung der Gleichungen (A.) und (1.):

$$(10.)\quad \begin{cases} \left(2m\Theta(\eta)\Theta''(\eta)-(2m+1)\Theta'(\eta)^2\right)^m \Theta(\eta)^{-2m-2} \\ \quad = \left(4m^2\Theta(\xi)F(\xi)^2+2mF(\xi)F''(\xi)-(2m+1)F'(\xi)^2\right)^m F(\xi)^{-2m-2}, \end{cases}$$

wo die Accente Ableitungen bedeuten, d. h. eine eindeutige Gleichung zwischen η, ξ, aus welcher wir schliessen, dass sowohl die zu einem willkürlichen Werthe von ξ gehörigen η-Werthe, als auch umgekehrt die ξ-Werthe, welche einem und demselben η zugehören, eine Menge isolirter Punkte bilden, und dies hat offenbar die Discontinuität der Gruppe zur Folge. Die Möglichkeit, dass sich die Gleichung (10.) auf eine Identität reducirt, lässt sich im Allgemeinen durch ähnliche Schlüsse abweisen wie bei Herrn *Fuchs***), ***es ist also für die Discontinuität der Gruppe der Differentialgleichung*** (A.) ***nothwendig und hinreichend, dass eine aus den Elementen eines Fundamentalsystems gebildete Form von endlicher Dimension gleich einer eindeutigen Function der unabhängigen Variabeln ξ sei.***

Der erwähnte *Fuchs*sche Satz gewinnt für die Theorie der algebraisch integrirbaren Differentialgleichungen hauptsächlich dadurch eine hohe Bedeutung, dass er in Verbindung mit dem von Herrn *Fuchs* in derselben Abhandlung bewiesenen Theorem, wonach der niedrigste Grad einer *ganzen* Form, die gleich der *Wurzel* aus einer rationalen Function ist, den zwölften niemals übersteigt, ein Kriterium liefert, welches in jedem Falle, durch die Auflösung eines Systems linearer Gleichungen, die Entscheidung darüber gestattet, ob eine vorgelegte Differentialgleichung zweiter Ordnung durch algebraische Functionen integrirt werden könne oder nicht. Wenn auch der Natur der Sache nach ein gleich einfaches Kriterium in unserem Falle nicht vorhanden sein kann, so scheint es doch nicht überflüssig, in eine nähere Erörterung der Frage einzutreten, ob sich nicht auch hier in Bezug

*) Vergl. *Fuchs*, a. a. O. S. 127.

**) a. a. O. S. 127 ff.

auf den niedrigsten Grad einer Form die gleich der *Wurzel* aus einer eindeutigen Function von ξ wird, etwas aussagen lässt.

Wir erinnern zu dem Ende an den von Herrn *Fuchs* aufgestellten Begriff einer *Primform.* Herr *Fuchs* definirt als Primform*) eine Form, „die nur solche Factoren enthält, die zusammen das reducirte Wurzelsystem einer irreductibeln Gleichung bilden, welcher ein bestimmtes Integral genügt, und zwar diese Factoren alle, und jeden zur ersten Potenz." Das heisst mit anderen Worten, die aus einer Primform nach Division mit einer geeigneten Potenz von $\mathfrak{y}_1$ entspringende Function des Integralquotienten η soll nur an einer Stelle η und den aus derselben durch die Substitutionen der Gruppe hervorgehenden, verschwinden, und zwar an jeder dieser Stellen von der ersten Ordnung.

Auf den Fall, wo das Geschlecht der discontinuirlichen Gruppe grösser als Null ist, kann diese Definition der Primform nicht *unmittelbar* übertragen werden, da sich ein Verschwinden von erster Ordnung nicht erreichen lässt; um vorläufig Erörterungen aus dem Wege zu gehen, die das Wesen der uns beschäftigenden Frage nicht berühren, beschränken wir uns deshalb auf die Betrachtung von Differentialgleichungen, deren Gruppe G vom Geschlecht Null ist, und setzen für das Folgende überdies voraus, dass die Anzahl q der Bereiche $L_1, L_2, \ldots, L_q$ nicht gleich Eins sei, d. h. dass die zur Gruppe G gehörigen *Fuchs*schen oder *Klein*schen Functionen nicht in der ganzen Ebene, sondern immer nur in beschränkten Bereichen existiren mögen. Um jedoch die Fälle der endlichen Gruppen so wie jene, welche doppeltperiodischen Functionen entsprechen, mit zu umfassen, modificiren wir die letztere Annahme dahin, dass der Existenzbereich der zur Gruppe gehörigen *Fuchs*schen oder *Klein*schen Functionen ein *einfach zusammenhängender* sei, in dessen Innerem sich keine wesentliche singuläre Stelle der Gruppe befindet.

II.

Die in der vorigen Nummer durch Multiplication einer Θ-Reihe mit einer Potenz von $\mathfrak{y}_1$ gewonnene homogene Function von $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{y}_2$, ist im Allgemeinen keine *Fuchs*sche oder *Klein*sche Function; um dieselbe in eine solche umzugestalten, ist es zweckmässig, diejenige zur Gruppe G gehörige *Fuchs*sche oder *Klein*sche Function einzuführen, durch welche sich alle

*) a. a. O. S. 114.

anderen rational ausdrücken. Diese Function ist, abgesehen von drei willkürlichen Constanten, von denen sie linear abhängt, vollkommen bestimmt, wenn wir denjenigen der Bereiche $L_1, \ldots, L_q$ angeben, innerhalb dessen jene Function existiren soll. Möge zu einem bestimmten ξ ein Werth von η gehören, der dem Bereiche $L_\varkappa$ angehört, und sei $x = f(\eta)$ die innerhalb $L_\varkappa$ existirende Function von der erwähnten Beschaffenheit. Dann bilden bekanntlich *)

$$(1.) \qquad y_1 = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad y_2 = \eta y_1$$

ein Fundamentalsystem einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit in x rationalen Coefficienten

$$(B.) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = P(x)y,$$

deren Integrale überall bestimmt sind, und es ist x eine eindeutige Function

$$x = E(\xi)$$

von ξ. Die Function $x = f(\eta)$ nimmt innerhalb des Fundamentalbereichs jeden Werth nur einmal an, die singulären Punkte $x = a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1} = \infty$ der Differentialgleichung (B.) entsprechen den Eckpunkten $\eta = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$ des dem Bereiche $L_\varkappa$ angehörenden Fundamentalpolygons, und die Differenz der Wurzeln der zu einem der singulären Punkte $x = a_\varkappa$, $(\varkappa = 1, 2, \ldots, n+1)$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung ist der reciproke Werth einer ganzen Zahl $\beta_\varkappa$, die wir als positiv voraussetzen können, oder Null, so dass also die zu den einzelnen singulären Punkten gehörigen Fundamentalsubstitutionen elliptische oder parabolische sind. Diese Fundamentalsubstitutionen sind sämmtlich von einander und von der identischen Substitution verschieden, was aber natürlich nicht ausschliesst, dass einzelne der Zahlen $\beta_\varkappa$ mit einander übereinstimmen können. Endlich sind die wesentlich singulären Stellen der Gruppe G, d. h. die Doppelpunkte der nicht periodischen Substitutionen, sämmtlich wesentliche singuläre Stellen der Function x.

Die Differentialgleichung (A.) wird durch die Substitution

$$(2.) \qquad y = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{\frac{1}{2}} \mathfrak{y}, \quad x = E(\xi),$$

*) *Poincaré*, Acta Mathematica, Bd. I, S. 229.

in (B.) übergeführt, und es ist:

$$P(x)\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 = Q(\xi) - \Delta\left(\frac{x}{\xi}\right).$$

Multipliciren wir also die in der vorigen Nummer eingeführte homogene Function

$$\mathfrak{H}(\mathfrak{y}_1,\ \mathfrak{y}_2) = \mathfrak{y}_1^{-2m}\,\Theta(\eta)$$

mit $\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^m$, so verwandelt sich dieselbe in eine ebenfalls homogene Function von $y_1,\ y_2$

$$H(y_1,\ y_2) = \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^m \mathfrak{H}(\mathfrak{y}_1,\ \mathfrak{y}_2),$$

und diese ist nun offenbar*) eine ***Fuchs***sche oder ***Klein***sche Function von η, also eine rationale Function von x.

Wir wollen allgemein eine homogene Function von $\mathfrak{y}_1,\ \mathfrak{y}_2$ vom Grade r, die durch Multiplication mit $\mathfrak{y}_1^{-r}$ in eine eindeutige Function von η und durch Multiplication mit $\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^{-\frac{r}{2}}$ in die Wurzel aus einer rationalen Function von x übergeht, eine ***invariante eindeutige Form von*** $\mathfrak{y}_1,\ \mathfrak{y}_2$ nennen. Wie leicht einzusehen, muss dann r eine ***rationale Zahl*** sein, und es ist folglich jede solche Form die Wurzel aus einer eindeutigen Function von ξ. Sei $\mathfrak{H}(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2)$ eine so beschaffene Form, und setzen wir

$$(3.)\quad \begin{cases} \mathfrak{H}(\mathfrak{y}_1,\ \mathfrak{y}_2) = \mathfrak{y}_1^r \mathsf{H}(\eta) = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{-\frac{r}{2}} y_1^r \mathsf{H}(\eta) = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{-\frac{r}{2}} H(y_1,\ y_2) \\ \qquad\qquad = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{-\frac{r}{2}} R(x), \end{cases}$$

so ist also $R(x)$ die Wurzel aus einer rationalen Function von x, $\mathsf{H}(\eta)$ eine eindeutige Function von η, $H(y_1, y_2)$ eine homogene Function $r$ten Grades von $y_1,\ y_2$. Insbesondere soll $\mathfrak{H}(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2)$ eine ***ganze*** Form heissen, wenn dieselbe für solche endlichen Werthe der $\mathfrak{y}_1,\ \mathfrak{y}_2$, deren Quotient $\frac{\mathfrak{y}_2}{\mathfrak{y}_1}$ dem Bereiche L_x angehört, niemals unendlich wird, d. h. wenn $\mathsf{H}(\eta)$ für kein innerhalb L_x gelegenes η und also $R(x)$ nur so unendlich wird, wie y_1^{-r} verschwindet. Jede invariante eindeutige Form ist dann als Quotient zweier ganzen Formen darstellbar. Um die allgemeine Gestalt einer

*) *Poincaré*, Acta Mathem. Bd. I, S. 235.

ganzen Form aufzustellen, haben wir daher zunächst die Art des Verschwindens von y_1 zu untersuchen. Hierbei macht es nun einen wesentlichen Unterschied aus, ob die Gruppe G parabolische Substitutionen enthält oder nicht; wir wollen deshalb vorerst das Auftreten solcher Substitutionen ausschliessen, d. h. die Annahme machen: die zu den singulären Punkten $a_\varkappa(\varkappa = 1, 2, \ldots, n+1)$ gehörigen Fundamentalsubstitutionen seien sämmtlich elliptische, also die $\beta_\varkappa$ *endliche* ganze Zahlen. — Bei geeigneter Wahl von η ist alsdann y_1 für jeden regulären Werth von x endlich und von Null verschieden, verschwindet für $x = a_\varkappa(\varkappa = 1, 2, \ldots, n)$ von der Ordnung $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{\beta_\varkappa}$ und wird für unendlich grosses x wie die $\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\beta_{n+1}}\right)$te Potenz von x unendlich. Die Anzahl der Nullstellen von y_1 ist daher, wenn wir die Unendlichkeitsstellen als negative Nullstellen hinzuzählen,

$$\sum_{\varkappa=1}^{n+1}\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\frac{1}{\beta_\varkappa}\right)-1 = -\frac{1}{\nu}. \tag{4.}$$

Wir nennen ν den zu den Differentialgleichungen (B.) und (A.) gehörigen *Grad.* — Das zu einer ganzen invarianten Form gehörige $R(x)$ hat also die Gestalt

$$R(x) = \frac{G(x)}{\prod_{\varkappa=1}^{n}(x-a_\varkappa)^{-r\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{\beta_\varkappa}\right)}},$$

wo $G(x)$ die Wurzel aus einer rationalen Function von x bedeutet, deren Grad p den Werth

$$p = \frac{r}{\nu}$$

haben muss, damit $R(x)$ für $x = \infty$ von derselben Ordnung wie y_1^r verschwinde.

Sei

$$G(x) = \prod_{i=1}^{m}(x-c_i)^{\lambda_i},$$

wo die c_i sämmtlich von einander verschieden, die λ_i rationale positive Zahlen und

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i = p = \frac{r}{\nu};$$

möge ferner γ_i diejenige innerhalb des Fundamentalpolygons gelegene

*) Vgl. *Poincaré*, Acta Mathem. Bd. I, S. 235.

Stelle bezeichnen, für welche $x = f(\eta)$ den Werth c_i annimmt, dann wird $\mathsf{H}(\eta)$ für jedes $\eta = \gamma_i$ und die aus diesen Werthen durch die Substitutionen der Gruppe entstehenden verschwinden, und zwar, wenn $x = c_i$ ein regulärer Punkt der Differentialgleichung (B.) ist, von der Ordnung λ_i, wenn c_i mit dem im Endlichen gelegenen singulären Punkte $a_\varkappa$ zusammenfällt, von der Ordnung $\lambda_i \beta_\varkappa$. Da aber $\mathsf{H}(\eta)$ eine eindeutige Function von η sein soll, folgt hieraus, dass für einen regulären Werth c_i der Exponent λ_i nothwendig eine ganze Zahl, dagegen für $c_i = a_\varkappa$ ein ganzzahliges Vielfaches von $\frac{1}{\beta_\varkappa}$ sein müsse. Sind umgekehrt diese Bedingungen für die Exponenten λ_i erfüllt, so ist $R(x) y_1^{-r}$ in der Umgebung jeder innerhalb des Bereiches $L_\varkappa$ gelegenen Stelle η eindeutig, also eine *unverzweigte* Function von η. Da aber der Bereich $L_\varkappa$ der in Nr. I getroffenen Voraussetzung zu Folge ein einfach zusammenhängender ist, in dessen Inneren keine wesentliche singuläre Stelle der Function x von η liegt, lässt sich jeder geschlossene Umlauf von η, der einem geschlossenen Umlauf von x entspricht, auf einen Punkt zusammenziehen, es ist also eine Function von x, die als Function von η unverzweigt ist, auch eindeutig in η. Also ist $R(x) y_1^{-r}$ eine eindeutige Function von η, folglich stellt $R(x)\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^{\frac{r}{2}}$ auch stets eine ganze, invariante, eindeutige Form von $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{y}_2$ dar, wenn die angegebenen Bedingungen für die Exponenten λ_i erfüllt sind. Hierdurch ist die allgemeine Gestalt einer ganzen, invarianten, eindeutigen Form vollkommen bestimmt. Wir können aber für diese Formen durch Einführung des Begriffs der *Primformen* eine viel übersichtlichere Darstellung gewinnen.

Im Anschluss an die in Nr. I erwähnte Definition, welche Herr *Fuchs* für die Primformen einer algebraisch integrirbaren Differentialgleichung gegeben hat, wollen wir eine ganze invariante Form von $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{y}_2$ eine *Primform* nennen, wenn das zu derselben gehörige $\mathsf{H}(\eta)$ nur an einer Stelle η und an den aus derselben durch die Substitutionen der Gruppe hervorgehenden verschwindet, und zwar an jeder dieser Stellen von der ersten Ordnung. Aus dieser Definition und den gefundenen Ergebnissen folgt, dass eine Primform durch Angabe ihrer Nullstelle innerhalb des Fundamentalpolygons, abgesehen von einem constanten Factor, vollkommen bestimmt ist. Sei diese Nullstelle $\eta = \gamma$ keine Ecke des Fundamentalpolygons, dann entspricht ihr ein nicht singulärer Werth $x = c$, und es ist in der Umgebung

von $\eta = \gamma$:

$$x - c = \varepsilon_1(\eta-\gamma) + \varepsilon_2(\eta-\gamma)^2 + \cdots,$$

wo ε_1 von Null verschieden; das zu der für $\eta = \gamma$ verschwindenden Primform gehörige $G(x)$ reducirt sich also auf $x-c$, woraus $p = 1$, $r = \nu$ folgt. Die Primform, deren Nullstelle innerhalb des Fundamentalpolygons der nicht singuläre Werth $\eta = \gamma$ ist, hat also den Grad ν und die Gestalt:

$$(5.)\quad \begin{cases} \Phi(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2)_\gamma = \mathfrak{y}_1^\nu X(\eta)_\gamma = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{-\frac{\nu}{2}} F(y_1, y_2)_\gamma \\ \qquad = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{-\frac{\nu}{2}} (x-c) \prod_{i=1}^{n} (x-a_i)^{\nu\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{\beta_i}\right)}. \end{cases}$$

Handelt es sich um die Aufstellung einer für $\eta = \alpha_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, n)$ und die correspondirenden Stellen verschwindenden Primform, so beachten wir, dass in der Umgebung von $\eta = \alpha_\varkappa$

$$x - a_\varkappa = \varepsilon_1(\eta-\alpha_\varkappa)^{\beta_\varkappa} + \varepsilon_2(\eta-\alpha_\varkappa)^{\beta_\varkappa+1} + \cdots,$$

also

$$G(x) = (x-a_\varkappa)^{\frac{1}{\beta_\varkappa}}, \quad p = \frac{1}{\beta_\varkappa}, \quad r = \frac{\nu}{\beta_\varkappa}$$

zu nehmen ist. Die zu $\eta = \alpha_\varkappa$ gehörige Primform lautet demgemäss:

$$(6.)\quad \begin{cases} \Phi_\varkappa(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2) = \mathfrak{y}_1^{\frac{\nu}{\beta_\varkappa}} X_\varkappa(\eta) = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{-\frac{\nu}{2\beta_\varkappa}} F_\varkappa(y_1, y_2) \\ \qquad = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{-\frac{\nu}{2\beta_\varkappa}} (x-a_\varkappa)^{\frac{1}{\beta_\varkappa}} \prod_{i=1}^{n} (x-a_i)^{\frac{\nu}{\beta_\varkappa}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{\beta_i}\right)}. \end{cases}$$

Endlich ergiebt sich für die an der Stelle $\eta = \alpha_{n+1}$ verschwindende Primform der Grad $\frac{\nu}{\beta_{n+1}}$ und die Darstellung:

$$(7.)\quad \begin{cases} \Phi_{n+1}(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2) = \mathfrak{y}_1^{\frac{\nu}{\beta_{n+1}}} X_{n+1}(\eta) = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{-\frac{\nu}{2\beta_{n+1}}} F_{n+1}(y_1, y_2) \\ \qquad = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{-\frac{\nu}{2\beta_{n+1}}} \prod_{i=1}^{n} (x-a_i)^{\frac{\nu}{\beta_{n+1}}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{\beta_i}\right)}. \end{cases}$$

Die Functionen $X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}$ stimmen mit den von Herrn *Poincaré*

aufgestellten und ebenso bezeichneten Ausdrücken überein*); für den Fall $n = 2$ hat dieselben bereits ***Halphen***** angegeben.

Wir können nun sofort die folgenden Sätze aussprechen, denen wir die analogen, von Herrn ***Fuchs*** für die algebraisch integrirbaren Differentialgleichungen aufgestellten, in Form von Citaten an die Seite stellen.

1) Verschwinden zwei Primformen für denselben Werth von η, so sind sie identisch (dieses Journal Bd. 81, Nr. II, IV).
2) Jede ganze invariante eindeutige Form ist als Product von Primformen darstellbar (ebenda Nr. II, V).
3) Der Grad einer Primform ist ein aliquoter Theil des zur Differentialgleichung (A.) gehörigen Grades ν (ebenda Bd. 85, S. 2, II).
4) Der dem absoluten Betrage nach höchste vorkommende Grad einer Primform ist ν, und es giebt unzählig viele von einander verschiedene Primformen dieses Grades (ebenda S. 4, IV).
5) Ist $|\mu| < |\nu|$, so ist die Anzahl der Primformen μten Grades gleich der Anzahl jener elliptischen Fundamentalsubstitutionen, welche bei verschiedenen Doppelpunkten denselben Multiplicator

$$e^{2\pi i \frac{\mu}{\nu}}$$

haben (ebenda S. 11, II).

6) Ist β_λ eine der Zahlen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n+1}$, die nicht kleiner ist als alle übrigen, so ist $\frac{\nu}{\beta_\lambda}$ der dem absoluten Betrage nach *niedrigste* Grad einer Primform (ebenda S. 5).
7) Zwischen je drei Primformen νten Grades findet eine lineare homogene Beziehung mit constanten Coefficienten statt (ebenda S. 13, VII.)

   Seien in der That Φ_{γ_1}, Φ_{γ_2}, Φ_{γ_3} drei solche Primformen und $c_\varkappa = f(\gamma_\varkappa)$ $(\varkappa = 1, 2, 3)$, so ist:

$$\Phi_{\gamma_1} : \Phi_{\gamma_2} : \Phi_{\gamma_3} = x - c_1 : x - c_2 : x - c_3,$$

   also

$$(c_3 - c_2)\Phi_{\gamma_1} + (c_1 - c_3)\Phi_{\gamma_2} + (c_2 - c_1)\Phi_{\gamma_3} = 0.$$

---

*) a. a. O. S. 237.

**) Comptes Rendus 1881 I, S. 857.

8) Das Gleiche gilt für drei Formen, welche entweder Primformen vom νten Grade oder solche vom absolut niedrigeren, μten Grade, zur Potenz $\nu:\mu$ sind (ebenda Nr. 7, Gl. (4.), (7.), (8.), (8ª.))*); es lässt sich folglich die allgemeine Primform νten Grades in der Form

$$\alpha\Phi_{\varkappa}^{\beta_\varkappa}+\beta\Phi_{i}^{\beta_i}$$

darstellen, wo α, β Constanten, i, $\varkappa$ zwei verschiedene der Zahlen 1, 2, ..., $(n+1)$ sind.

Endlich wollen wir für unsere Primformen Relationen herleiten, welche als Verallgemeinerungen der Covariantenbeziehungen zwischen den *Fuchs*schen Primformen aufgefasst werden können.

Es ist nämlich nach Gleichung (6.), (7.)

$$(9.)\qquad x-a_\varkappa = \frac{X_\varkappa^{\beta_\varkappa}}{X_{n+1}^{\beta_{n+1}}}; \qquad (\varkappa=1, 2, \ldots, n)$$

setzt man diese Werthe in Gleichung (7.) ein und rechnet unter Berücksichtigung von Gleichung (1.) Nr. I und Gleichung (4.) $\frac{dx}{d\eta}$ aus, so kommt:

$$(10.)\qquad \frac{dx}{d\eta}X_{n+1}^{2\beta_{n+1}} = X_1^{\beta_1-1}\ldots X_n^{\beta_n-1}X_{n+1}^{\beta_{n+1}-1}.$$

Andererseits folgen durch directe Differentiation der Gleichung (9.) und der Gleichung

$$x-c = \frac{X_\gamma}{X_{n+1}^{\beta_{n+1}}}$$

nach η, wenn wir die Ableitungen durch Accente bezeichnen, die Gleichungen

$$\frac{dx}{d\eta}X_{n+1}^{2\beta_{n+1}} = X_{n+1}^{\beta_{n+1}-1}X_\varkappa^{\beta_\varkappa-1}(\beta_\varkappa X_{n+1}X_\varkappa'-\beta_{n+1}X_\varkappa X_{n+1}'),$$

$$\frac{dx}{d\eta}X_{n+1}^{2\beta_{n+1}} = X_{n+1}^{\beta_{n+1}-1}(X_{n+1}X_\gamma'-\beta_{n+1}X_\gamma X_{n+1}'),$$

woraus sich vermöge der Homogeneität der Formen Φ und unter abermaliger Berücksichtigung von Gleichung (4.) die gesuchten Relationen

$$(11.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\beta_\varkappa\beta_{n+1}}{\nu}(\Phi_{n+1},\ \Phi_\varkappa) = \dfrac{\Phi_1^{\beta_1-1}\ldots\Phi_n^{\beta_n-1}}{\Phi_\varkappa^{\beta_\varkappa-1}}, & (\varkappa=1, 2, \ldots, n) \\ \dfrac{\beta_{n+1}}{\nu}(\Phi_{n+1},\ \Phi_\gamma) = \Phi_1^{\beta_1-1}\ldots\Phi_n^{\beta_n-1} \end{cases}$$

*) Vgl. *Poincaré*, Acta Mathem. Bd. I, S. 237, *Halphen*, Mémoires présentés etc. Bd. 28; *Klein*, Vorlesungen über das Ikosaeder S. 49.

ergeben, wo in üblicher Weise (φ, ψ) die Functionaldeterminante der beiden binären Formen φ, ψ bezeichnet.

Der zu den Differentialgleichungen (A.) und (B.) gehörige Grad ν hängt offenbar nur von der Gruppe G der Differentialgleichung ab. Derselbe ist im Allgemeinen eine endliche negative Zahl, deren reciproker mit 2π multiplicirter Werth, absolut genommen, im Falle einer *Fuchs*schen Gruppe (erster Familie) den pseudosphärischen Inhalt (das *Poincaré*sche S*)) des Fundamentalpolygons liefert. Einfache zahlentheoretische Ueberlegungen**) lehren, dass ν, wenn es positiv ist, auch ganzzahlig sein muss, und dass dies nur eintreten kann, wenn die Gruppe G eine *endliche* ist. In diesem Falle gehen unsere Formeln direct in die von Herrn *Fuchs* für die algebraisch integrirbaren Differentialgleichungen aufgestellten über; ν ist der Grad der Gleichung mit eindeutigen Coefficienten, welcher η als Function von ξ genügt, und die Primformen sind durch die bekannten Ausdrücke gegeben. Auch ist alsdann $\frac{2\pi}{\nu}$ der sphärische Inhalt des zu der betreffenden endlichen Gruppe gehörigen Fundamentalpolygons. Dagegen wird für $\nu = \infty$ die Gruppe G die einer geraden doppeltperiodischen Function; als die vier einzig möglichen, von Herrn *Poincaré* bereits angegebenen***) Fälle, wo dies eintreten kann, ergeben sich nach leichter Discussion:

$$\begin{aligned} n = 2, \quad & \beta_1 = 3, \quad \beta_2 = 3, \quad \beta_3 = 3, \\ & \beta_1 = 2, \quad \beta_2 = 4, \quad \beta_3 = 4, \\ & \beta_1 = 2, \quad \beta_2 = 3, \quad \beta_3 = 6, \\ n = 3, \quad & \beta_1 = 2, \quad \beta_2 = 2, \quad \beta_3 = 2, \quad \beta_4 = 2. \end{aligned}$$

Auch in diesen Fällen lassen sich die Primformen leicht mit Hülfe von elliptischen Functionen ausdrücken; es erübrigt demnach nur, eine Darstellung der Primformen zu geben, wenn $\nu < 0$.

Betrachten wir zu dem Ende die Form:

$$(12.) \qquad \Phi(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2) = \mathfrak{y}_1^{\nu} X(\eta) = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{-\frac{\nu}{2}} (ax+b) \prod_{\varkappa=1}^{n} (x-a_\varkappa)^{\nu\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{\beta_\varkappa}\right)},$$

so stellt dieselbe, abgesehen von einem constanten Factor, im Allgemeinen die für $x = -\frac{b}{a}$ verschwindende Primform νten Grades, dagegen wenn

*) Acta Mathem. Bd. I, S. 8.
**) Vergl. *Klein*, Ikosaeder S. 117 ff.
***) Acta Mathem. Bd. IV, S. 226.

$-\frac{b}{a} = a_\varkappa$, $(\varkappa = 1, 2, \ldots, n)$, die $\beta_\varkappa$te Potenz der zu $x = a_\varkappa$ gehörigen, für $a = 0$ die β_{n+1}te Potenz der zu $x = \infty$ gehörigen Primform dar. Sei ϱ das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen $\beta_1, \ldots, \beta_n, \beta_{n+1}$ und

$$\sigma = -\frac{2\varrho}{\nu} = \varrho \sum_{\varkappa=1}^{n+1}\left(1-\frac{1}{\beta_\varkappa}\right)-2\varrho, \tag{13.}$$

so ist σ eine positive ganze Zahl, und der Ausdruck

$$(X(\eta))^\sigma = \left(\frac{dx}{d\eta}\right)^\varrho (ax+b)^\sigma \prod_{\varkappa=1}^{n} (x-a_\varkappa)^{\varrho\left(1-\frac{1}{\beta_\varkappa}\right)} \tag{14.}$$

lässt sich folglich nach Herrn ***Poincaré****) durch eine Θ-Reihe darstellen, die an keiner innerhalb $L_\varkappa$ gelegenen Stelle η unendlich wird und nur an den dem $x = -\frac{b}{a}$ entsprechenden Stellen η verschwindet. Die allgemeinste, an σ beliebigen Stellen des Fundamentalbereichs von $L_\varkappa$ verschwindende und innerhalb $L_\varkappa$ allenthalben endliche Θ-Reihe ist in der Form

$$\Theta(\eta) = \left(\frac{dx}{d\eta}\right)^\varrho g_\sigma(x) \prod_{\varkappa=1}^{n} (x-a_\varkappa)^{\varrho\left(1-\frac{1}{\beta_\varkappa}\right)} \tag{15.}$$

enthalten, wo $g_\sigma(x)$ eine ganze rationale Function σten Grades von x bedeutet; sie lässt sich also als homogene lineare Function mit constanten Coefficienten von $\sigma+1$ geeignet gewählten ebenso beschaffenen Θ-Reihen darstellen. Man könnte die letzteren etwa so wählen, dass sie aus (15.) hervorgehen, indem für $g_\sigma(x)$ die successiven Potenzen $x^0, x^1, \ldots, x^\sigma$ gesetzt werden, um aber die *Poincaré*sche Darstellung einer Θ-Function direct anwenden zu können, ist es zweckmässiger, es so einzurichten, dass jede jener $\sigma+1$ Functionen an σ ***verschiedenen*** Stellen verschwindet. Dies kann, nach einem von ***Kronecker****) angewandten Verfahren, mit Hülfe der *Lagrange*schen Interpolationsformel stets auf folgende Weise erreicht werden. Seien $r_0, r_1, \ldots, r_\sigma$ beliebige von einander verschiedene Zahlen und

$$h(x) = \prod_{\varkappa=0}^{\sigma} (x-r_\varkappa); \quad h_\varkappa(x) = \frac{h(x)}{x-r_\varkappa}\frac{1}{h'(r_\varkappa)}, \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, \sigma)$$

so sind die Nullstellen von $h_\varkappa(x)$ sämmtlich von einander verschieden, und es lässt sich die Θ-Reihe:

$$\Theta_\varkappa(\eta) = \left(\frac{dx}{d\eta}\right)^\varrho h_\varkappa(x) \prod_{\varkappa=1}^{n} (x-a_\varkappa)^{\varrho\left(1-\frac{1}{\beta_\varkappa}\right)}$$

---

*) Acta Mathem. Bd. I, S. 235 ff.

**) Dieses Journal Bd. 90.

durch unmittelbare Anwendung der von Herrn *Poincaré* gegebenen Methoden*) als Function von η darstellen.

Setzen wir nun

$$\mathfrak{y}_1^{2\varrho}\Theta_\varkappa(\eta) = \mathfrak{H}_\varkappa(\mathfrak{y}_1,\ \mathfrak{y}_2);\quad \mathfrak{y}_1^{2\varrho}\Theta(\eta) = \mathfrak{H}(\mathfrak{y}_1,\ \mathfrak{y}_2),$$

so ergiebt sich

$$\mathfrak{H}(\mathfrak{y}_1,\ \mathfrak{y}_2) = \sum_{\varkappa=0}^{\sigma} g_\sigma(r_\varkappa)\mathfrak{H}_\varkappa(\mathfrak{y}_1,\ \mathfrak{y}_2),$$

und also nach den Gleichungen (12.), (14.) insbesondere:

$$[\Phi(\mathfrak{y}_1,\ \mathfrak{y}_2)]^\sigma = \sum_{\varkappa=0}^{\sigma}(ar_\varkappa+b)^\sigma\mathfrak{H}_\varkappa(\mathfrak{y}_1,\ \mathfrak{y}_2).$$

Diese Darstellung hat, abgesehen von dem Aufwand rechnerisch fast undurchführbarer Schwierigkeiten, dessen es bedarf, um zu derselben zu gelangen, den Mangel, dass sie die Eindeutigkeit der von den Factoren $\mathfrak{y}_1^\mu$ befreiten Primformen μten Grades nicht *unmittelbar* hervortreten lässt. Sie lehrt uns aber, dass die σte Potenz der Primformen vom absolut höchsten, νten Grade sowie die $\beta_\varkappa\sigma$te Potenz der Primform $\Phi_\varkappa$ ***rationale Functionen von x, also in ξ eindeutig sind,*** und dass dies auch für keine niedrigere Potenz jener Primformen eintritt. Ebenso ist natürlich $\mathfrak{H}(\mathfrak{y}_1,\ \mathfrak{y}_2)$ eine ganze invariante eindeutige Form, die gleich einer eindeutigen Function von ξ ist. In gewissen besonderen, leicht angebbaren Fällen ist $\sigma = 1$, z. B. tritt dies stets ein, wenn $\nu > 0$, dann stimmt das eben hergeleitete Resultat mit dem Satze von Herrn ***Fuchs*****) überein.

III.

Wir wollen nun die Modificationen angeben, welche an den Betrachtungen der vorigen Nummer anzubringen sind, wenn unter Festhaltung aller übrigen beschränkenden Voraussetzungen das Auftreten parabolischer Substitutionen in der Gruppe G zugelassen wird (vergl. oben S. 144). In diesem Falle müssen nothwendig einzelne der zu den singulären Punkten der Differentialgleichung (B.) gehörigen Fundamentalsubstitutionen selbst parabolische sein; möge dies für $x = a_{l1},\ a_{l2},\ \ldots,\ a_{l\sigma}$ und, was sich ja stets erreichen lässt, auch für $x = \infty$ eintreten, dann ist also

$$\beta_{li} = \infty. \qquad (i = 1, 2, \ldots, \sigma, n+1)$$

*) Acta Mathem. Bd. I, S. 238ff.; vergl. insbesondere S. 238.

**) Dieses Journal Bd. 85, S. 13, VII.

Wenn wir den Begriff der ganzen invarianten Form wieder dahin fassen, dass eine solche Form für endliche Werthe der $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{y}_2$ an keiner *innerhalb* des Bereichs $L_\varkappa$ gelegenen Stelle unendlich wird, so hat in dem durch Gleichung (3.) voriger Nummer gegebenen allgemeinen Ausdruck $R(x)$ nach wie vor die Gestalt:

$$(1.) \qquad R(x) = \frac{\prod_{i=1}^{m}(x-c_i)^{\lambda_i}}{\prod_{\varkappa=1}^{n}(x-a_\varkappa)^{-r\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{\beta_\varkappa}\right)}}, \qquad \sum_{i=1}^{m}\lambda_i = \frac{r}{\nu},$$

$$-\frac{1}{\nu} = \sum_{\varkappa=1}^{n}\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\frac{1}{\beta_\varkappa}\right)-1,$$

und die für die Exponenten λ_i geltenden Bedingungen sind für reguläre und solche singuläre Werthe c_i, die nicht zu den logarithmisch singulären a_{li} gehören, dieselben wie die in der vorigen Nummer angegebenen, während wenn c_i einen der Werthe a_{li}, $(i = 1, 2, \ldots, \sigma)$ hat, das zugehörige λ_i jede beliebige positive rationale Zahl sein kann. Folglich bleiben auch die für die Primformen entwickelten Formeln bestehen, soweit sich dieselben auf reguläre oder nicht logarithmisch singuläre Punkte beziehen, dagegen ist für den logarithmisch singulären Punkt $x = a_{li}$

$$\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{-\frac{\nu}{2}}(x-a_{li})\prod_{\varkappa=1}^{n}(x-a_\varkappa)^{\nu\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{\beta_\varkappa}\right)}$$

insofern als Primform zu betrachten, als dieser Ausdruck nach Absonderung des Factors $\mathfrak{y}_1^\nu$ zwar *innerhalb* $L_\varkappa$ an *keiner* Stelle verschwindet, aber wenn η in den zu $x = a_{li}$ gehörigen Werth α_{li} so einrückt, wie es einrücken muss, damit $x = a_{li}$ werde, streng gleich Null wird.

Bei manchen Untersuchungen kann es jedoch nützlich sein, den Begriff der ganzen Form $r$ten Grades in dem vorliegenden Falle dahin zu fassen, dass eine solche Form nicht nur für alle η-Werthe, die *innerhalb* $L_\varkappa$ liegen, sondern auch noch dann einen endlichen Werth behalte, wenn η längs der Seite eines Polygons aus dem Innern von $L_\varkappa$ kommend in einen, der den logarithmisch singulären Punkten entsprechenden Punkte der *Begrenzung* von $L_\varkappa$ eintritt. (In der That unterscheidet sich ein solcher Punkt der Begrenzung von den Doppelpunkten der hyperbolischen und loxodromischen Substitutionen dadurch, dass, wenn η auf die angegebene Weise in denselben einrückt, die Function x von η einen wohlbestimmten Werth wirklich annimmt, während dieselbe in der Nähe aller anderen

Punkte der Begrenzung völlig unbestimmt bleibt.) Um dieser Forderung entsprechen zu können, sieht man sich aber genöthigt zuzulassen, dass die von dem Factor $\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{-\frac{r}{2}}$ befreite Form nicht nur aus rationalen Potenzen von rationalen Functionen von x, sondern auch aus *Logarithmen* solcher rationalen Functionen zusammengesetzt sei. Wir wollen, unter Zugrundelegung dieser Definition einer ganzen Form, deren allgemeine Gestalt aufzufinden suchen und betrachten zu dem Ende das Verhalten von y_1 an einer logarithmisch singulären Stelle.

Sei die zum Punkte $x = a_l$ gehörige parabolische Substitution

$$\frac{1}{\eta_l - \alpha_l} = \frac{1}{\eta - \alpha_l} + \gamma_l,$$

dann ist (vergl. S. 134) in der Umgebung von $x = a_l$

$$\frac{2\pi i}{\gamma_l(\eta - \alpha_l)} = \delta_l + (x - a_l)\mathfrak{P}_l(x|a_l) + \log(x - a_l),$$

wo δ_l eine Constante, $\mathfrak{P}_l(x|a_l)$ eine gewöhnliche Potenzreihe von $x - a_l$, die für $x = a_l$ nicht verschwindet, bedeuten. Setzt man also

$$t_l = e^{\frac{2\pi i}{\gamma_l(\eta - \alpha_l)}},$$

so verschwindet t_l, wenn η in α_l so einrückt, wie es einrücken muss, damit $x = a_l$ werde, und*) in der Umgebung von $t_l = 0$ ist:

$$(2.) \qquad \begin{cases} x - a_l = t_l \mathfrak{P}_l(t_l), \\ y_1 = \dfrac{1}{\eta - \alpha_l} t_l^{\frac{1}{2}} \overline{\mathfrak{P}}_l(t_l), \end{cases}$$

wo $\mathfrak{P}_l(t_l)$, $\overline{\mathfrak{P}}_l(t_l)$ gewöhnliche Potenzreihen von t_l bedeuten, die für $t_l = 0$ von Null verschiedene Werthe annehmen. Ebenso ist, wenn

$$\frac{1}{\eta_{n+1} - \alpha_{n+1}} = \frac{1}{\eta - \alpha_{n+1}} + \gamma_{n+1}$$

die zu $x = \infty$ gehörige Fundamentalsubstitution darstellt und

$$t_{n+1} = e^{\frac{2\pi i}{\gamma_{n+1}(\eta - \alpha_{n+1})}}$$

gesetzt wird, in der Umgebung von $t_{n+1} = 0$:

$$(3.) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{x} = t_{n+1} \mathfrak{P}(t_{n+1}), \\ y_1 = \dfrac{1}{\eta - \alpha_{n+1}} t_{n+1}^{\frac{1}{2}} \overline{\mathfrak{P}}(t_{n+1}), \end{cases}$$

*) Vergl. *Poincaré*, Acta Mathem. Bd. I, S. 273.

wo auch $\mathfrak{P}(t_{n+1})$, $\overline{\mathfrak{P}}(t_{n+1})$ gewöhnliche, nicht mit t_{n+1} verschwindende Potenzreihen bedeuten.

Wir werden daher in dem durch die Gleichung (3.) voriger Nummer gegebenen allgemeinen Ausdruck einer ganzen Form $r$ten Grades zu setzen haben:

$$(4.) \qquad R(x) = \frac{\prod_{i=1}^{m}(x-c_i)^{\lambda_i}\left\{\prod_{i=1}^{\sigma}(x-a_{li})-1\right\}^{-r}}{\prod_{\varkappa=1}^{n}(x-a_\varkappa)^{-r\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{\beta_\varkappa}\right)}\left\{\log\prod_{i=1}^{\sigma}(x-a_{li})\right\}^{-r}}.$$

Dabei müssen, um die Eindeutigkeit in η zu wahren, die positiven Exponenten λ_i dieselben Bedingungen erfüllen, wie in dem durch Gleichung (3.) voriger Nummer dargestellten Ausdruck, nur mit dem Unterschiede, dass

$$(5.) \qquad \sum_{i=1}^{m}\lambda_i = \frac{r}{\mu}, \quad -\frac{1}{\mu} = \sum_{\varkappa=1}^{n}\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\frac{1}{\beta_\varkappa}\right)-\sigma-\tfrac{1}{2},$$

zu nehmen, also r auch wieder rational vorauszusetzen ist. Es erhellt dann unmittelbar, dass

$$\vartheta_1^{-r}\mathfrak{H}(\vartheta_1, \vartheta_2) = \mathsf{H}(\eta)$$

in den nicht logarithmisch singulären Punkten sowie für alle Werthe von x, welche nicht

$$\left(\prod_{i=1}^{\sigma}(x-a_{li})-1\right)\prod_{i=1}^{m}(x-c_i)$$

annulliren, einen endlichen und von Null verschiedenen Werth hat; dass diese Eigenschaft von $\mathsf{H}(\eta)$ auch an allen übrigen von den c_i verschiedenen Stellen x gewahrt bleibt, soll nun gezeigt werden.

Betrachten wir zunächst einen der logarithmisch singulären Punkte $x = a_l$ und den correspondirenden Eckpunkt $\eta = \alpha_l$ des Fundamentalbereichs, dann ist in der Nähe von $\eta = \alpha_l$:

$$R(x) = t_l^{\frac{r}{2}}\mathfrak{P}(t_l)\frac{1}{\left\{\frac{2\pi i}{\gamma_l}\frac{1}{\eta-\alpha_l}+\mathfrak{P}_1(t_l)\right\}^{-r}},$$

wo $\mathfrak{P}(t_l)$, $\mathfrak{P}_1(t_l)$ gewöhnliche Potenzreihen von t_l bedeuten, deren erstere für $t_l = 0$ stets von Null verschieden ist. Hieraus und aus den Gleichungen (2.) ist nun unmittelbar ersichtlich, dass, wenn η aus dem Innern von $L_\varkappa$ kommend, längs einer Polygonseite in den Werth α_l einrückt, d. h. so dass t_l und $x-a_l$ verschwinden, $\mathsf{H}(\eta)$ einen endlichen und von Null verschiedenen Werth erhält.

In der Umgebung von $x=\infty$, beziehungsweise $\eta=\alpha_{n+1}$, erhalten wir, da

$$\log \overset{\sigma}{\underset{i=1}{\Pi}}(x-a_{1i}) = \sigma\log x+\log \overset{\sigma}{\underset{i=1}{\Pi}}\Big(1-\frac{a_{1i}}{x}\Big),$$

für $R(x)$ die Entwickelung

$$R(x) = \Big(\frac{1}{t_{n+1}}\Big)^{\frac{r}{2}} \mathfrak{P}(t_{n+1}) \frac{1}{\Big(\frac{-\sigma.2\pi i}{\gamma_{n+1}(\eta-\alpha_{n+1})}+\mathfrak{P}_1(t_{n+1})\Big)^{-r}},$$

wo $\mathfrak{P}(t_{n+1})$, $\mathfrak{P}_1(t_{n+1})$ gewöhnliche Potenzreihen von t_{n+1} bedeuten, deren erstere nicht mit t_{n+1} gleichzeitig verschwindet, und dies giebt, nach Gleichung (3.), mit y_1^{-r} multiplicirt, ein Resultat, welches einen endlichen und von Null verschiedenen Werth annimmt, wenn η auf die mehrfach angegebene Weise in den Punkt α_{n+1} eintritt.

Sei endlich $x=b$ eine λ-fache Nullstelle von $\overset{\sigma}{\underset{i=1}{\Pi}}(x-a_{1i})-1$, die für den Werth $\eta=\beta$ zum Vorschein kommt, so ist in der Umgebung dieser Stelle

$$\overset{\sigma}{\underset{i=1}{\Pi}}(x-a_{1i})-1 = (x-b)^{\lambda}(\varepsilon_0+\varepsilon_1(x-b)+\cdots),$$

$$\log \overset{\sigma}{\underset{i=1}{\Pi}}(x-a_{1i}) = \log(1-(x-b)^{\lambda}(\varepsilon_0+\varepsilon_1(x-b)+\cdots)),$$

$$= (x-b)^{\lambda}(\delta_0+\delta_1(x-b)+\cdots),$$

wo ε_0, δ_0 von Null verschiedene Constanten bedeuten, folglich hat die Function $\mathsf{H}(\eta)$ auch an dieser Stelle einen endlichen und von Null verschiedenen Werth und verhält sich in der Umgebung von $\eta=\beta$ eindeutig.

Wir haben also in

$$\mathfrak{H}(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2) = \Big(\frac{dx}{d\xi}\Big)^{-\frac{r}{2}} R(x),$$

wo $R(x)$ durch die Gleichung (4.) gegeben wird, den allgemeinen Ausdruck einer ganzen invarianten eindeutigen Form, d. h. einer Form, die nur an den Stellen $x=c_i$ verschwindet, sonst aber allenthalben innerhalb $L_\varkappa$ und, in dem angegebenen Sinne, auch in den an der Grenze von $L_\varkappa$ gelegenen Doppelpunkten parabolischer Substitutionen der Gruppe G endlich und von Null verschieden ist. Der Ausdruck

$$\Phi(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2) = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{-\frac{\mu}{2}} (ax+b) \prod_{\varkappa=1}^{n} (x-a_\varkappa)^{\mu\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{\beta_\varkappa}\right)} \left[\log \prod_{i=1}^{\sigma}(x-a_{1i})\right]^{\mu} \cdot \left[\prod_{i=1}^{\sigma}(x-a_{1i})-1\right]^{\mu}$$

stellt im Allgemeinen die zu $x = -\frac{b}{a}$, dagegen wenn $-\frac{b}{a} = a_\varkappa$, wo $a_\varkappa$ ein nicht logarithmisch singulärer Punkt, die $\beta_\varkappa$te Potenz der zu diesem Punkte gehörigen Primform dar. Ist $-\frac{b}{a} = a_{1i}$, so verschwindet die Form $\Phi(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2)$, wenn η auf die oft gedachte Weise in den Punkt a_{1i} und die durch die Substitutionen der Gruppe daraus hervorgehenden Stellen einrückt, wie

$$e^{\frac{2\pi i}{\gamma_{1i}(\eta-a_{1i})}},$$

und spielt daher für diesen Punkt dieselbe Rolle, wie die $\beta_\varkappa$te Potenz der Primform für einen nicht logarithmisch singulären Punkt $a_\varkappa$.

Bemerken wir noch, dass im Allgemeinen erst

$$e^{\Phi(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2)}$$

eine eindeutige Function von ξ wird, während $\mathfrak{H}(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2)$ und $\Phi(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2)$ sich aus Wurzeln und Logarithmen eindeutiger Functionen von ξ zusammensetzen. Auf eine Darstellung dieser Formen hoffe ich bei einer späteren Gelegenheit zurückkommen zu können.

Wenn nur einer der singulären Punkte $x = a_1, a_2, \ldots, a_n, \infty$ ein logarithmisch singulärer ist, so kann durch Anwendung eines einfachen Kunstgriffs die volle Gültigkeit der in der vorigen Nummer entwickelten Formeln erzielt werden. Wir können uns nämlich diesen logarithmisch singulären Punkt stets nach $x = \infty$ verlegt denken und dann η so wählen, dass es für $x = \infty$ auch unendlich wird. Die zu $x = \infty$ gehörige parabolische Fundamentalsubstitution hat alsdann die Form

$$\eta_{n+1} = \eta + \gamma_{n+1},$$

und es ist in der Umgebung von $x = \infty$:

$$\frac{1}{x} = t\mathfrak{P}(t),$$

$$y_1 = \frac{1}{t}\mathfrak{P}_1(t),$$

wo

$$t = e^{\frac{2\pi i}{\gamma_{n+1}}\eta}$$

ist und $\mathfrak{P}(t)$, $\mathfrak{P}_1(t)$ gewöhnliche Potenzreihen von t bedeuten, die für $t=0$ nicht verschwinden. Man ersieht hieraus, dass bei Beibehaltung der Ausdrücke, die in der vorigen Nummer für die ganze invariante Form $\mathfrak{H}(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2)$ und für die zu regulären oder im Endlichen gelegenen singulären Punkten gehörigen Primformen hergeleitet wurden, die Endlichkeit dieser Formen auch dann erhalten bleibt, wenn η so in den Werth ∞ und die aus demselben durch die Substitutionen der Gruppe hervorgehenden einrückt, wie es einrücken muss, damit $x=\infty$ werde. Dagegen spielt für $x=\infty$ die Form

$$\Psi(y_1,\ y_2) = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{-\frac{\nu}{2}} \prod_{\varkappa=1}^{n} (x-a)^{\nu\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{\beta_\varkappa}\right)}$$

dieselbe Rolle, wie für einen nicht logarithmisch singulären Punkt $x=a_\varkappa$ die $\beta_\varkappa$te Potenz der entsprechenden Primform.

Für $n=2$, $\beta_1=3$, $\beta_2=2$, $\beta_3=\infty$, $a_1=0$, $a_2=1$, $\xi=x$, d. h. im Falle der elliptischen Modulfunction, stimmen diese Formen mit denjenigen überein, welche Herr ***Klein*** in seinen „Vorlesungen über die Modulfunction“ *) betrachtet und die, abgesehen von constanten Factoren, direct durch die Invarianten g_2, g_3 und die Discriminante Δ der biquadratischen Form, aus welcher die Modulfunction entspringt, dargestellt werden. Ebendaselbst **) leitet Herr ***Klein*** auch Relationen für diese Formen her, welche sich aus unseren Gleichungen (11.) voriger Nummer durch Specialisirung ergeben.

*) S. 117—129.
**) S. 118 § 3.

Erweiterung eines *Pfaff*schen Satzes auf simultane totale Differentialgleichungen erster Ordnung und Integration einer Klasse von simultanen partiellen Differentialgleichungen.

(Von Herrn *M. Hamburger*.)

Bei der Lösung des *Pfaff*schen Problems, eine totale Differentialgleichung erster Ordnung zwischen mehr als zwei Veränderlichen vollständig zu integriren, besteht die Hauptoperation des Verfahrens, welches der berühmte Urheber hierfür einschlägt, in der Reduction des Differentialausdrucks

$$U = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \cdots + a_n dx_n,$$

wo die Coefficienten $a_1, \ldots, a_n$ Functionen der veränderlichen Grössen $x_1, \ldots, x_n$ sind, auf die Form

$$\lambda U = \alpha_1 dy_1 + \alpha_2 dy_2 + \cdots + \alpha_{n-1} dy_{n-1},$$

so dass $\lambda, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ Functionen von $x_1, \ldots, x_n$, hingegen $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ Functionen von $y_1, \ldots, y_{n-1}$ seien, und dass die Anzahl der letzteren veränderlichen Grössen um Eins kleiner sei als die Anzahl der Grössen $x_1, \ldots, x_n$*).

Die darin gestellte Aufgabe übertragen wir auf ein System von p simultanen Differentialausdrücken erster Ordnung der Form

$$U^\varrho = a_1^\varrho dx_1 + a_2^\varrho dx_2 + \cdots + a_n^\varrho dx_n \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, p), \tag{1.}$$

wo $a_1^\varrho, \ldots, a_n^\varrho$ Functionen von x bedeuten und $p < n$ ist, in folgender Gestalt: Es soll vermittelst eines Grössensystemes

$$\lambda_k^i, \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, p)$$

dessen Determinante Δ von Null verschieden sei, eine Reduction der Differentialausdrücke (1.) auf solche von $n-1$ Variabeln derart bewirkt werden,

*) S. *Gauss*, Göttinger gelehrte Anzeigen 1815. Werke III, p. 252.

dass die p Identitäten stattfinden:

$$(2.)\qquad \lambda_\varrho^1 U^1+\lambda_\varrho^2 U^2+\cdots+\lambda_\varrho^p U^p = \alpha_1^\varrho dy_1+\alpha_2^\varrho dy_2+\cdots+\alpha_{n-1}^\varrho dy_{n-1},$$
$$(\varrho=1, 2, \ldots, p)$$

wo die Grössen λ_k^i, α_k^i und y_i Functionen von $x_1, \ldots, x_n$ bedeuten und die Coefficienten α_k^i Functionen von $y_1, \ldots, y_{n-1}$ sein sollen. Wie vorauszusehen, kann die Reduction (2.) nur unter gewissen von den Coefficienten der Differentialausdrücke (1.) zu erfüllenden Bedingungen von statten gehen, die im Verlauf des folgenden Verfahrens sich ergeben werden.

Denken wir uns $x_1, x_2, \ldots, x_n$ durch die n neuen Variabeln $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ und t ausgedrückt, so ergiebt sich zunächst aus (2.):

$$(3.)\qquad \lambda_k^1 \sum_{i=1}^{i=n} a_i^1 \frac{\partial x_i}{\partial t}+\lambda_k^2 \sum_{i=1}^{i=n} a_i^2 \frac{\partial x_i}{\partial t}+\cdots+\lambda_k^p \sum_{i=1}^{i=n} a_i^p \frac{\partial x_i}{\partial t} = 0, \qquad (k=1, 2, \ldots, p)$$

woraus, da die Determinante Δ der Grössen λ von Null verschieden sein soll, die p Gleichungen folgen

$$(3^a.)\qquad \sum_{i=1}^{i=n} a_i^1 \frac{\partial x_i}{\partial t}=0, \quad \sum_{i=1}^{i=n} a_i^2 \frac{\partial x_i}{\partial t}=0, \quad \ldots, \quad \sum_{i=1}^{i=n} a_i^p \frac{\partial x_i}{\partial t}=0.$$

Aus den Identitäten (2.) folgt ferner, wegen der Unabhängigkeit der Coefficienten α_k^i von t:

$$(4.)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\left\{\lambda_k^1 \sum_{i=1}^{i=n} a_i^1 \frac{\partial x_i}{\partial y_\nu}+\cdots+\lambda_k^p \sum_{i=1}^{i=n} a_i^p \frac{\partial x_i}{\partial y_\nu}\right\} = 0,$$
$$(k=1, 2, \ldots, p;\ \nu=1, 2, \ldots, n-1)$$

oder

$$\lambda_k^1 \sum_{i=1}^{i=n} a_i^1 \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_\nu \partial t}+\cdots+\lambda_k^p \sum_{i=1}^{i=n} a_i^p \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_\nu \partial t}+\sum_{i=1}^{i=n}\left\{\frac{\partial(\lambda_k^1 a_i^1)}{\partial t}\frac{\partial x_i}{\partial y_\nu}+\cdots+\frac{\partial(\lambda_k^p a_i^p)}{\partial t}\frac{\partial x_i}{\partial y_\nu}\right\} = 0.$$

Die Differentiation der Gleichung (3.) giebt mit Berücksichtigung von (3ª.):

$$\lambda_k^1 \sum_{i=1}^{i=n} a_i^1 \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_\nu \partial t}+\cdots+\lambda_k^p \sum_{i=1}^{i=n} a_i^p \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_\nu \partial t}+\lambda_k^1 \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial a_i^1}{\partial y_\nu}\frac{\partial x_i}{\partial t}+\cdots+\lambda_k^p \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial a_i^p}{\partial y_\nu}\frac{\partial x_i}{\partial t} = 0,$$

woraus dann durch Subtraction der beiden vorstehenden Gleichungen folgt:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left\{\frac{\partial(\lambda_k^1 a_i^1)}{\partial t}+\cdots+\frac{\partial(\lambda_k^p a_i^p)}{\partial t}\right\}\frac{\partial x_i}{\partial y_\nu} = \sum_{i=1}^{i=n}\left\{\lambda_k^1 \frac{\partial a_i^1}{\partial y_\nu}+\cdots+\lambda_k^p \frac{\partial a_i^p}{\partial y_\nu}\right\}\frac{\partial x_i}{\partial t}.$$

Durch Vergleichung der Coefficienten von $\frac{\partial x_i}{\partial y_\nu}$ auf beiden Seiten erhält man

$$\frac{\partial(\lambda_k^1 a_i^1)}{\partial t}+\cdots+\frac{\partial(\lambda_k^p a_i^p)}{\partial t} = \sum_{s=1}^{s=n}\left(\lambda_1^k \frac{\partial a_s^1}{\partial x_i}+\cdots+\lambda_k^p \frac{\partial a_s^p}{\partial x_i}\right)\frac{\partial x_s}{\partial t},$$

woraus endlich folgt:

$$\lambda_k^1 \sum_{s=1}^{s=n} \left(\frac{\partial a_i^1}{\partial x_s} - \frac{\partial a_s^1}{\partial x_i} \right) \frac{\partial x_s}{\partial t} + \cdots + \lambda_k^p \sum_{s=1}^{s=n} \left(\frac{\partial a_i^p}{\partial x_s} - \frac{\partial a_s^p}{\partial x_i} \right) \frac{\partial x_s}{\partial t}$$
$$+ a_i^1 \frac{\partial \lambda_k^1}{\partial t} + \cdots + a_i^p \frac{\partial \lambda_k^p}{\partial t} = 0,$$

$(k = 1, 2, \ldots, p;\ i = 1, 2, \ldots, n).$

Setzt man die Variabeln $y_1, \ldots, y_{n-1}$ gleich Constanten, so dass $x_1, \ldots, x_n$ Functionen von t allein werden, so erhält man aus den vorstehenden Gleichungen und den Gleichungen (3ª.) durch Multiplication mit dt die Differentialgleichungen:

$$(5.)^*) \qquad \begin{cases} \lambda_k^1 \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial a_i^1}{\partial x_s} - \frac{\partial a_s^1}{\partial x_i} \right) dx_s + \cdots + \lambda_k^p \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial a_i^p}{\partial x_s} - \frac{\partial a_s^p}{\partial x_i} \right) dx_s \\ \qquad + a_i^1 d\lambda_k^1 + \cdots + a_i^p d\lambda_k^p = 0, \\ \sum_{s=1}^{s=n} a_s^1 dx_s = 0, \quad \sum_{s=1}^{s=n} a_s^2 dx_s = 0, \quad \ldots, \quad \sum_{s=1}^{s=n} a_s^p dx_s = 0, \end{cases}$$

welche durch die $n-1$ von den λ unabhängigen Integrale

$$y_1 = c_1, \quad y_2 = c_2, \quad \ldots, \quad y_{n-1} = c_{n-1}$$

simultan befriedigt werden.

Setzt man in der ersten der Gleichungen (5.) $k = 1, 2, \ldots, p$, multiplicirt die bezüglichen Gleichungen mit $\mu_1^\varrho, \mu_2^\varrho, \ldots, \mu_p^\varrho$, wo μ_h^ϱ den Coefficienten von λ_h^ϱ in Δ bedeutet, und summirt, so erhält man

$$\Delta \sum_{s=1}^{s=n} \left(\frac{\partial a_i^\varrho}{\partial x_s} - \frac{\partial a_s^\varrho}{\partial x_i} \right) dx_s + a_i^1 (\mu_1^\varrho d\lambda_1^1 + \mu_2^\varrho d\lambda_2^1 + \cdots + \mu_p^\varrho d\lambda_p^1)$$
$$+ a_i^2 (\mu_1^\varrho d\lambda_1^2 + \mu_2^\varrho d\lambda_2^2 + \cdots + \mu_p^\varrho d\lambda_p^2) + \cdots + a_i^p (\mu_1^\varrho d\lambda_1^p + \mu_2^\varrho d\lambda_2^p + \cdots + \mu_p^\varrho d\lambda_p^p) = 0.$$

Die Grösse

$$\frac{\mu_1^\varrho d\lambda_1^k + \mu_2^\varrho d\lambda_2^k + \cdots + \mu_p^\varrho d\lambda_p^k}{\Delta},$$

für welche man mit Rücksicht darauf, dass

$$\frac{\mu_1^\varrho \lambda_1^k + \mu_2^\varrho \lambda_2^k + \cdots + \mu_p^\varrho \lambda_p^k}{\Delta}$$

den Werth Null oder Eins hat, auch schreiben kann

$$-\lambda_1^k d\left(\frac{\mu_1^\varrho}{\Delta}\right) - \lambda_2^k d\left(\frac{\mu_2^\varrho}{\Delta}\right) - \cdots - \lambda_p^k d\left(\frac{\mu_p^\varrho}{\Delta}\right),$$

*) Auf ein solches System ist auch Herr ***Forsyth*** geführt worden. S. Theory of differential equations, part I.

sei der Kürze wegen mit $-v^{\varrho,k}$ bezeichnet, ferner sei

$$\frac{\partial a_i^\varrho}{\partial x_s} - \frac{\partial a_s^\varrho}{\partial x_i} = a_{i,s}^\varrho, \quad \text{so dass} \quad a_{i,i}^\varrho = 0, \quad a_{i,s}^\varrho = -a_{s,i}^\varrho.$$

Indem man nun für i die Zahlen 1, 2, ..., n nimmt, ergeben sich für jedes ϱ die $n+p$ Gleichungen

$$(6.) \qquad \begin{cases} a_{\sigma 1}^\varrho dx_1 + \cdots + a_{\sigma n}^\varrho dx_n = a_\sigma^1 v^{\varrho,1} + \cdots + a_\sigma^p v^{\varrho,p}, & (\sigma = 1, 2, \ldots, n) \\ a_1^s dx_1 + \cdots + a_n^s dx_n = 0. & (s = 1, 2, \ldots, p) \end{cases}$$

$v^{\varrho,1}, \ldots, v^{\varrho,p}$ bedeuten nach dem Obigen unendlich kleine Grössen, die aus den p Differentialen $d\left(\frac{\mu_1^\varrho}{\Delta}\right), d\left(\frac{\mu_2^\varrho}{\Delta}\right), \ldots, d\left(\frac{\mu_p^\varrho}{\Delta}\right)$ linear und homogen zusammengesetzt sind. Die Determinante $(p+n)$ten Grades

$$(6^a.) \qquad \begin{vmatrix} a_{\sigma 1}^\varrho \ldots a_{\sigma n}^\varrho & -a_\sigma^1 \cdots -a_\sigma^p \\ a_1^s \ldots a_n^s & 0 \ldots 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{pmatrix} \sigma = 1, 2, \ldots, n \\ s = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix}$$

ist eine schiefe Determinante und daher identisch Null, wenn $p+n$ ungerade ist. Ist daher 1) $p+n$ ungerade, so ist eine der Gleichungen (6.) eine Folge der übrigen $n+p-1$ Gleichungen, und diese liefern nach Elimination der linear auftretenden Grössen $v^{\varrho,1}, \ldots, v^{\varrho,p}$ für ein bestimmtes ϱ ein vollständiges System von $n-1$ Differentialgleichungen zwischen den n Variabeln $x_1, \ldots, x_n$. Sind

$$u_1 = c_1, \quad u_2 = c_2, \quad \ldots, \quad u_{n-1} = c_{n-1}$$

$n-1$ von einander unabhängige Integrale dieses Systems, so liefern $n-1$ beliebige von einander unabhängige Functionen der Grössen $u_1, \ldots, u_{n-1}$ die gesuchten Grössen $y_1, \ldots, y_{n-1}$ als Functionen von $x_1, \ldots, x_n$.

Die dem System (6.) aequivalente lineare partielle Differentialgleichung erhält man durch die Bemerkung, dass die Gleichung

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial y}{\partial x_n} dx_n = 0,$$

wo y eine beliebige Function der Integrale $u_1, \ldots, u_{n-1}$ oder $y_1, \ldots, y_{n-1}$ bedeutet, eine Folge der Gleichungen (6.) sein muss, in der Form

$$(7.) \qquad \begin{vmatrix} a_{\sigma 1}^\varrho \ldots a_{\sigma n}^\varrho & -a_\sigma^1 \cdots -a_\sigma^p \\ a_1^s \ldots a_n^s & 0 \ldots 0 \\ \frac{\partial y}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial y}{\partial x_n} & 0 \ldots 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{pmatrix} \sigma = 1, 2, \ldots, n \\ s = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix}$$

worin eine Zeile, z. B. $a_1^\varrho, \ldots, a_n^\varrho, 0, 0$ auszulassen ist. $n-1$ unabhängige

Lösungen derselben stellen die gesuchten Variabeln $y_1, \ldots, y_{n-1}$ dar. Schreibt man die Gleichung (7.) geordnet nach $\frac{\partial y}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial y}{\partial x_n}$:

$$A^\varrho(y) = A_1^\varrho \frac{\partial y}{\partial x_1} + A_2^\varrho \frac{\partial y}{\partial x_2} + \cdots + A_n^\varrho \frac{\partial y}{\partial x_n} = 0,$$

so ergeben sich die von den Coefficienten des vorgelegten Systems von Differentialausdrücken (1.) zu erfüllenden Bedingungen, damit die Reduction (2.) möglich sei, aus der Bemerkung, dass die p partiellen Differentialgleichungen

$$A^1(y) = 0, \quad A^2(y) = 0, \quad \ldots, \quad A^p(y) = 0$$

dieselben Lösungen $y_1, \ldots, y_{n-1}$ haben müssen. Die fraglichen Bedingungen lauten hiernach

$$\frac{A_1^\varrho}{A_1^1} = \frac{A_2^\varrho}{A_2^1} = \cdots = \frac{A_n^\varrho}{A_n^1} \quad \text{für} \quad \varrho = 2, 3, \ldots, p.$$

Die Anzahl dieser Bedingungen wäre sonach $n(p-1)$. Allein diese Bedingungen sind nicht von einander unabhängig. Die Aufgabe der Reduction (2.) führt nämlich zunächst auf das Gleichungssystem (5.)

$$\lambda_k^1 \sum_{s=1}^{s=n} \left(\frac{\partial a_i^1}{\partial x_s} - \frac{\partial a_s^1}{\partial x_i} \right) dx_s + \cdots + \lambda_k^p \sum_{s=1}^{s=n} \left(\frac{\partial a_i^p}{\partial x_s} - \frac{\partial a_s^p}{\partial x_i} \right) dx_s + a_i^1 d\lambda_k^1 + \cdots + a_i^p d\lambda_k^p = 0$$

$$(k = 1, 2, \ldots, p; \; i = 1, 2, \ldots, n)$$

und durch Auflösung nach den Summengrössen auf die pn Gleichungen

$$a_{i,1}^\varrho dx_1 + \cdots + a_{i,n}^\varrho dx_n = a_i^1 v^{\varrho,1} + \cdots + a_i^p v^{\varrho,p}.$$

$$(\varrho = 1, 2, \ldots, p; \; i = 1, 2, \ldots, n)$$

Eliminirt man aus ihnen die p^2 linear auftretenden Grössen $v^{\varrho,\sigma}$ ($\varrho = 1, 2, \ldots, p$; $\sigma = 1, 2, \ldots, p$), so erhält man ein System von $np - p^2$ Differentialgleichungen zwischen den Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ allein. Hieraus folgt, dass

$$np - p^2 - (n-1) = (p-1)(n-p-1)$$

dieser Gleichungen Folgen der übrigen $n-1$ Gleichungen sein müssen. Die wahre Anzahl der Bedingungen für die Coefficienten a_k^i ist demnach $(p-1)(n-p-1)$.

Sie verschwindet im Falle des *Pfaff*schen Problems ($p = 1$) und im Falle eines vollständigen Systems totaler Differentialgleichungen ($p = n-1$).

Ist 2) $p+n$ gerade und die Determinante (6ª.) verschwindet nicht für jeden Werth des Index ϱ aus der Reihe $1, 2, \ldots, p$, dann lassen die Gleichungen keine Auflösung nach den Differentialen $dx_1, \ldots, dx_n$ zu, und die

Reduction der Differentialausdrücke (1.) ist daher in der Form (2.) nicht ausführbar. In diesem Fall wird man wie beim *Pfaff*schen Problem ($p = 1$) für den Fall einer ungeraden Anzahl der Variabeln, einstweilen x_1 als constant annehmen und, da $p+n-1$ ungerade ist, die Transformation

$$\lambda_k^1 U^1 + \lambda_k^2 U^2 + \cdots + \lambda_k^p U^p = \alpha_2^k dy_2 + \alpha_3^k dy_3 + \cdots + \alpha_{n-1}^k dy_{n-1},$$

wo $U^k = a_2^k dx_2 + \cdots + a_n^k dx_n$, x_1 constant ist, ausführen können, unter den nach dem Früheren nöthigen Bedingungen; $\alpha_2^k, \ldots, \alpha_{n-1}^k$ sind Functionen der $n-2$ Variabeln $y_2, \ldots, y_{n-1}$ und x_1, welches letztere Argument als Constante in ihnen auftritt. Führt man jetzt wieder x_1 als Veränderliche ein, so ist zu setzen

$$V_k = \lambda_k^1 a_1^1 + \lambda_k^2 a_1^2 + \cdots + \lambda_k^p a_1^p - \left(\alpha_2^k \frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \alpha_3^k \frac{\partial y_3}{\partial x_1} + \cdots + \alpha_{n-1}^k \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_1}\right),$$

und man erhält die Reduction auf einen Differentialausdruck mit $n-1$ Variabeln in der Form

$$\lambda_k^1 U^1 + \lambda_k^2 U^2 + \cdots + \lambda_k^p U^p = V_k dx_1 + \alpha_2^k dy_2 + \alpha_3^k dy_3 + \cdots + \alpha_{n-1}^k dy_{n-1},$$

welche an Stelle der Verwandlung (2.) zu setzen ist. $U^1, \ldots, U^p$ haben jetzt wieder die ursprüngliche Bedeutung der Differentialausdrücke (1.). Weiter unten wird für den in Rede stehenden Fall noch eine zweite Art der Reduction angegeben werden.

Kehren wir zur Transformation (2.) zurück, so handelt es sich noch um die Bestimmung der Coefficienten α_i^k der Differentiale $dy_1, \ldots, dy_{n-1}$. Nachdem ein System von Integralen $y_1, \ldots, y_{n-1}$ gefunden ist, ergiebt sich aus (2.)

$$(8.) \qquad \alpha_s^k = \lambda_k^1 \sum_{i=1}^{i=n} a_i^1 \frac{\partial x_i}{\partial y_s} + \lambda_k^2 \sum_{i=1}^{i=n} a_i^2 \frac{\partial x_i}{\partial y_s} + \cdots + \lambda_k^p \sum_{i=1}^{i=n} a_i^p \frac{\partial x_i}{\partial y_s}.$$

Hierbei hat man sich $x_1, \ldots, x_n$ durch $y_1, \ldots, y_{n-1}, t$ ausgedrückt zu denken. Insbesondere kann man x_1 für t nehmen, also $x_2, x_3, \ldots, x_n$ durch $x_1, y_1, \ldots, y_{n-1}$ ausdrücken. Nach geschehener Substitution muss dann auf der rechten Seite x_1 herausfallen, da die linke Seite allein von $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ abhängig ist. Vorzugsweise einfach gestaltet sich die Bestimmung der Coefficienten α_i^k, wenn man sich nach dem Vorgang des Herrn *Natani**) der von *Cauchy* und *Jacobi* eingeführten und von Herrn *Natani* für die Behandlung des *Pfaff*schen Problems so erfolgreich verwendeten „Hauptintegrale" des Systemes (6.) bedient. Setzt man nämlich x_1 constant, z. B. gleich Null,

*) *Natani*, Ueber totale und partielle Differentialgleichungen. Dieses Journal Bd. 58 p. 302 ff.

und nimmt als zugehörige Anfangswerthe der übrigen Variabeln

$$x_2 = x_2', \quad x_3 = x_3', \quad \ldots, \quad x_n = x_n',$$

so lauten die Integralgleichungen des betrachteten Systems

$$y_1 = y_1', \quad y_2 = y_2', \quad \ldots, \quad y_{n-1} = y_{n-1}',$$

wo die rechten Seiten aus den linken hervorgehen, indem man $x_1 = 0$, $x_2 = x_2', \ldots, x_n = x_n'$ setzt. Diese Gleichungen löse man nach den Constanten $x_2', x_3', \ldots, x_n'$ auf, so dass

$$x_2' = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \quad x_3' = \varphi_2(x_1, \ldots, x_n), \quad \ldots, \quad x_n' = \varphi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n),$$

dann heissen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ die Hauptintegrale des Systems. Führen wir dieselben in (8.) ein, also $x_2', \ldots, x_n'$ statt $y_1, \ldots, y_{n-1}$ und berücksichtigen, dass der Ausdruck auf der rechten Seite von x_1 unabhängig ist, so dürfen wir darin $x_1 = 0$ setzen, dann wird aber $x_2' = x_2$, $x_3' = x_3, \ldots, x_n' = x_n$ und demnach

$$\frac{\partial x_\mu}{\partial x_\nu'} = 0, \quad \text{wenn} \quad \mu \gtrless \nu, \quad \frac{\partial x_\mu}{\partial x_\mu'} = 1.$$

Folglich erhält man für α_s^k die Ausdrücke

$$\alpha_s^k = (\lambda_k^1)'(a_s^1)' + (\lambda_k^2)'(a_s^2)' + \cdots + (\lambda_k^p)'(a_s^p)',$$

wo die Striche auf der rechten Seite andeuten, dass in den damit behafteten Grössen die Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ resp. mit $0, x_2', \ldots, x_n'$ zu vertauschen sind. Die Transformationsgleichungen (2.) nehmen bei Einführung der Hauptintegrale $x_2', \ldots, x_n'$ hiernach folgende einfache Gestalt an

$$\lambda_k^1 U^1 + \cdots + \lambda_k^p U^p = (\lambda_k^1)'(U^1)' + \cdots + (\lambda_k^p)'(U^p)', \qquad (k = 1, 2, \ldots, p)$$

wo

$$(U^\varrho)' = (a_2^\varrho)' dx_2' + (a_3^\varrho)' dx_3' + \cdots + (a_n^\varrho)' dx_n'.$$

Da die Determinante Δ der Grössen λ_k^i, deren Bestimmung im dritten Abschnitt erfolgen wird, von Null verschieden ist, so erhellt, dass die Integration des Systems p totaler Differentialgleichungen zwischen den n Variabeln $x_1, \ldots, x_n$

$$U^1 \equiv \sum_{s=1}^{s=n} a_s^1 dx_s = 0, \quad \ldots, \quad U^p \equiv \sum_{s=1}^{s=n} a_s^p dx_s = 0$$

mittelst der Integrale des Systems (7.) auf die Integration des Systems p totaler Differentialgleichungen

$$(U^1)' \equiv \sum_{s=2}^{s=n} (a_s^1)' dx_s' = 0. \quad \ldots, \quad (U^p)' \equiv \sum_{s=2}^{s=n} (a_s^p)' dx_s' = 0$$

zwischen den $n-1$ Variabeln $x_2', \ldots, x_n'$ reducirt ist.

Auf die weitere Behandlung dieses reducirten Systems gehen wir hier nicht ein. Für die unten folgende Anwendung auf die Integration simultaner partieller Differentialgleichungen reicht die erste Reduction hin, nur ist es noch nöthig, den Fall zu betrachten, dass zwischen den Variabeln $x_1, \ldots, x_n$ mehrere Bedingungsgleichungen

$$\varphi_1 = a_1, \quad \varphi_2 = a_2, \quad \ldots, \quad \varphi_\pi = a_\pi,$$

wo $a_1, \ldots, a_\pi$ Constanten bedeuten, gegeben sind, und $p+\pi < n$ ist. Man könnte dann π der Variabeln $x_1, \ldots, x_n$ mit Hülfe der gegebenen Gleichungen eliminiren und die Differentialausdrücke mit den übrig bleibenden $n-\pi$ Variabeln würden durch das obige Reductionsverfahren auf solche mit $n-\pi-1$ Variabeln, die mit

$$y_{\pi+1}, \quad y_{\pi+2}, \quad \ldots, \quad y_{n-1}$$

bezeichnet sein mögen, zurückgeführt. Wendet man aber ein in einem ähnlichen Falle von Herrn *Natani**) angegebenes Verfahren an, so kann man zu den Integralen $y_{\pi+1}, y_{\pi+2}, \ldots, y_{n-1}$ gelangen, ohne die gedachte Elimination auszuführen, indem man ein System von Differentialgleichungen zwischen den $x_1, \ldots, x_n$ aufstellt, deren $n-1$ Integrale

$$\varphi_1 = c_1, \quad \ldots, \quad \varphi_\pi = c_\pi, \quad y_{\pi+1} = c_{\pi+1}, \quad \ldots, \quad y_{n-1} = c_{n-1}$$

sind. Man fügt nämlich zu den Differentialausdrücken $U^1, \ldots, U^p$ noch $d\varphi_1, \ldots, d\varphi_\pi$ hinzu und setzt statt (2.) die Transformationsformel

$$(9.) \quad \begin{cases} \lambda_k^1 U^1 + \cdots + \lambda_k^p U^p + \lambda_k^{p+1} d\varphi_1 + \cdots + \lambda_k^{p+\pi} d\varphi_\pi \\ \qquad = \alpha_1^k d\varphi_1 + \cdots + \alpha_\pi^k d\varphi_\pi + \alpha_{\pi+1}^k dy_{\pi+1} + \cdots + \alpha_{n-1}^k dy_{n-1} \end{cases}$$

an, wo $\alpha_1^k, \ldots, \alpha_{n-1}^k$ Functionen von $\varphi_1, \ldots, \varphi_\pi, y_1, \ldots, y_{n-1}$ sein sollen. Die oben befolgte Methode für die Transformation führt dann in Berücksichtigung, dass $\frac{\partial}{\partial x_s}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_s}\right) = 0$ ist, zunächst an Stelle der Gleichungen (5.) zu den folgenden:

$$\lambda_k^1 \sum_{s=1}^{s=n} a_{i,s}^1 dx_s + \cdots + \lambda_k^p \sum_{s=1}^{s=n} a_{i,s}^p dx_s$$

$$+ a_i^1 d\lambda_k^1 + \cdots + a_i^p d\lambda_k^p + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} d\lambda_k^{p+1} + \cdots + \frac{\partial \varphi_\pi}{\partial x_i} d\lambda_k^{p+\pi} = 0,$$

$$\sum_{s=1}^{s=n} a_s^1 dx_s = 0, \quad \ldots, \quad \sum_{s=1}^{s=n} a_s^p dx_s = 0, \quad d\varphi_1 = 0, \quad \ldots, \quad d\varphi_\pi = 0,$$

und daraus durch Auflösung nach den in der ersten Gleichung auftretenden

*) a. a. O. p. 313 und 319 ff.

Summengrössen, indem man $k = 1, 2, \ldots, p$ setzt, dem System (6.) entsprechend, hier das System von $n+p+\pi$ Differentialgleichungen

$$(10.)\quad \begin{cases} a^{\varrho}_{\sigma 1}dx_1+\cdots+a^{\varrho}_{\sigma n}dx_n = a^1_\sigma v^{\varrho 1}+\cdots+a^p_\sigma v^{\varrho p}+\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_\sigma}v^{\varrho,p+1}+\cdots+\dfrac{\partial \varphi_\pi}{\partial x_\sigma}v^{\varrho,p+\pi}, \\ a^s_1 dx_1+\cdots+a^s_n dx_n = 0, \\ \dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_1}dx_1+\cdots+\dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_n} = 0, \end{cases}$$

$(\sigma = 1, 2, \ldots, n;\ s = 1, 2, \ldots, p;\ k = 1, 2, \ldots, \pi)$

wo $v^{\varrho,1}, \ldots, v^{\varrho,p+\pi}$ unendlich kleine Grössen bezeichnen.

Ist 1) $n+p+\pi$ ungerade, dann ist eine der vorstehenden Gleichungen eine Folge der übrigen $n+p+\pi-1$ Gleichungen, und die Elimination der linear auftretenden $p+\pi$ Grössen $v^{\varrho,1}, \ldots, v^{\varrho,p+\pi}$ liefert ein vollständiges System von $n-1$ Differentialgleichungen zwischen den n Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$. Die dieses System vertretende lineare partielle Differentialgleichung lautet:

$$(11.)\quad \begin{vmatrix} a^{\varrho}_{\sigma 1} \ldots a^{\varrho}_{\sigma n} & -a^1_\sigma \cdots -a^p_\sigma & -\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_\sigma} \cdots -\dfrac{\partial \varphi_\pi}{\partial x_\sigma} \\ a^s_1 \ldots a^s_n & 0 \ldots 0 & 0 \ldots 0 \\ \dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} \ldots \dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_n} & 0 \ldots 0 & 0 \ldots 0 \\ \dfrac{\partial y}{\partial x_1} \ldots \dfrac{\partial y}{\partial x_n} & 0 \ldots 0 & 0 \ldots 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$(\sigma = 1, 2, \ldots, n;\ s = 1, 2, \ldots, p;\ k = 1, 2, \ldots, \pi)$

worin eine Zeile, etwa $a^{\varrho}_1 \ldots a^{\varrho}_n 0\,0\,0$, auszulassen ist*).

Wie aus der Form der Determinante erhellt, sind π der Integrale der partiellen Differentialgleichung (11.) in y und mithin auch des vollständigen Systems von totalen Differentialgleichungen (10.) $\varphi_1, \ldots, \varphi_\pi$; die übrigen $n-\pi-1$ Integrale stellen die Variabeln $y_{\pi+1}, y_{\pi+2}, \ldots, y_{n-1}$ dar.

Wie aus (9.) hervorgeht, lautet die Reductionsformel in vorliegendem Falle, wenn für $\varphi_1, \ldots, \varphi_\pi$ die vorgeschriebenen Werthe eingeführt werden

$$\lambda^1_k U^1+\cdots+\lambda^p_k U^p = \alpha^k_{\pi+1}dy_{\pi+1}+\cdots+\alpha^k_{n-1}dy_{n-1}$$

und $\alpha^k_{\pi+1}, \ldots, \alpha^k_{n-1}$ sind jetzt blosse Functionen von $y_{\pi+1}, \ldots, y_{n-1}$.

Ist 2) $n+p+\pi$ gerade und die Determinante des Gleichungssystems (10.) von Null verschieden, also die Gleichungen nach $dx_1, \ldots, dx_n$ nicht auflösbar, so fügt man noch eine willkürliche Beziehung zwischen den

*) Vgl. *Frobenius*, Ueber das *Pfaff*sche Problem, dieses Journal Bd. 82 § 20, wo ähnliche Determinanten auftreten.

Variabeln $x_1, \ldots, x_n$

$$\varphi_{\pi+1}(x_1, \ldots, x_n) = a$$

hinzu und verfährt in obiger Weise.

Nehmen wir insbesondere an, dass $\pi = 0$ und $n+p$ gerade, so haben wir den bereits früher (S. 163) behandelten Fall. Mit Einführung der willkürlichen Function $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ setzen wir die Transformation an:

$$\lambda_k^1 U^1 + \cdots + \lambda_k^p U^p + \lambda_k^{p+1} d\varphi = \alpha_1^k d\varphi + \alpha_2^k dy_2 + \cdots + \alpha_{n-1}^k dy_{n-1}.$$

Das daraus herzuleitende vollständige System von Differentialgleichungen zwischen den $x_1, \ldots, x_n$ ist äquivalent mit der partiellen Differentialgleichung in y

$$\begin{vmatrix} a_{\sigma 1}^{\varrho} \ldots a_{\sigma n}^{\varrho} & -a_{\sigma}^{1} \cdots & -a_{\sigma}^{p} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_\sigma} \\ a_1^s \ldots a_n^s & 0 \ldots & 0 \quad 0 \\ \dfrac{\partial y}{\partial x_1} \ldots \dfrac{\partial y}{\partial x_n} & 0 \ldots & 0 \quad 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$(\sigma = 1, 2, \ldots, n;\ s = 1, 2, \ldots, p)$

eine Lösung ist offenbar $y = \varphi$, da bei dieser Substitution die Determinante eine schiefe von $(p+n+1)$tem, also ungeradem Grade wird, und die übrigen $n-2$ Lösungen liefern die Grössen $y_2, \ldots, y_{n-1}$. Die Reduction hat hier die Gestalt

$$\lambda_k^1 U^1 + \cdots + \lambda_k^p U^p = (\alpha_1^k - \lambda_k^{p+1}) d\varphi + \alpha_2^k dy_2 + \cdots + \alpha_{n-1}^k dy_{n-1}.$$

Dies ist die zweite Verwandlungsform für den Fall, dass $p+n$ gerade und die schiefe Determinante (6ª.) von Null verschieden ist. Die reducirte Form enthält die willkürliche Function φ, und $\alpha_2^k, \ldots, \alpha_{n-1}^k$ sind Functionen der $n-1$ Variabeln $\varphi, y_2, \ldots, y_{n-1}$. Nimmt man für die willkürliche Function x_s selbst, so kommt man auf die oben hergeleitete Transformation.

2.

Anwendung auf die Integration simultaner partieller Differentialgleichungen erster Ordnung.

Seien

$$\varphi_k(u^1, \ldots, u^p, x_1, \ldots, x_m, u_1^1, \ldots, u_m^1, u_1^2, \ldots, u_m^2, \ldots, u_1^p, \ldots, u_m^p) = a_k$$

$(k = 1, 2, \ldots, p)$

p partielle Differentialgleichungen erster Ordnung für die p Grössen $u^1, \ldots, u^p$ als Functionen der m unabhängigen Variabeln $x_1, \ldots, x_m$, worin $u_s^r = \dfrac{\partial u^r}{\partial x_s}$, so

kann man dafür das System der p totalen Differentialgleichungen

$$U^\varrho \equiv du^\varrho - u_1^\varrho dx_1 - u_2^\varrho dx_2 - \cdots - u_m^\varrho dx_m = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, p) \tag{12.}$$

setzen, mit den p Bedingungsgleichungen

$$\varphi_1 = a_1, \quad \ldots, \quad \varphi_p = a_p.$$

Die Variabeln des Systems (12.) sind

$$u^1, \ldots, u^p; \quad x_1, \ldots, x_m; \quad u_1^1, \ldots, u_m^1; \quad u_1^2, \ldots, u_m^2; \quad \ldots; \quad u_1^p, \ldots, u_m^p;$$

ihre Anzahl ist $n = p + m + pm$.

Das System (12.) stimmt mit dem System (1.) überein, wenn man für die x die genannten Variabeln und für die Coefficienten a_s^ϱ die Werthe setzt:

$$\begin{array}{cccccccccc} a_1^\varrho & \ldots & a_{\varrho-1}^\varrho & a_\varrho^\varrho & a_{\varrho+1}^\varrho & \ldots & a_p^\varrho & a_{p+1}^\varrho \ldots a_{p+m}^\varrho & a_{p+m+1}^\varrho & \ldots a_n^\varrho \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & -u_1^\varrho \quad -u_m^\varrho & 0 & \ldots 0. \end{array}$$

Die Gleichungen (10.) geben, da hier $\pi = p$ ist,

$$\left\{\begin{array}{rcll} 0 &=& v^{\varrho,\sigma} + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u^\sigma} v^{\varrho,p+1} + \cdots + \dfrac{\partial \varphi_p}{\partial u^\sigma} v^{\varrho,2p}, & (\sigma = 1, 2, \ldots, p) \\ -du_s^\varrho &=& -u_s^1 v^{\varrho,1} - \cdots - u_s^p v^{\varrho,p} + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_s} v^{\varrho,p+1} + \cdots + \dfrac{\partial \varphi_p}{\partial x_s} v^{\varrho,2p}, & (s = 1, 2, \ldots, m) \\ dx_s &=& \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u_s^\varrho} v^{\varrho,p+1} + \cdots + \dfrac{\partial \varphi_p}{\partial u_s^\varrho} v^{\varrho,2p}, & (s = 1, 2, \ldots, m) \\ 0 &=& \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u_s^{\varrho'}} v^{\varrho,p+1} + \cdots + \dfrac{\partial \varphi_p}{\partial u_s^{\varrho'}} v^{\varrho,2p}. & \left(\begin{array}{c}\varrho' = 1, 2, \ldots, \varrho-1, \varrho+1, \ldots, p \\ s = 1, 2, \ldots, m\end{array}\right) \end{array}\right. \tag{13.}$$

Solcher Systeme (13.) müssen p neben einander bestehen, indem für ϱ der Reihe nach 1, 2, ..., p gesetzt wird. Dazu treten noch die Gleichungen (12.). Die letzten Gleichungen in den Systemen (13.) geben durch Auflösung nach den Grössen $v^{\varrho,p+1}, \ldots, v^{\varrho,2p}$, wenn man

$$\left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_s^k} \right| = \psi_s \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, p)$$

setzt und die Coefficienten von $\dfrac{\partial \varphi_k}{\partial u_s^\varrho}$ in ψ_s mit $\psi_s^{k,\varrho}$ bezeichnet,

$$v^{\varrho,p+1} = \lambda_s^\varrho \psi_s^{1,\varrho}, \quad v^{\varrho,p+2} = \lambda_s^\varrho \psi_s^{2,\varrho}, \quad \ldots, \quad v^{\varrho,2p} = \lambda_s^\varrho \psi_s^{p,\varrho},$$

wo λ_s^ϱ einen unbestimmten Factor bedeutet, der wie die Grössen $v^{\varrho,k}$ unendlich klein ist. Die Gleichung

$$dx_s = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_s^\varrho} v^{\varrho,p+1} + \cdots + \frac{\partial \varphi_p}{\partial u_s^\varrho} v^{\varrho,2p}$$

wird dann

$$dx_s = \lambda_s^\varrho \psi_s.$$

Aus der Gleichung

$$v^{\varrho, p+k} = \lambda_s^\varrho \psi_s^{k,\varrho}$$

folgt, dass $\lambda_s^\varrho \psi_s^{k,\varrho}$ von s unabhängig sein muss, also

$$v^{\varrho, p+k} = \lambda_s^\varrho \psi_s^{k,\varrho} = \lambda_1^\varrho \psi_1^{k,\varrho},$$

woraus die von den φ zunächst zu erfüllenden Bedingungen folgen:

$$\frac{\psi_s^{k,\varrho}}{\psi_1^{k,\varrho}} = \frac{\psi_s^{1,\varrho}}{\psi_1^{1,\varrho}}. \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, p;\ k = 2, 3, \ldots, p;\ s = 2, 3, \ldots, m)$$

Die Gleichung

$$dx_s = \lambda_s^\varrho \psi_s$$

erfordert ferner, damit dx_s von ϱ unabhängig sei, dass

$$\lambda_s^\varrho = \lambda_s^1,$$

also

$$\lambda_s^\varrho = \frac{\lambda_1^\varrho \psi_1^{k,\varrho}}{\psi_s^{k,\varrho}} = \lambda_1^1 \frac{\psi_1^{1,\varrho}}{\psi_s^{1,\varrho}}$$

ist. Hieraus folgen für die φ die weiteren Bedingungen

$$\frac{\psi_s^{1,\varrho}}{\psi_1^{1,\varrho}} = \frac{\psi_s^{1,1}}{\psi_1^{1,1}}.$$

Die Gesammtheit der von den φ zu erfüllenden Bedingungen kann daher ausgedrückt werden durch

$$\frac{\psi_s^{k,\varrho}}{\psi_1^{k,\varrho}} = \frac{\psi_s^{1,1}}{\psi_1^{1,1}}; \qquad \left(\begin{array}{c} s = 2, 3, \ldots, m;\ k, \varrho = 1, 2, \ldots, p \\ \text{mit Ausnahme der Combination } k = 1,\ \varrho = 1 \end{array}\right)$$

ihre Zahl ist $(m-1)(p^2-1)$.

Setzt man $\lambda_1^1 \psi_1^{1,1} = \lambda$, so wird

$$\lambda_s^\varrho = \lambda_1^1 \frac{\psi_1^{1,\varrho}}{\psi_s^{1,\varrho}} = \frac{\lambda_1^1 \psi_1^{1,1}}{\psi_s^{1,1}} = \frac{\lambda}{\psi_s^{1,1}}$$

und

$$v^{\varrho, p+k} = \lambda_s^\varrho \psi_s^{k,\varrho} = \frac{\lambda \psi_s^{k,\varrho}}{\psi_s^{1,1}} = \frac{\lambda \psi_1^{k,\varrho}}{\psi_1^{1,1}}.$$

Ferner ergiebt sich

$$dx_s = \frac{\lambda \psi_s}{\psi_s^{1,1}}. \tag{14.}$$

Die ersten Gleichungen in (13.) werden:

$$v^{\varrho,\sigma} = -\lambda \left\{ \frac{\partial \varphi_1}{\partial u^\sigma} \psi_1^{1,\varrho} + \cdots + \frac{\partial \varphi_p}{\partial u^\sigma} \psi_1^{p,\varrho} \right\} : \psi_1^{1,1}, \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, p)$$

und die Substitution dieser Werthe für $v^{\varrho,k}$ in dem Ausdruck für du_s^ϱ in (13.) ergiebt endlich

$$(15.)\quad \left\{\begin{aligned} -\psi_1^{1,1}du_s^\varrho \;=\; \lambda\Big\{&\Big(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_s}+u_s^1\frac{\partial\varphi_1}{\partial u^1}+\cdots+u_s^p\frac{\partial\varphi_1}{\partial u^p}\Big)\psi_1^{1,\varrho}\\ &+\Big(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_s}+u_s^1\frac{\partial\varphi_2}{\partial u^1}+\cdots+u_s^p\frac{\partial\varphi_2}{\partial u^p}\Big)\psi_1^{2,\varrho}+\cdots\\ &\cdots+\Big(\frac{\partial\varphi_p}{\partial x_s}+u_s^1\frac{\partial\varphi_p}{\partial u^1}+\cdots+u_s^p\frac{\partial\varphi_p}{\partial u^p}\Big)\psi_1^{p,\varrho}\Big\}. \end{aligned}\right.$$
$$(\varrho=1,\,2,\,\ldots,\,p;\;\; s=1,\,2,\,\ldots,\,m)$$

Die Gleichungen (14.) und (15.) bilden zusammen mit den Gleichungen (12.)

$$(12.)\qquad du^\varrho \;=\; u_1^\varrho dx_1+\cdots+u_m^\varrho dx_m$$

nach Elimination von λ ein vollständiges System von $m+p+mp-1$ Differentialgleichungen zwischen den $m+p+mp$ Variabeln

$$u^1,\;\ldots,\;u^m;\quad x_1,\;\ldots,\;x_m;\quad u_1^1,\;\ldots,\;u_m^1;\quad\ldots;\quad u_1^p,\;\ldots,\;u_m^p.$$

Dieses System ist vollständig zu integriren. Sind dann für $x_1=0$

$$(u^1)',\;\ldots,\;(u^p)';\quad x_2',\;\ldots,\;x_m';\quad (u_1^1)',\;\ldots,\;(u_m^1)';\quad\ldots;\quad (u_1^p)',\;\ldots,\;(u_m^p)'$$

die Hauptintegrale desselben, so reducirt sich nach den Darlegungen des vorigen Abschnitts die Integration des Systems totaler Differentialgleichungen (12.) auf die des folgenden

$$(16.)\qquad d(u^\varrho)'-(u_2^\varrho)'dx_2'-\cdots-(u_m^\varrho)'dx_m' \;=\; 0. \qquad (\varrho=1,\,2,\,\ldots,\,p)$$

Die allgemeinste Integration dieser Gleichungen ist in dem folgenden System von mp Gleichungen enthalten

$$\omega_\varrho\big((u^\varrho)',\;x_2'\ldots x_m'\big)=0,$$
$$\frac{\partial\omega_\varrho}{\partial(u^\varrho)'}=-\frac{1}{(u_2^\varrho)'}\cdot\frac{\partial\omega_\varrho}{\partial x_2'}=-\frac{1}{(u_3^\varrho)'}\cdot\frac{\partial\omega_\varrho}{\partial x_3'}=\cdots=-\frac{1}{(u_m^\varrho)'}\cdot\frac{\partial\omega_\varrho}{\partial x_m'},$$
$$(\varrho=1,\,2,\,\ldots,\,p)$$

wo $\omega_1,\;\omega_2,\;\ldots,\;\omega_p$ willkürliche Functionen der in ihnen enthaltenen Argumente bedeuten. Fügt man zu diesen mp Gleichungen noch die gegebenen p partiellen Differentialgleichungen

$$\varphi_1=a_1,\quad \varphi_2=a_2,\quad\ldots,\quad \varphi_p=a_p$$

hinzu, so lassen sich sämmtliche mp Derivirten u_s^ϱ eliminiren, und man behält p Gleichungen zwischen den Variabeln $u^1,\ldots,u^p;\;x_1,\ldots,x_m$ allein, welche

$u^1, \ldots, u^p$ als Functionen von $x_1, \ldots, x_m$ bestimmen. Diese bilden die allgemeine Lösung des vorgelegten Systems partieller Differentialgleichungen mit p willkürlichen Functionen.

Das System (16.) und mithin das System (12.) wird übrigens bereits durch die $m+p-1$ Gleichungen

$$x_2' = \alpha_1,\ x_3' = \alpha_2,\ \ldots,\ x_m' = \alpha_{m-1};\quad (u^1)' = \alpha_m,\ (u^2)' = \alpha_{m+1},\ \ldots,\ (u^p)' = \alpha_{m+p-1},$$

wo $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+p-1}$ willkürliche Constanten sind, vollständig integrirt. Allein diese im Verein mit den p gegebenen partiellen Differentialgleichungen genügen noch nicht zur Elimination sämmtlicher Derivirten u_s^ϱ, es fehlen dazu noch $mp+p-(m+p-1+p) = (m-1)(p-1)$ Gleichungen, die man also zwischen allen $m+p+mp$ Variabeln noch in ganz beliebiger Wahl hinzufügen könnte, um nach Elimination der Derivirten u_s^ϱ p Gleichungen zur Bestimmung von $u^1, \ldots, u^p$ als Functionen von $x_1, \ldots, x_m$ und damit eine neue Lösung des vorgelegten Systems partieller Differentialgleichungen zu erhalten. Da $(m-1)(p-1)$ für $p=1$ verschwindet, so ersieht man, dass im Falle einer einzigen partiellen Differentialgleichung keine Gleichung hinzugefügt zu werden braucht, um auf diesem Wege eine Lösung mit m willkürlichen Constanten zu erhalten. Dieselbe ist dann das nach der *Lagrange*schen Bezeichnung sogenannte vollständige Integral der partiellen Differentialgleichung.

Im Folgenden wollen wir ein Beispiel behandeln, das darum von Interesse ist, weil in ihm die von *Jacobi* integrirte Klasse von simultanen linearen partiellen Differentialgleichungen enthalten ist.*)

Wir nehmen an, dass die Function φ_k die Variabeln $u^1, \ldots, u^p$; $x_1, \ldots, x_m$ beliebig, aber nur die Derivirten von u^k enthalten, so dass

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial u_s^\varrho} = 0 \quad \text{für} \quad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots, \varrho-1, \varrho+1, \ldots, p \\ s = 1, 2, \ldots, m \end{pmatrix}.$$

Zur Aufstellung des vollständigen Systems totaler Differentialgleichungen ist es bequemer, auf die ursprüngliche Form (13.) zurückzugehen.

Die letzten Gleichungen in (13.)

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_s^{\varrho'}} v^{\varrho, p+1} + \cdots + \frac{\partial \varphi_p}{\partial u_s^{\varrho'}} = 0 \quad \text{für} \quad \begin{pmatrix} \varrho' = 1, 2, \ldots, \varrho-1, \varrho+1, \ldots, p \\ s = 1, 2, \ldots, m \end{pmatrix}$$

*) *Jacobi*, über die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Dieses Journal Bd. 2. Werke IV, p. 7ff.

erfordern dann, dass

$$v^{\varrho,\, p+\varrho'} = 0,$$

wenn ϱ' von ϱ verschieden ist, während

$$v^{1,\, p+1}, \quad v^{2,\, p+2}, \quad \ldots, \quad v^{p,\, 2p}$$

vor der Hand willkürlich bleiben.

Die Gleichungen für dx_s werden

$$dx_s = \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial u_s^\varrho}\, v^{\varrho,\, p+\varrho},$$

woraus folgt:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_s^1}\, v^{1,\, p+1} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_s^2}\, v^{2,\, p+2} = \cdots = \frac{\partial \varphi_p}{\partial u_s^p}\, v^{p,\, 2p}.$$

Dies ergiebt für die φ die weiteren Bedingungen

$$\text{(17.)} \qquad \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial u_s^\varrho} : \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial u_1^\varrho} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_s^1} : \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1^1}.$$

Setzt man $\frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial u_1^\varrho}\, v^{\varrho,\, p+\varrho} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1^1}\, v^{1,\, p+1} = \lambda$, wo λ wieder eine unendlich kleine Grösse bezeichnet, dann wird nach (17.):

$$\text{(18.)} \qquad dx_s = \left(\frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial u_s^\varrho} : \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial u_1^\varrho}\right)\lambda = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_s^1} : \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1^1}\right)\lambda. \qquad (s = 1, 2, \ldots, m)$$

Man erhält ferner aus (13.)

$$v^{\varrho,\, \sigma} = -\frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial u^\sigma}\, v^{\varrho,\, p+\varrho} = -\lambda\left(\frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial u^\sigma} : \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial u_1^\varrho}\right) \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, p)$$

und durch Substitution dieser Werthe für $v^{\varrho,\, 1}, \ldots, v^{\varrho,\, p}$ in dem Ausdruck für du_s^ϱ:

$$\text{(19.)} \qquad -du_s^\varrho = \lambda\left\{\frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial x_s} + u_s^1 \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial u^1} + \cdots + u_s^p \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial u^p}\right\} : \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial u_1^\varrho}.$$

$(\varrho = 1, 2, \ldots, p;\ s = 1, 2, \ldots, m)$

Die Gleichungen (18.) und (19.) in Verbindung mit den Gleichungen (12.)

$$du^\varrho = u_1^\varrho dx_1 + \cdots + u_m^\varrho dx_m \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, p)$$

liefern im vorliegenden Falle das zu integrirende vollständige System totaler Differentialgleichungen.

Sind die Derivirten u_s^ϱ in den Functionen φ linear enthalten, so lauten bei den hier geltenden Bedingungen, wenn

$$\frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial u_s^\varrho} : \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial u_1^\varrho} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_s^1} : \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1^1} = X_s$$

gesetzt wird, die partiellen Differentialgleichungen

$$V_\varrho = \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial u_1^1}(X_1 u_1^\varrho + X_2 u_2^\varrho + \cdots + X_m u_m^\varrho), \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, p)$$

worin V_ϱ, $\frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial u_1^\varrho}$, X_ϱ Functionen von $u^1, \ldots, u^p$; $x_1, \ldots, x_m$ allein sind. Setzt man noch

$$V_\varrho : \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial u_1^\varrho} = W_\varrho,$$

so erhält man das System in der *Jacobi*schen Form

$$W_\varrho = X_1 \frac{\partial u^\varrho}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial u^\varrho}{\partial x_2} + \cdots + X_m \frac{\partial u^\varrho}{\partial x_m}. \qquad (20.)$$
$$(\varrho = 1, 2, \ldots, p)$$

Zur Integration dieses Systems linearer partieller Differentialgleichungen reicht es aus, die Gleichungen (18.) und (12.) heranzuziehen. Die ersteren geben

$$dx_s = \lambda X_s,$$

die letzteren

$$du^\varrho = (u_1^\varrho X_1 + \cdots + u_m^\varrho X_m)\lambda = W_\varrho \lambda,$$

und, indem man λ eliminirt, ergiebt sich das zu integrirende vollständige System totaler Differentialgleichungen in der von *Jacobi* gegebenen Form

$$\frac{du^1}{W_1} = \frac{du^2}{W_2} = \cdots = \frac{du^p}{W_p} = \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_m}{X_m}.$$

Sind

$$f_1 = c_1, \quad f_2 = c_2, \quad \ldots, \quad f_{p+m-1} = c_{p+m-1}$$

dessen vollständige Integrale, so ist die allgemeine Lösung von (20.):

$$\omega_1(f_1, \ldots, f_{p+m-1}) = 0, \quad \omega_2(f_1, \ldots, f_{p+m-1}) = 0, \quad \ldots, \quad \omega_p(f_1, \ldots, f_{p+m-1}) = 0,$$

worin $\omega_1, \ldots, \omega_p$ p willkürliche Functionen bezeichnen. Durch die vorstehenden Gleichungen werden $u^1, \ldots, u^p$ als Functionen von $x_1, \ldots, x_m$ bestimmt.

3.

Zur vollständigen Ausführung der Transformation (2.) erübrigt noch die Bestimmung der Factoren λ_k^i.

Denkt man sich das vollständige System totaler Differentialgleichungen (6.) integrirt und mittelst der $n-1$ Integrale alle Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$

durch eine einzige, x, ausgedrückt, so bilden p der Gleichungen (5.)

$$\lambda_k^1 \sum_{s=1}^{s=n} \left(\frac{\partial a_i^1}{\partial x_s} - \frac{\partial a_s^1}{\partial x_i} \right) dx_s + \cdots + \lambda_k^p \sum_{s=1}^{s=n} \left(\frac{\partial a_i^p}{\partial x_s} - \frac{\partial a_s^p}{\partial x_i} \right) dx_s + a_i^1 d\lambda_k^1 + \cdots + a_i^p d\lambda_k^p = 0,$$

indem man für i beliebige p Zahlen $i_1, \ldots, i_p$ aus der Reihe $1, 2, \ldots, n$ setzt, ein System p linearer homogener Differentialgleichungen erster Ordnung zur Bestimmung von $\lambda_k^1, \ldots, \lambda_k^p$ als Functionen der einzigen Variabeln x. Ein solches hat p Fundamentalsysteme von Integralen, und diese liefern uns das verlangte System von Factoren

$$\lambda_k^1, \ldots, \lambda_k^p \qquad (k = 1, 2, \ldots, p)$$

mit nicht verschwindender Determinante Δ.

Die Determinante Δ lässt sich bekanntlich durch blosse Quadratur darstellen, was eine Analogie dazu bildet, dass im Falle der *Pfaff*schen ersten Transformation der darin vorkommende einzige Factor durch blosse Quadratur ermittelt wird. Wir wollen die Bestimmung von Δ hier ausführen, weil sich dabei eine neue Form für das zu integrirende vollständige System totaler Differentialgleichungen ergiebt.

Löst man die p Gleichungen, die aus (5.) hervorgehen, indem man der Reihe nach $i = i_1, i_2, \ldots, i_p$ setzt, nach $d\lambda_k^1, \ldots, d\lambda_k^p$ auf, so erhält man, wenn

$$\left| a_{i_k}^\varrho \right| = R \qquad (\varrho, k = 1, 2, \ldots, p)$$

gesetzt und der Coefficient von $a_{i_\mu}^k$ in R mit $b_{i_\mu}^k$ bezeichnet wird, für den Coefficienten von λ_k^ϱ in dem Ausdruck für $d\lambda_k^\varrho$ den Werth

$$-\left\{ b_{i_1}^\varrho \sum_{s=1}^{s=n} \left(\frac{\partial a_{i_1}^\varrho}{\partial x_s} - \frac{\partial a_s^\varrho}{\partial x_{i_1}} \right) dx_s + \cdots + b_{i_p}^\varrho \sum_{s=1}^{s=n} \left(\frac{\partial a_{i_p}^\varrho}{\partial x_s} - \frac{\partial a_s^\varrho}{\partial x_{i_p}} \right) dx_s \right\} : R.$$

Nach einem Satze aus der Theorie der linearen Differentialgleichungssysteme*) ist aber $\frac{d\Delta}{\Delta}$ gleich der Summe dieser Grössen genommen über ϱ von 1 bis p. Mithin ist

$$(21.) \quad \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \sum_{s=1}^{s=n} \left\{ b_{i_1}^\varrho \left(\frac{\partial a_{i_1}^\varrho}{\partial x_s} - \frac{\partial a_s^\varrho}{\partial x_{i_1}} \right) + \cdots + b_{i_p}^\varrho \left(\frac{\partial a_{i_p}^\varrho}{\partial x_s} - \frac{\partial a_s^\varrho}{\partial x_{i_p}} \right) \right\} dx_s + R \frac{d\Delta}{\Delta} = 0.$$

Dieser Gleichung lässt sich durch Einführung einer symbolischen Schreibweise eine übersichtlichere Gestalt geben.

*) *Sauvage:* Sur les propriétés des fonctions etc. Ann. de l'École Norm. Sér. 2, t. XI, p. 33 ff.

Wir bedienen uns der Bezeichnung:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_s} & \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_{i_p}} \\ a_s^1 & a_{i_1}^1 & \cdots & a_{i_p}^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_s^p & a_{i_1}^p & \cdots & a_{i_p}^p \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial x_s}\begin{vmatrix} a_{i_1}^1 & \cdots & a_{i_p}^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_1}^p & \cdots & a_{i_p}^p \end{vmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\begin{vmatrix} a_s^1 & a_{i_2}^1 & \cdots & a_{i_p}^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_s^p & a_{i_2}^p & \cdots & a_{i_p}^p \end{vmatrix}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\begin{vmatrix} a_s^1 & a_{i_1}^1 & a_{i_3}^1 & \cdots & a_{i_p}^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_s^p & a_{i_1}^p & a_{i_3}^p & \cdots & a_{i_p}^p \end{vmatrix} - \cdots + (-1)^{p-1}\frac{\partial}{\partial x_{i_p}}\begin{vmatrix} a_s^1 & a_{i_1}^1 & \cdots & a_{i_{p-1}}^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_s^p & a_{i_1}^p & \cdots & a_{i_{p-1}}^p \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\partial R}{\partial x_s} - \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}(a_s^1 b_{i_1}^1 + \cdots + a_s^p b_{i_1}^p) - \frac{\partial}{\partial x_{i_2}}(a_s^1 b_{i_2}^1 + \cdots + a_s^p b_{i_2}^p) - \cdots$$

$$\cdots - \frac{\partial}{\partial x_{i_p}}(a_s^1 b_{i_p}^1 + \cdots + a_s^p b_{i_p}^p).$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen

$$\sum_{s=1}^{s=n} a_s^1 dx_s = 0, \quad \sum_{s=1}^{s=n} a_s^2 dx_s = 0, \quad \ldots, \quad \sum_{s=1}^{s=n} a_s^p dx_s = 0$$

folgt dann:

$$\sum_{s=1}^{s=n}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_s} & \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_{i_p}} \\ a_s^1 & a_{i_1}^1 & \cdots & a_{i_p}^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_s^p & a_{i_1}^p & \cdots & a_{i_p}^p \end{vmatrix} dx_s$$

$$= \sum_{s=1}^{s=n}\frac{\partial R}{\partial x_s}dx_s - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p}\sum_{s=1}^{s=n}\left\{b_{i_1}^\varrho\frac{\partial a_s^\varrho}{\partial x_{i_1}} + \cdots + b_{i_p}^\varrho\frac{\partial a_s^\varrho}{\partial x_{i_p}}\right\}dx_s$$

$$= \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p}\sum_{s=1}^{s=n}\left\{b_{i_1}^\varrho\left(\frac{\partial a_{i_1}^\varrho}{\partial x_s} - \frac{\partial a_s^\varrho}{\partial x_{i_1}}\right) + \cdots + b_{i_p}^\varrho\left(\frac{\partial a_{i_p}^\varrho}{\partial x_s} - \frac{\partial a_s^\varrho}{\partial x_{i_p}}\right)\right\}dx_s,$$

da $\frac{\partial R}{\partial x_s} = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p}\left(b_{i_1}^\varrho\frac{\partial a_{i_1}^\varrho}{\partial x_s} + \cdots + b_{i_p}^\varrho\frac{\partial a_{i_p}^\varrho}{\partial x_s}\right)$ ist.

Somit geht die Gleichung (21.) zur Bestimmung von Δ in die Form über

$$(22.) \quad \sum_{s=1}^{s=n}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_s} & \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_{i_p}} \\ a_s^1 & a_{i_1}^1 & \cdots & a_{i_p}^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_s^p & a_{i_1}^p & \cdots & a_{i_p}^p \end{vmatrix} dx_s + \begin{vmatrix} a_{i_1}^1 & \cdots & a_{i_p}^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_1}^p & \cdots & a_{i_p}^p \end{vmatrix}\frac{d\Delta}{\Delta} = 0.$$

worin für $i_1, \ldots, i_p$ irgend eine Combination von p Indices aus der Reihe $1, 2, \ldots, n$ zu nehmen ist.

n beliebige dieser Gleichungen liefern nach Elimination der Grösse $d\Delta : \Delta$ das zu integrirende vollständige System totaler Differentialgleichungen in einer neuen Gestalt, p derselben können durch $\sum_{s=1}^{s=n} a_s^{\varrho} dx_s$ $(\varrho = 1, 2, \ldots, p)$ ersetzt werden. Für $p = 1$ geht (22.) über in

$$\sum_{s=1}^{s=n} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_s} & \frac{\partial}{\partial x_i} \\ a_s & a_i \end{vmatrix} dx_s + a_i \frac{d\lambda}{\lambda} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

also in das *Pfaff*sche vollständige System totaler Differentialgleichungen zur Reduction des Ausdrucks $\sum_{s=1}^{s=n} a_s dx_s$ auf einen Differentialausdruck von $n-1$ Variabeln.

Bemerkung über die *Jacobi*sche Thetaformel.

(Von Herrn *August Gutzmer*.)

Durch *Kronecker*s Untersuchung: „Ueber die Zeit und Art der Entstehung der *Jacobi*schen Thetaformeln“*) ist von neuem das Interesse auf jene zwischen den Producten von vier Thetareihen bestehende Beziehung gelenkt worden, welche *Jacobi* in seiner Königsberger Vorlesung**) als Grundlage für die Theorie der elliptischen Functionen gedient hat. Es mag deshalb nicht überflüssig erscheinen, wenn ich im Folgenden einen einfachen Beweis für die erwähnte Fundamentalformel mittheile, auf welchen ich vor längerer Zeit durch die Vorlesungen des Herrn *Fuchs* und ein Gespräch mit demselben geführt worden bin, und welcher eine naturgemässe Herleitung der Thetarelation bietet.

Wir gehen dabei aus von der Bemerkung, dass die *Jacobi*sche Relation, welche sich in der von *Kronecker* benutzten Bezeichnungsweise***) in der Form

$$(1.)\quad \begin{cases} T_2(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)+T_3(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \\ \qquad = T_2(\zeta_0, \zeta_2, \zeta_1, \zeta_3)+T_3(\zeta_0, \zeta_2, \zeta_1, \zeta_3) \end{cases}$$

darstellt, wobei

$$T_h(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \vartheta_h(\zeta_0+\zeta_1)\vartheta_h(\zeta_0-\zeta_1)\vartheta_h(\zeta_2+\zeta_3)\vartheta_h(\zeta_2-\zeta_3)$$

gesetzt ist, sich als eine Beziehung zwischen Thetafunctionen zweiter Ordnung auffassen lässt. Bekanntlich†) versteht man unter einer ϑ-Function

*) Dieses Journal, Bd. 108, S. 325ff., s. a. Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Juli 1891.

**) *Jacobi*s Werke Bd. I, S. 497—538.

***) Bemerkungen über die *Jacobi*schen Thetaformeln, dieses Journal, Bd. 102, S. 260ff.

†) S. *Hermite*, Note sur la théorie des fonctions elliptiques in Lacroix, Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral, 6. éd.; *Hermite*, Cours lithographié, 4. éd. p. 219ff. — Vgl. a. *Königsberger*, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen.

$k$ter Ordnung eine Function, welche den functionalen Beziehungen

$$\Phi(\zeta+1) = \Phi(\zeta),$$
$$\Phi(\zeta+\tau) = e^{-k\pi i(2\zeta+\tau)}\Phi(\zeta)$$

genügt. Die erste dieser Gleichungen ergiebt in bekannter Weise eine Entwickelung der Form

$$\Phi(\zeta) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m e^{2\pi i m\zeta} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{\frac{\pi i}{k}m^2\tau+2\pi i m\zeta},$$

und aus der zweiten Functionalgleichung folgt dann für die Coefficienten die Bedingung

$$c_{m+k} = c_m,$$

so dass k willkürliche Constanten in $\Phi(\zeta)$ auftreten. Daraus fliesst sofort das Resultat, dass zwischen je $k+1$ Functionen dieser Art eine homogene lineare Gleichung mit constanten Coefficienten besteht. Die Betrachtung des Integrals

$$\int \frac{\Phi'(\zeta)}{\Phi(\zeta)}\,d\zeta,$$

erstreckt über den Umfang des Periodenparallelogramms, zeigt ferner in bekannter Weise*), dass innerhalb des letzteren die Thetafunction $k$ter Ordnung k Nullstellen besitzt, deren Summe $\equiv \frac{1}{2}k(1+\tau)$ (modd. $1, \tau$) ist.

Zwischen $k+1$ Thetafunctionen $k$ter Ordnung mit denselben Perioden**) besteht also eine lineare homogene Gleichung mit constanten Coefficienten, es muss daher möglich sein, aus der allgemeinsten derartigen Relation alle übrigen herzuleiten.

Wenden wir dieses Princip auf die ϑ-Functionen zweiter Ordnung an, so ist leicht zu sehen, dass, da in diesem Falle die Summe der Nullstellen $\equiv 0$ ist, die allgemeinste ϑ-Function zweiter Ordnung durch $\vartheta_h(\zeta_0+\zeta_1)\vartheta_h(\zeta_0-\zeta_1)$ gegeben ist, wenn man ζ_0 als die unabhängige Veränderliche betrachtet; jede andere Thetafunction zweiter Ordnung (mit denselben Perioden) kann sich nur durch einen constanten Factor von ihr unterscheiden. Zwischen *drei* solchen Functionen muss eine lineare Relation bestehen. Die letztere kann offenbar ohne Beschränkung der Allge-

*) *Hermite*, a. a. O. S. 223.

**) Nach dem Vorgange von Herrn *Weber* (Elliptische Functionen und algebraische Zahlen, S. 43) könnte man kurz von *verwandten* ϑ-Functionen sprechen.

meinheit in der Form

$$(2.)\quad \begin{cases} c_1\vartheta_1(\zeta_0+\zeta_1)\vartheta_1(\zeta_0-\zeta_1)+c_2\vartheta_1(\zeta_0+\zeta_2)\vartheta_1(\zeta_0-\zeta_2) \\ \qquad\qquad +c_3\vartheta_1(\zeta_0+\zeta_3)\vartheta_1(\zeta_0-\zeta_3) = 0 \end{cases}$$

angesetzt werden, wo die Grössen c_1, c_2, c_3 von ζ_1, ζ_2, ζ_3 abhängen werden.

Setzt man nun in (2.) $\zeta_0=\zeta_1$, so verschwindet das erste Glied, und es folgt:

$$\frac{c_2}{c_3} = -\frac{\vartheta_1(\zeta_1+\zeta_3)\vartheta_1(\zeta_1-\zeta_3)}{\vartheta_1(\zeta_1+\zeta_2)\vartheta_1(\zeta_1-\zeta_2)},$$

also:

$$c_2 = \mu\vartheta_1(\zeta_3+\zeta_1)\vartheta_1(\zeta_3-\zeta_1),$$
$$c_3 = \mu\vartheta_1(\zeta_1+\zeta_2)\vartheta_1(\zeta_1-\zeta_2),$$

so dass (2.) die Form

$$\bar{c}_1.\vartheta_1(\zeta_0+\zeta_1)\vartheta_1(\zeta_0-\zeta_1)+\vartheta_1(\zeta_0+\zeta_2)\vartheta_1(\zeta_0-\zeta_2)\vartheta_1(\zeta_3+\zeta_1)\vartheta_1(\zeta_3-\zeta_1)$$
$$+\vartheta_1(\zeta_0+\zeta_3)\vartheta_1(\zeta_0-\zeta_3)\vartheta_1(\zeta_1+\zeta_2)\vartheta_1(\zeta_1-\zeta_2) = 0$$

annimmt. Die Grösse $\bar{c}_1$ ergiebt sich hieraus für $\zeta_0=\zeta_2$ als

$$\bar{c}_1 = \vartheta_1(\zeta_2+\zeta_3)\vartheta_1(\zeta_2-\zeta_3),$$

und damit hat man die Relation

$$\vartheta_1(\zeta_0+\zeta_1)\vartheta_1(\zeta_0-\zeta_1)\vartheta_1(\zeta_2+\zeta_3)\vartheta_1(\zeta_2-\zeta_3)+\vartheta_1(\zeta_0+\zeta_2)\vartheta_1(\zeta_0-\zeta_2)\vartheta_1(\zeta_3+\zeta_1)\vartheta_1(\zeta_3-\zeta_1)$$
$$+\vartheta_1(\zeta_0+\zeta_3)\vartheta_1(\zeta_0-\zeta_3)\vartheta_1(\zeta_1+\zeta_2)\vartheta_1(\zeta_1-\zeta_2) = 0,$$

also genau die in die ϑ umgeschriebene dreigliedrige Gleichung für die Sigmafunction des Herrn *Weierstrass**). Es ist bekannt, dass man aus derselben durch einfache Veränderungen von ζ_0 und ζ_3 und Vereinigung der dadurch entstehenden Gleichungen die *Jacobi*sche Relation herleiten kann, wie man auch umgekehrt aus der letzteren die obige Formel abzuleiten vermag. Es ist damit auch die *Jacobi*sche Relation (1.) aus dem oben erwähnten Princip bewiesen, worauf es uns hier ankam.

In einem folgenden Aufsatze soll dargethan werden, wie sich der hier benutzte einfache Gedanke für die Herleitung der zwischen Thetafunctionen mehrerer Variabeln bestehenden Beziehungen verwerthen lässt.

---

*) Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften, 1882, S. 505; Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen, herausgegeben von *H. A. Schwarz*, S. 47. — S. a. *Scheibner*, dieses Journal, Bd. 102, S. 255.

Ueber die Gleichungen, mit deren Hülfe man die säcularen Störungen der Planeten bestimmt.

(Von Herrn *K. Hensel.*)

Es sei:

$$f(x) = x^n + f_1 x^{n-1} + \cdots + f_n$$

eine beliebige ganze Function des $n$ten Grades von x mit realen Coefficienten, so kann man jede ganze Function $w(x)$ von x, modulo $f(x)$ betrachtet, auf eine und nur auf eine Weise in der Form

$$w \equiv u_1 x^{n-1} + u_2 x^{n-2} + \cdots + u_n \pmod{f(x)}$$

darstellen, indem man den kleinsten Rest aufsucht, welchen $w(x)$, durch $f(x)$ getheilt, lässt. Jede ganze Function von x lässt sich also modulo $f(x)$ betrachtet durch die n linear unabhängigen ganzen Functionen

(1.) $$x^{n-1}, \quad x^{n-2}, \quad \ldots, \quad 1$$

homogen und linear darstellen. Sind ferner

(1ª.) $$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n$$

n ganze Functionen von x, welche ebenfalls für den Modul $f(x)$ linear unabhängig sind, so kann jede ganze Function w auch durch das System (1ª.) homogen und linear dargestellt werden.

Es sei nun wie oben $w = u_1 x^{n-1} + \cdots + u_n$ eine ganze Function von x mit unbestimmten Coefficienten. Stellt man dann die n Producte

$$w x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

für den Modul $f(x)$ als homogene lineare Functionen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dar, so erhält man offenbar n Congruenzen von der folgenden Form:

(3.) $$w x_i \equiv \sum_{k=1}^{n} U_{ik}^{(1)} x_k \pmod{f(x)},$$

wo die n^2 Coefficienten

(3ª.) $$(U_{ik}^{(1)})$$

homogene lineare Functionen von $u_1, \ldots, u_n$ sind.

Multiplicirt man nun die Congruenzen (3.) mit w und wendet alsdann auf der rechten Seite die Relationen (3.) nochmals an, so ergiebt sich:

$$w^2 x_i \equiv \sum_{k=1}^{n} U_{ik}^{(1)} (w x_k) \equiv \sum_{k,l=1}^{n} U_{ik}^{(1)} U_{kl}^{(1)} x_l, \quad (\mathrm{mod.} f(x))$$

oder einfacher:

$$(4.) \qquad w^2 x_i \equiv \sum_{l=1}^{n} U_{il}^{(2)} x_l, \quad (\mathrm{mod.} f(x))$$

wenn die n^2 Coefficienten $U_{il}^{(2)}$ durch die Gleichungen

$$(4^a.) \qquad U_{il}^{(2)} = \Sigma U_{ik}^{(1)} U_{kl}^{(1)}$$

bestimmt sind. Das Coefficientensystem $(U_{il}^{(2)})$ entsteht also aus der Composition des Systems (3ª.) mit sich selbst, d. h. es besteht die symbolische Compositionsgleichung:

$$(4^b.) \qquad (U_{il}^{(2)}) = (U_{ik}^{(1)})^2.$$

Bezeichnet man nun durch:

$$w_1, \quad w_2, \quad \ldots, \quad w_n$$

die n conjugirten Formen, welche man erhält, wenn man in w für x die n conjugirten Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ substituirt, und bildet dann die Summe:

$$(5.) \qquad S(w^2) = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 = \sum_{i,k=1}^{n} u_i u_k s_{i+k},$$

so erhält man eine quadratische Form der n Unbestimmten $u_1, \ldots, u_n$, deren Coefficienten s_{i+k} die *Newton*schen Potenzsummen der Wurzeln jener Gleichung sind. Transformirt man diese Form in eine Summe von n Quadraten, so stimmt die Anzahl ihrer negativen Quadrate nach einer bekannten einfachen Bemerkung von *Jacobi* mit der Anzahl der Paare complexer Wurzeln von $f(x) = 0$ überein. Diese Gleichung besitzt demnach dann und nur dann lauter reale Wurzeln, wenn jene Form eine definite ist.

Die Form $S(w^2)$ ist nun offenbar der Coefficient der zweithöchsten Potenz derjenigen Gleichung $n$ten Grades, welcher die Form w^2 für unbestimmte $u_1, \ldots, u_n$ genügt; und aus (4.) folgt, dass jene Gleichung sich folgendermassen in Determinantenform schreiben lässt:

$$\left| U_{il}^{(2)} - \delta_{il} (w^2) \right| = 0. \qquad \begin{matrix} (i, l = 1, 2, \ldots, n) \\ \left(\begin{matrix} \delta_{il} = 0 & i \geqslant l \\ \delta_{ii} = 1 \end{matrix}\right) \end{matrix}$$

Hieraus und mit Benutzung der Gleichungen (4ª.) ergiebt sich demnach die

folgende Darstellung jener quadratischen Form $S(w^2)$:

$$S(w^2) = \sum_{i=1}^{n} U_{ii}^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} U_{ik}^{(1)} U_{ki}^{(1)}.$$

Ist nun das System $(U_{ik}^{(1)})$ ein symmetrisches, also

$$U_{ik}^{(1)} = U_{ki}^{(1)}, \tag{6.}$$

so ergiebt sich unmittelbar für die Form $S(w^2)$ eine Darstellung als Summe von n^2 Quadraten:

$$S(w^2) = \Sigma s_{i+k} u_i u_k = \sum_{i,k=1}^{n} (U_{ik}^{(1)})^2; \tag{6a.}$$

die Gleichung $f(x) = 0$ besitzt also unter dieser Voraussetzung lauter reale Wurzeln.

Die Bedingung, dass für unbestimmte $u_1, \ldots, u_n$ die n^2 Gleichungen (6.) erfüllt sind, lässt sich aber auf eine viel einfachere reduciren. Ist das System $(U_{ik}^{(1)})$ nämlich für unbestimmte $u_1, \ldots, u_n$ symmetrisch, so behält es offenbar diese Eigenschaft, wenn man $w = x$ annimmt, da sich ja dieser Werth aus w durch eine geeignete Specialisirung der Unbestimmten ergiebt. Ist aber das System $(U_{ik}^{(1)})$ nur für $w = x$ symmetrisch, so folgt dasselbe auch für $w = x^2$, da ja nach (4a.) oder (4b.) das zu x^2 gehörige System aus demjenigen für $w = x$ durch Composition mit sich selbst hervorgeht. Durch analoges Weiterschliessen findet man, dass alsdann auch die zu $w = x^3, \ldots, x^{n-1}$ gehörigen Systeme symmetrisch sind, und da für $n = 1$ offenbar ein Gleiches gilt, so folgt aus dieser einfacheren Voraussetzung sofort, dass das zu

$$w = u_1 x^{n-1} + \cdots + u_n$$

gehörige System $(U_{ik}^{(1)})$ für unbestimmte $u_1, \ldots, u_n$ ebenfalls symmetrisch ist, weil sich ja w aus $1, x, \ldots, x^{n-1}$ homogen und linear zusammensetzt. Man erhält also den wichtigen Satz:

Ist $f(x)$ eine Function $n$ten Grades und

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n \tag{7.}$$

ein System von n ganzen Functionen von x, welche modulo $f(x)$ betrachtet linear unabhängig sind; bildet man dann die n Congruenzen

$$x.x_i \equiv \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k, \pmod{f(x)}, \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

so besitzt die Gleichung

$$f(x) = 0$$

lauter reale Wurzeln, wenn das Coefficientensystem

$$(a_{ik})$$

ein symmetrisches ist.

Hat man für das System (7.) speciell die n Functionen

(7ª.) $$x^{n-1},\quad x^{n-2},\quad \ldots,\quad x,\quad 1$$

der Untersuchung zu Grunde gelegt, so erhält man einen sehr einfachen Beweis des bekannten von ***Borchardt*** betrachteten Satzes.

An den hier gegebenen Beweis mag noch die folgende Bemerkung geknüpft werden. Hat man, wie in (6ª.), die quadratische Form $\Sigma s_{i+k} u_i u_k$ als die Summe der Quadrate einer Anzahl linearer Functionen $U_{ik}^{(1)}$ dargestellt, so verschwindet sie dann und nur dann, wenn $u_1, \ldots, u_n$ so bestimmt werden, dass die Gleichungen

(8.) $$U_{ik}^{(1)} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

erfüllt sind. Soll jene Form aber definit sein, so darf sie nur dann verschwinden, wenn die n Grössen

(8ª.) $$u_i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

sind. Herr ***Hettner*** hat nun bei Gelegenheit der Herausgabe der oben erwähnten Abhandlung ***Borchardts*** darauf hingewiesen, dass die Gleichungen (8ª.) nicht eine nothwendige Folge von (8.) zu sein brauchen. Bei dem hier gegebenen Beweise erledigt sich dieser Einwand in sehr einfacher Weise: Ist nämlich $S(w^2) = 0$, sind also die n^2 Gleichungen (8.) erfüllt, so ergiebt sich aus den Congruenzen (3.):

(8ᵇ.) $$w x_i \equiv 0 \pmod{f(x)}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

und hieraus folgt unmittelbar:

(8ᶜ.) $$w = u_1 x^{n-1} + \cdots + u_n \equiv 0 \pmod{f(x)},$$

da ja durch das System $x_1, \ldots, x_n$ auch die Zahl Eins homogen und linear dargestellt werden kann. Die Function des $(n-1)$-ten Grades w ist aber dann und nur dann durch $f(x)$ theilbar, wenn alle ihre Coefficienten Null sind, und damit ist die Aequivalenz der Bedingungen (8.) und (8ª.) nachgewiesen.

Anwendung der Modul-Systeme auf einen geometrischen Satz und auf das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen.

(Von Herrn *Eugen Netto* in Giessen.)

Wenn im Raume von n Dimensionen ein Kegel zweiter Ordnung

$$(1.) \qquad x_1^2+x_2^2+\cdots+x_\alpha^2-x_{\alpha+1}^2-x_{\alpha+2}^2-\cdots-x_n^2 = 0$$

gegeben ist, dann kann man bei ihm ohne Weiteres den Begriff von n conjugirten Richtungen einführen; dabei tritt die Frage auf: wieviele dieser Richtungen verstreichen auf der einen Seite der Kegelfläche, wie viele auf der anderen? Die Analogie leitet darauf, dass α auf der einen, $n-\alpha$ auf der anderen Seite sich befinden. In der That lässt sich dies mit Hülfe einer Betrachtungsweise, auf welche mich Herr *Pasch* aufmerksam machte, sofort einsehen.

Wandeln wir das Aggregat

$$(2.) \qquad U = u_1^2+u_2^2+\cdots+u_\alpha^2-u_{\alpha+1}^2-u_{\alpha+2}^2-\cdots-u_n^2$$

durch die Substitutionen

$$u_i = x_{i1}v_1+x_{i2}v_2+\cdots+x_{in}v_n \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

um, so entsteht

$$(3.) \quad \begin{cases} V = \sum\limits_i (x_{1i}^2+x_{2i}^2+\cdots+x_{\alpha i}^2-x_{\alpha+1,i}^2-\cdots-x_{ni}^2)v_i^2 \\ \quad +2\sum\limits_{i,k} (x_{1i}x_{1k}+x_{2i}x_{2k}+\cdots+x_{\alpha i}x_{\alpha k}-x_{\alpha+1,i}x_{\alpha+1,k}-\cdots-x_{ni}x_{nk})v_iv_k. \\ \qquad\qquad (i, k=1, 2, \ldots, n;\ i \neq k) \end{cases}$$

Das Gleichungensystem

$$(4.) \qquad x_{1i}x_{1k}+\cdots+x_{\alpha i}x_{\alpha k}-x_{\alpha+1,i}x_{\alpha+1,k}-\cdots-x_{ni}x_{nk} = 0 \qquad (i, k=1, 2, \ldots, n)$$

charakterisirt die Richtungen $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ als conjugirt hinsichtlich des Kegels (1.). Gilt (4.), dann geht V in eine Summe von Quadraten über. Nach dem Trägheitsgesetze der quadratischen Formen be-

sitzen U und V gleich viel positive und gleich viel negative Glieder. Es sind folglich unter den Aggregaten

$$x_{1i}^2+x_{2i}^2+\cdots+x_{\alpha i}^2-x_{\alpha+1,i}^2-\cdots-x_{ni}^2 \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

genau α positiv und die übrigen negativ, sobald für die sonst willkürlichen Grössen $x_{\varkappa\lambda}$ die Beziehungen (4.) gelten.

So einfach dieser Beweis auch ist, den arithmetischen Grund der bewiesenen Thatsache deckt er nicht auf. Das lässt sich aber leicht durch die Behandlung der Frage mit Hülfe der *Kronecker*schen Modulsysteme erreichen.

Wir nehmen die Grössen

$$a_{ik}, \quad \alpha_{i\varkappa} \qquad (i=0, 1, \ldots, m;\ k=1, 2, \ldots, n;\ \varkappa=1, 2, \ldots, m)$$

willkürlich an, setzen

$$(5.) \quad \begin{cases} \sum\limits_k a_{ik}a_{jk} = s_{ij}, & (i, j=0, 1, \ldots, m;\ k=1, 2, \ldots, n) \\ \sum\limits_\varkappa \alpha_{i\varkappa}\alpha_{j\varkappa} = \sigma_{ij}, & (i, j=0, 1, \ldots, m;\ \varkappa=1, 2, \ldots, m) \end{cases}$$

$$(6.) \qquad s_{ij}-\sigma_{ij} = -t_{ij}. \qquad (i, j=0, 1, \ldots, m)$$

Dann können wir den oben bewiesenen Satz so aussprechen: *Sind*

$$t_{11}, \quad t_{22}, \quad \ldots, \quad t_{mm}$$

positiv, während alle t_{ij} $(i \neq j)$ verschwinden, dann ist t_{00} negativ.

Eine Darstellung von t_{00} durch $t_{11}, \ldots, t_{mm}$ nach dem Modulsysteme T, welches aus den $t_{ij}(i \neq j)$ gebildet ist, muss den inneren Grund dieser Thatsache erkennen lassen.

Es ist

$$|\sigma_{ij}| = 0; \qquad (i, j=0, 1, 2, \ldots, m)$$

denn diese Determinante ist aus den defectiven Systemen

$$\begin{matrix} \alpha_{01} & \alpha_{02} & \ldots & \alpha_{0m}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mm}, \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \alpha_{01} & \ldots & \alpha_{m1} \\ \alpha_{02} & \ldots & \alpha_{m2} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \alpha_{0m} & \ldots & \alpha_{mm} \end{matrix}$$

zusammengesetzt. Nach (6.) können wir die Determinante schreiben

$$|s_{ij}+t_{ij}| = 0,$$

oder, wenn ε_{ij} die bekannte Bedeutung hat, wegen der Elemente von T

$$|s_{ij}+\varepsilon_{ij}t_{ii}| \equiv 0. \qquad (\text{mod. } T)$$

Hierin ist der Coefficient von t_{00} gleich

$$|\sigma_{ij}| = |\alpha_{ij}|^2, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, m)$$

so dass die letzte Congruenz sich demnach umwandelt in

$$(7.)\quad \begin{cases} -|\alpha_{ij}|^2 . t_{00} \equiv \begin{vmatrix} s_{11}+t_{11}, & s_{12}, & \ldots, & s_{1m}, & s_{10} \\ s_{21}, & s_{22}+t_{11}, & \ldots, & s_{2m}, & s_{20} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{m1}, & s_{m2}, & \ldots, & s_{mm}+t_{mm}, & s_{m0} \\ s_{01}, & s_{02}, & \ldots, & s_{0m}, & s_{00} \end{vmatrix} \\ \equiv t_{11} . t_{22} \ldots t_{mm} \left\{ s_{00} + \sum_i \frac{1}{t_{ii}} \begin{vmatrix} s_{00} & s_{0i} \\ s_{i0} & s_{ii} \end{vmatrix} + \sum_{i,j} \frac{1}{t_{ii} t_{jj}} \begin{vmatrix} s_{00} & s_{0i} & s_{0j} \\ s_{i0} & s_{ii} & s_{ij} \\ s_{j0} & s_{ji} & s_{jj} \end{vmatrix} + \cdots \right\} \\ (\text{mod. } T); \quad (i, j = 1, 2, \ldots, m). \end{cases}$$

Hier ist nun s_{00} direct eine Summe von Quadraten. Die Determinanten $s_{00}\, s_{ii} - s_{0i}^2$ sind aus den beiden excessiven Systemen

$$\begin{matrix} a_{00} & a_{01} & \ldots & a_{0n}, \\ a_{i0} & a_{i1} & \ldots & a_{in}, \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a_{00} & \ldots & a_{i0} \\ a_{01} & \ldots & a_{i1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{0n} & \ldots & a_{in} \end{matrix}$$

zusammengesetzt und daher gleich der Summe aus allen $(a_{0\varkappa} a_{i\lambda} - a_{0\lambda} a_{i\varkappa})^2$; Aehnliches gilt für die weiteren Determinanten, bis man zu Determinanten kommt, deren Ordnung grösser als n wird; diese haben dann, weil sie aus defectiven Systemen zusammengesetzt sind, den Werth Null. Der letzte Fall kann nur eintreten, wenn $m > n$ ist.

Die Formel (7.) giebt somit die gewünschte Aufklärung: ***Es ist*** $-|a_{ij}|^2 t_{00}$ mod. T ***als ganze Function von*** $t_{11}, t_{22}, \ldots, t_{mm}$ ***darstellbar, deren Coefficienten die Summen von Quadraten sind. Verschwinden die einzelnen Elemente von*** T, ***während alle*** $t_{11}, t_{22}, \ldots, t_{mm}$ ***positiv sind, dann ist*** t_{00} ***negativ.***

Vertauscht man m mit n, die a mit den α und umgekehrt, dann folgt, dass in einem Systeme von $m+n$ Grössen $t_{\mu\mu}$, welche durch die Beziehungen $t_{\mu\nu} = 0$ $(\mu \neq \nu)$ mit einander verbunden sind, stets m Grössen $t_{\mu\mu}$ positiv und die übrigen n Grössen negativ sind.

Der vorgetragene Beweis unseres Satzes führt weiter zu der Ueberzeugung, dass auch *die arithmetische Begründung des Trägheitsgesetzes der quadratischen Formen* in ähnlicher Weise mit Hülfe eines Modulsystems T

dargelegt werden könne und müsse. In der That ist sie schon in der Formel (7.) oder in unserem letzten daraus gezogenen Schlusse enthalten.

Um dies zu zeigen, führen wir in

$$U = u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2-u_{n+1}^2-u_{n+2}^2-\cdots-u_{n+m}^2$$

an Stelle der u mittels der Substitution

$$u_\varkappa = a_{1\varkappa}v_1+a_{2\varkappa}v_2+\cdots+a_{n+m,\varkappa}v_{n+m}, \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n)$$

$$u_\lambda = \alpha_{1\lambda}v_1+\alpha_{2\lambda}v_2+\cdots+\alpha_{n+m,\lambda}v_{n+m}, \qquad (\lambda = n+1, n+2, \ldots, n+m)$$

die Grössen v ein. Dadurch erhalten wir

$$V = \sum_i (a_{i1}^2+\cdots+a_{in}^2-\alpha_{i1}^2-\cdots-\alpha_{im}^2)v_i^2$$
$$+2\sum_{i,j}(a_{i1}a_{j1}+\cdots+a_{in}a_{jn}-\alpha_{i1}\alpha_{j1}-\cdots-\alpha_{im}\alpha_{jm})v_iv_j.$$
$$(i, j = 1, 2, \ldots, n+m;\ i \neq j).$$

Die einzelnen $\frac{1}{2}(n+m)(n+m-1)$ Klammern der zweiten Summe machen wir nun zu den Elementen eines Modulsystems T'; dann stehen wir auf dem Boden unserer obigen Schlüsse, und wir können die Folgerung ziehen, dass beim Verschwinden aller Elemente von T' genau n von den Klammern der ersten Summe positiv, m negativ sind. Denn die Maximalzahl der positiven kann nicht grösser sein als n, die der negativen nicht grösser als m, weil dies unserer letzten obigen Folgerung widersprechen würde. Natürlich sind die Substitutionen so zu wählen, dass keiner der Coefficienten der v_i^2 verschwindet.

Auch diese Betrachtungen bestätigen es wieder, dass erst die Einführung der Modulsysteme geeignet ist, die arithmetische Einsicht in die Natur der verschiedenartigsten Theoreme vollkommen durchsichtig zu gestalten.

Ueber die Reduction der Differentialgleichung der Reihe $\mathfrak{F}(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1}; x)$.

(Von Herrn *L. Pochhammer* in Kiel.)

§ 1.

Die Differentialgleichung

$$(1.)\qquad \left\{\begin{aligned} x^{n-1}\frac{d^n y}{dx^n} + L_1 x^{n-2}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + L_2 x^{n-3}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} \\ + \cdots + L_{n-2}x\frac{d^2y}{dx^2} + L_{n-1}\frac{dy}{dx} - y \end{aligned}\right\} = 0,$$

in der $L_1, L_2, \ldots, L_{n-1}$ Constante bedeuten, lässt sich, wie ich in einer früheren Arbeit*) gezeigt habe, mit Hülfe der unendlichen Reihen von der Form

$$(2.)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathfrak{F}(r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}; x) = \\ &\qquad 1 + \frac{x}{1.r_1 r_2 \ldots r_{n-1}} + \frac{x^2}{1.2.r_1(r_1+1)r_2(r_2+1)\ldots r_{n-1}(r_{n-1}+1)} + \cdots \end{aligned}\right.$$

vollständig lösen. Man verbindet, indem man durch $[z]_\nu$ das Product

$$(3.)\qquad [z]_\nu = z(z-1)(z-2)\ldots(z-\nu+1), \quad [z]_0 = 1,$$

bezeichnet, die Constanten $L_1, \ldots, L_{n-1}$ mit $n-1$ anderen Constanten $R_1, \ldots, R_{n-1}$ durch die (für jeden Werth von z geltende) Identität

$$(4.)\qquad \left\{\begin{aligned} &[z]_{n-1} + L_1[z]_{n-2} + L_2[z]_{n-3} + \cdots + L_{n-2}[z]_1 + L_{n-1} \\ &\qquad = z^{n-1} + R_1 z^{n-2} + R_2 z^{n-3} + \cdots + R_{n-2}z + R_{n-1}. \end{aligned}\right.$$

Die Grössen $R_1, \ldots, R_{n-1}$ mögen ihrerseits zu $n-1$ Constanten $\varrho_1, \ldots, \varrho_{n-1}$ in der Beziehung stehen, dass sie die elementaren symmetrischen Functionen der Argumente $\varrho_1, \ldots, \varrho_{n-1}$ darstellen, so dass man für ein beliebiges z

*) Cfr. § 5 der Abhandlung „Ueber die Differentialgleichung der allgemeineren F-Reihe“ im 38. Bande der Math. Annalen, pag. 586.

die Gleichung

$$(5.)\quad \begin{cases} z^{n-1}+R_1z^{n-2}+R_2z^{n-3}+\cdots+R_{n-2}z+R_{n-1} \\ \qquad = (z+\varrho_1)(z+\varrho_2)(z+\varrho_3)\ldots(z+\varrho_{n-1}) \end{cases}$$

hat. Dann befriedigen die n Reihen

$$(6.)\quad \begin{cases} \mathfrak{F}(\varrho_1,\ \varrho_2,\ \varrho_3,\ \ldots,\ \varrho_{n-1};\ x), \\ x^{1-\varrho_1}\mathfrak{F}(2-\varrho_1,\ \varrho_2-\varrho_1+1,\ \varrho_3-\varrho_1+1,\ \ldots,\ \varrho_{n-1}-\varrho_1+1;\ x), \\ x^{1-\varrho_2}\mathfrak{F}(2-\varrho_2,\ \varrho_1-\varrho_2+1,\ \varrho_3-\varrho_2+1,\ \ldots,\ \varrho_{n-1}-\varrho_2+1;\ x), \\ \ldots\ldots\ldots\

so dass $S_1, \ldots, S_{n-1}$ die elementaren symmetrischen Functionen von $s_1, \ldots, s_{n-1}$ sind, so kann man statt der Bestimmungen (8.) die mit ihnen gleichbedeutenden

$$(11.) \qquad L_{n-\mu} = \sum_{i=\mu}^{i=n} d_{\mu-1}^{(i-1)} S_{n-i} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n-1)$$

anwenden*). Unter R_0 und S_0 wird der Werth 1 verstanden.

Im Folgenden soll nun nachgewiesen werden, dass durch Einführung eines bestimmten Integrals an Stelle von y die Differentialgleichung (1.) sich auf eine Differentialgleichung $(n-1)$ter Ordnung von genau derselben Gestalt reduciren lässt. Die Wiederholung dieses Verfahrens liefert $(n-1)$-fache bestimmte Integrale für y. Denn man gelangt schliesslich zu der analog gebildeten Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche durch einfache bestimmte Integrale lösbar ist.

§ 2.

In die Differentialgleichung (1.) werde für y das bestimmte Integral

$$(12.) \qquad y = \int_g^h e^{\frac{x}{t}} \mathfrak{T} dt$$

substituirt, in welchem die Grenzen g, h constant sind, und $\mathfrak{T}$ von t allein abhängt. Man erhält dann aus (1.) die Gleichung

$$\int_g^h e^{\frac{x}{t}} \left\{ \begin{array}{r} \frac{x^{n-1}}{t^n} + \frac{L_1 x^{n-2}}{t^{n-1}} + \cdots + \frac{L_{n-\nu-1} x^\nu}{t^{\nu+1}} + \cdots \\ \cdots + \frac{L_{n-2} x}{t^2} + \frac{L_{n-1}}{t} - 1 \end{array} \right\} \mathfrak{T} dt = 0.$$

Dieselbe nimmt, wenn die Grössen

$$(13.) \qquad t' = \frac{1}{t}, \quad \mathfrak{T}' = -t^2 \mathfrak{T} = -\frac{\mathfrak{T}}{t'^2}, \quad g' = \frac{1}{g}, \quad h' = \frac{1}{h}$$

eingeführt werden, die Gestalt

$$\int_{g'}^{h'} e^{xt'} \left\{ \begin{array}{r} x^{n-1} t'^n + L_1 x^{n-2} t'^{n-1} + \cdots + L_{n-\nu-1} x^\nu t'^{\nu+1} + \cdots \\ \cdots + L_{n-2} x t'^2 + L_{n-1} t' - 1 \end{array} \right\} \mathfrak{T}' dt' = 0$$

an. Nun folgt aus der Formel der theilweisen Integration

$$\int_{g'}^{h'} e^{xt'} x t'^2 \mathfrak{T}' dt' = [e^{xt'} t'^2 \mathfrak{T}']_{t'=g'}^{t'=h'} - \int_{g'}^{h'} e^{xt'} \frac{d(t'^2 \mathfrak{T}')}{dt'} dt',$$

*) Math. Annalen, Bd. 38, pag. 593 und 595.

ferner, wenn die genannte Formel auf das mit $L_{n-\nu-1}$ multiplicirte Integral ν Mal angewendet wird, in der Art, dass die partielle Integration nach t' sich stets auf das Product $e^{xt'}x$ bezieht,

$$\int_{g'}^{h'} e^{xt'} x^\nu t'^{\nu+1}\mathfrak{T}'\,dt' = [Q_\nu]_{t'=g'}^{t'=h'} + (-1)^\nu \int_{g'}^{h'} e^{xt'} \frac{d^\nu(t'^{\nu+1}\mathfrak{T}')}{dt'^\nu}\,dt',$$

wo Q_ν die Summe

$$(14.)\quad Q_\nu = e^{xt'}\left\{\begin{array}{r} x^{\nu-1}t'^{\nu+1}\mathfrak{T}' - x^{\nu-2}\dfrac{d(t'^{\nu+1}\mathfrak{T}')}{dt'} + x^{\nu-3}\dfrac{d^2(t'^{\nu+1}\mathfrak{T})}{dt'^2} - \cdots \\ \cdots \mp x\dfrac{d^{\nu-2}(t'^{\nu+1}\mathfrak{T}')}{dt'^{\nu-2}} \pm \dfrac{d^{\nu-1}(t'^{\nu+1}\mathfrak{T}')}{dt'^{\nu-1}} \end{array}\right\}$$

bedeutet. Nennt man also M den Ausdruck

$$(15.)\qquad M = Q_{n-1} + L_1 Q_{n-2} + L_2 Q_{n-3} + \cdots + L_{n-2} Q_1,$$

so ergiebt sich

$$[M]_{t'=g'}^{t'=h'} + \int_{g'}^{h'} e^{xt'}\left\{\begin{array}{r} (-1)^{n-1}\dfrac{d^{n-1}(t'^n\mathfrak{T}')}{dt'^{n-1}} + (-1)^{n-2}L_1\dfrac{d^{n-2}(t'^{n-1}\mathfrak{T}')}{dt'^{n-2}} + \cdots \\ \cdots - L_{n-2}\dfrac{d(t'^2\mathfrak{T}')}{dt'} + (L_{n-1}t'-1)\mathfrak{T}' \end{array}\right\} dt' = 0.$$

Man bringt das in letzterer Gleichung vorkommende Integral zum Verschwinden, indem man den Factor von $e^{xt'}$ gleich Null setzt; d. h. man bestimmt $\mathfrak{T}'$ als Function von t' durch die Differentialgleichung $(n-1)$ter Ordnung

$$(16.)\qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=n-1} (-1)^\nu L_{n-\nu-1}\frac{d^\nu(t'^{\nu+1}\mathfrak{T}')}{dt'^\nu} + (L_{n-1}t'-1)\mathfrak{T}' = 0,$$

woselbst $L_0 = 1$ zu nehmen ist. Werden ausserdem die Constanten g und h so gewählt, dass die Bedingung

$$[M]_{t'=h'} - [M]_{t'=g'} = 0$$

oder, was dasselbe sagt,

$$(17.)\qquad [M]_{t=h} - [M]_{t=g} = 0$$

erfüllt wird, so ist das bestimmte Integral (12.) eine particuläre Lösung der Differentialgleichung (1.).

Die Differentialgleichung (16.) soll zunächst in der Art umgestaltet werden, dass für t' wieder $\frac{1}{t}$ gesetzt wird. Nach der Lehre von den höheren Differentialquotienten besteht, wenn die Variabeln t und t' durch

die Relation $t = \frac{1}{t'}$ verbunden sind, die Gleichung*)

$$\frac{d^\nu \Phi}{dt'^\nu} = (-1)^\nu t^{\nu+1} \frac{d^\nu (t^{\nu-1}\Phi)}{dt^\nu}, \tag{18.}$$

in welcher Φ eine beliebige Function bezeichnet. Durch diese Formel wird aus (16.), wenn man, unter Berücksichtigung von (13.),

$$\Phi = t'^{\nu+1}\mathfrak{T}' = -t^{1-\nu}\mathfrak{T}, \quad t^{\nu-1}\Phi = -\mathfrak{T}$$

substituirt und durch $-t$ dividirt, die Differentialgleichung

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n-1} L_{n-\nu-1} t^\nu \frac{d^\nu \mathfrak{T}}{dt^\nu} + (L_{n-1} - t)\mathfrak{T} = 0 \tag{19.}$$

erhalten.

Die Gleichung (18.) dient auch zur Umformung der in (14.) bezeichneten Function Q_ν. Wird in (18.) statt ν der Buchstabe i benutzt, und für Φ das Product

$$\Phi = t'^{\nu+1}\mathfrak{T}' = -t^{1-\nu}\mathfrak{T}$$

genommen, so hat man

$$\frac{d^i (t'^{\nu+1}\mathfrak{T}')}{dt'^i} = -(-1)^i t^{i+1} \frac{d^i (t^{i-\nu}\mathfrak{T})}{dt^i}.$$

Hierdurch geht die Summe (14.)

$$Q_\nu = e^{xt'}\left\{x^{\nu-1}t'^{\nu+1}\mathfrak{T}' + \sum_{i=1}^{i=\nu-1} (-1)^i x^{\nu-i-1} \frac{d^i (t'^{\nu+1}\mathfrak{T}')}{dt'^i}\right\}$$

in den Ausdruck

$$Q_\nu = -e^{\frac{x}{t}}\left\{\frac{x^{\nu-1}}{t^{\nu-1}}\mathfrak{T} + \sum_{i=1}^{i=\nu-1} x^{\nu-i-1} t^{i+1} \frac{d^i (t^{i-\nu}\mathfrak{T})}{dt^i}\right\} \tag{20.}$$

über.

Man führt nun an Stelle von $\mathfrak{T}$ eine neue Variable T mittelst der Gleichung

$$\mathfrak{T} = t^\lambda T \tag{21.}$$

ein, wodurch das Integral (12.) die Form

$$y = \int_g^h e^{\frac{x}{t}} t^\lambda T dt \tag{22.}$$

*) Cfr. *R. Hoppe*, „Theorie der independenten Darstellung der höheren Differential-Coefficienten“, Leipzig, 1845, und *O. Schlömilch*, „Zur Theorie der höheren Differential-Quotienten“, Zeitschrift für Math. und Physik, Bd. 3 (reproducirt in *Schlömilchs* Compendium der höheren Analysis, Bd. II, Abschnitt 1).

annimmt. Wird ausser der Bezeichnung (3.) auch die bekannte Abkürzung

$$(23.) \qquad (z)_\nu = \frac{z(z-1)(z-2)\dots(z-\nu+1)}{1.2.3\dots\nu}, \quad (z)_0 = 1,$$

angewendet (z beliebig, ν eine positive ganze Zahl), so ist

$$\frac{d^k(t^\lambda T)}{dt^k} = \left\{ \begin{array}{l} t^\lambda \dfrac{d^k T}{dt^k} + (k)_1[\lambda]_1 t^{\lambda-1} \dfrac{d^{k-1}T}{dt^{k-1}} + \cdots \\ \qquad \cdots + (k)_{k-\mu}[\lambda]_{k-\mu} t^{\lambda-k+\mu} \dfrac{d^\mu T}{dt^\mu} + \cdots + (k)_k[\lambda]_k t^{\lambda-k} T. \end{array} \right.$$

Daher hat in der Gleichung, die aus (19.) durch die Substitution (21.) entsteht, die Ableitung $\frac{d^\mu T}{dt^\mu}$ (für $\mu = n-1, n-2, \dots, 1$) den Coefficienten

$$\sum_{k=\mu}^{k=n-1} L_{n-k-1} t^k (k)_{k-\mu}[\lambda]_{k-\mu} t^{\lambda-k+\mu} = t^{\lambda+\mu} \sum_{k=\mu}^{k=n-1} (k)_{k-\mu}[\lambda]_{k-\mu} L_{n-k-1},$$

während T mit dem Ausdruck

$$t^\lambda \sum_{k=0}^{k=n-1} [\lambda]_k L_{n-k-1} - t^{\lambda+1}$$

multiplicirt ist. Man nennt $L'_{n-\mu-1}$, für $\mu = n-2, n-3, \dots, 1, 0$ die Constante

$$(24.) \qquad L'_{n-\mu-1} = \sum_{k=\mu}^{k=n-1} (k)_{k-\mu}[\lambda]_{k-\mu} L_{n-k-1},$$

so dass

$$\begin{aligned} L'_1 &= L_1 + (n-1)_1[\lambda]_1, \\ L'_2 &= L_2 + (n-2)_1[\lambda]_1 L_1 + (n-1)_2[\lambda]_2, \\ L'_3 &= L_3 + (n-3)_1[\lambda]_1 L_2 + (n-2)_2[\lambda]_2 L_1 + (n-1)_3[\lambda]_3, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ L'_{n-2} &= L_{n-2} + (2)_1[\lambda]_1 L_{n-3} + (3)_2[\lambda]_2 L_{n-4} + \cdots + (n-1)_{n-2}[\lambda]_{n-2}, \\ L'_{n-1} &= L_{n-1} + [\lambda]_1 L_{n-2} + [\lambda]_2 L_{n-3} + \cdots + [\lambda]_{n-2} L_1 + [\lambda]_{n-1} \end{aligned}$$

ist. Dann lautet die (durch t^λ dividirte) Differentialgleichung für T

$$\left. \begin{array}{r} t^{n-1} \dfrac{d^{n-1}T}{dt^{n-1}} + L'_1 t^{n-2} \dfrac{d^{n-2}T}{dt^{n-2}} + L'_2 t^{n-3} \dfrac{d^{n-3}T}{dt^{n-3}} + \cdots \\ \cdots + L'_{n-3} t^2 \dfrac{d^2 T}{dt^2} + L'_{n-2} t \dfrac{dT}{dt} + (L'_{n-1} - t) T \end{array} \right| = 0.$$

Der Umstand, dass man über die Constante λ verfügen kann, gestattet es nun, die Grösse L'_{n-1} gleich Null zu machen. Man stellt für λ die Gleichung

$$(25.) \quad L'_{n-1} = [\lambda]_{n-1} + L_1[\lambda]_{n-2} + L_2[\lambda]_{n-3} + \cdots + L_{n-2}[\lambda]_1 + L_{n-1} = 0$$

auf. Hierdurch nimmt die letztgenannte Differentialgleichung, nachdem sie

durch t dividirt worden ist, dieselbe Gestalt wie die Gleichung (1.) an. Denn man erhält für T die Gleichung

$$(26.)\quad t^{n-2}\frac{d^{n-1}T}{dt^{n-1}}+L_1't^{n-3}\frac{d^{n-2}T}{dt^{n-2}}+\cdots+L'_{n-3}t\frac{d^2T}{dt^2}+L'_{n-2}\frac{dT}{dt}-T=0,$$

und diese entsteht aus (1.), wenn n, x, y, L_1, L_2, ... respective durch $n-1$, t, T, L_1', L_2', ... ersetzt werden.

Die Gleichung (25.), welche zur Bestimmung der Constanten λ dient, kann mit Hülfe der Relationen (4.) und (5.) umgeformt werden. Es ergiebt sich die Gleichung

$$(27.)\qquad (\lambda+\varrho_1)(\lambda+\varrho_2)\ldots(\lambda+\varrho_{n-1})=0,$$

welche zeigt, dass λ mit einem der Werthe $-\varrho_1$, $-\varrho_2$, ..., $-\varrho_{n-1}$ identisch ist. Man wähle

$$(28.)\qquad \lambda=-\varrho_{n-1}.$$

Dann wird aus (22.) die Gleichung

$$(29.)\qquad y=\int_g^h e^{\frac{x}{t}}t^{-\varrho_{n-1}}T\,dt$$

erhalten.

Integrirt man die Differentialgleichung (26.) durch Reihen, die nach Potenzen von t aufsteigen, so gewinnt man $n-1$ particuläre Integrale, die analog zu (6.) gebiidet sind. Die Constanten, welche in diesen Reihen vorkommen, stehen zu den Constanten ϱ_1, ..., ϱ_{n-1} in einer einfachen Beziehung. Bezeichnet man nämlich durch ϱ_1', ϱ_2', ..., ϱ'_{n-2} die Werthe

$$(30.)\quad \varrho_1'=\varrho_1-\varrho_{n-1}+1,\quad \varrho_2'=\varrho_2-\varrho_{n-1}+1,\quad \ldots,\quad \varrho'_{n-2}=\varrho_{n-2}-\varrho_{n-1}+1,$$

so sind

$$(31.)\quad \begin{cases} \mathfrak{F}(\varrho_1',\ \varrho_2',\ \varrho_3',\ \ldots,\ \varrho'_{n-2};\ t), \\ t^{1-\varrho_1'}\mathfrak{F}(2-\varrho_1',\ \varrho_2'-\varrho_1'+1,\ \varrho_3'-\varrho_1'+1,\ \ldots,\ \varrho'_{n-2}-\varrho_1'+1;\ t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ t^{1-\varrho'_{n-2}}\mathfrak{F}(2-\varrho'_{n-2},\ \varrho_1'-\varrho'_{n-2}+1,\ \varrho_2'-\varrho'_{n-2}+1,\ \ldots,\ \varrho'_{n-3}-\varrho'_{n-2}+1;\ t) \end{cases}$$

die $n-1$ Hauptintegrale der Differentialgleichung (26.). Um dieses Resultat abzuleiten, beweist man, dass die Gleichungen, welche die Constanten L_1', L_2', ... mit ϱ_1', ϱ_2', ... verbinden, gleichlautend mit den zwischen L_1, L_2, ... und ϱ_1, ϱ_2, ... bestehenden Gleichungen werden, wenn nur $n-1$ an die Stelle von n tritt. Hierauf soll im folgenden Paragraphen näher eingegangen werden.

§ 3.

Man nenne $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_{n-2}$ die Constanten

(32.) $\mathfrak{r}_1 = \varrho_1 - \varrho_{n-1}, \quad \mathfrak{r}_2 = \varrho_2 - \varrho_{n-1}, \quad \ldots, \quad \mathfrak{r}_{n-2} = \varrho_{n-2} - \varrho_{n-1}$

und setze (für ein beliebiges z)

(33.) $(z+\mathfrak{r}_1)(z+\mathfrak{r}_2)\ldots(z+\mathfrak{r}_{n-2}) = z^{n-2} + \mathfrak{R}_1 z^{n-3} + \mathfrak{R}_2 z^{n-4} + \cdots + \mathfrak{R}_{n-3} z + \mathfrak{R}_{n-2}.$

$\mathfrak{R}_0$ bedeute die Zahl 1. Da nach (30.) die Differenzen $\varrho'_k - 1$ gleich $\mathfrak{r}_k$ sind, so stellt die Summe

(34.) $$\sum_{i=\mu}^{i=n-1} d_{\mu-1}^{(i-1)} \mathfrak{R}_{n-i-1}$$

denjenigen Ausdruck dar, der aus der rechten Seite von (11.) entsteht, wenn man n durch $n-1$ und zugleich $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ durch $\varrho'_1, \varrho'_2, \ldots$ ersetzt. Denn die Werthe $\mathfrak{R}_k$ entsprechen, als die elementaren symmetrischen Functionen von $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_{n-2}$, bei der genannten Aenderung den Constanten S_k. Kann man also zeigen, dass für $\mu = 1, 2, \ldots, n-2$ die in (24.) bezeichnete Grösse $L'_{n-\mu-1}$ sich in die Summe (34.) umformen lässt, so ist der am Schluss von § 2 ausgesprochene Satz bewiesen.

Dieser auf die Coefficienten $L'_1, \ldots, L'_{n-2}$ bezüglichen Rechnung sollen einige Bemerkungen vorausgeschickt werden. Die Gleichung (5.) nimmt, wenn

$$z = \zeta - \varrho_{n-1}, \quad z + \varrho_{n-1} = \zeta$$

substituirt wird, die Gestalt

$$(\zeta-\varrho_{n-1})^{n-1} + R_1(\zeta-\varrho_{n-1})^{n-2} + \cdots + R_{n-2}(\zeta-\varrho_{n-1}) + R_{n-1} = \zeta(\zeta+\mathfrak{r}_1)(\zeta+\mathfrak{r}_2)\ldots(\zeta+\mathfrak{r}_{n-2})$$

an, woraus, wegen (33.), die Identität

$$(\zeta-\varrho_{n-1})^{n-1} + R_1(\zeta-\varrho_{n-1})^{n-2} + \cdots + R_{n-2}(\zeta-\varrho_{n-1}) + R_{n-1} = \zeta^{n-1} + \mathfrak{R}_1\zeta^{n-2} + \mathfrak{R}_2\zeta^{n-3} + \cdots + \mathfrak{R}_{n-3}\zeta^2 + \mathfrak{R}_{n-2}\zeta$$

folgt. Vergleicht man auf der linken und rechten Seite der letzteren Gleichung die Coefficienten von $\zeta^{\varkappa-1}$, nachdem man links die Potenzen von $\zeta-\varrho_{n-1}$ nach dem binomischen Satze entwickelt hat, so findet man die Formel

(35.) $$\begin{cases} \mathfrak{R}_{n-\varkappa} = \sum_{i=\varkappa}^{i=n} (-1)^{i-\varkappa}(i-1)_{i-\varkappa}\varrho_{n-1}^{i-\varkappa} R_{n-i} \\ \quad = R_{n-\varkappa} - (\varkappa)_1 \varrho_{n-1} R_{n-\varkappa-1} + (\varkappa+1)_2 \varrho_{n-1}^2 R_{n-\varkappa-2} - \cdots \pm (n-1)_{n-\varkappa}\varrho_{n-1}^{n-\varkappa} R_0 \end{cases}$$

für $\varkappa = 2, 3, \ldots, n-1$. Dieselbe gilt auch im Fall $\varkappa = n$, da dann beide Seiten sich auf den Werth Eins reduciren.

Wird ferner durch $f(i, k)$ irgend eine von den ganzen Zahlen i und k abhängige Grösse bezeichnet, so ist

$$(36.) \qquad \sum_{k=\nu}^{k=n} \sum_{i=k}^{i=n} f(i, k) = \sum_{i=\nu}^{i=n} \sum_{k=\nu}^{k=i} f(i, k).$$

Denn statt jede Zahl k mit den Werthen von i, welche grösser als dieselbe oder ihr gleich sind, zu combiniren, kann man jeder Zahl i die Werthe $k \leqq i$ zuordnen. Sowohl i als k durchlaufen die Werthe von ν bis n.

Endlich sei erwähnt, dass, wenn z einen beliebigen Werth und m, r, $r-m$ positive ganze Zahlen bedeuten, zwischen den Factoriellen $[z]_1$, $[z]_2$, $\ldots$, $[z]_{r-m}$ und den $r-m$ ersten Potenzen von z die Gleichung

$$(37.) \quad \begin{cases} d_m^{(r)} + (m+2)_1 d_{m+1}^{(r)} [z]_1 + (m+3)_2 d_{m+2}^{(r)} [z]_2 + \cdots + (r+1)_{r-m} d_r^{(r)} [z]_{r-m} \\ \quad = d_m^{(r)} + (r+1)_1 d_m^{(r-1)} z + (r+1)_2 d_m^{(r-2)} z^2 + \cdots + (r+1)_{r-m} d_m^{(m)} z^{r-m} \end{cases}$$

besteht, die ich in einer bereits genannten Arbeit abgeleitet habe*).

In die Gleichung (24.), durch welche die Grössen $L_1', \ldots, L_{n-2}'$ definirt werden, führe man statt μ und k die Indices ν und $\varkappa$ ein, indem man

$$\nu = \mu + 1, \quad \varkappa = k + 1$$

setzt. Dann ergiebt sich

$$(38.) \qquad L_{n-\nu}' = \sum_{\varkappa=\nu}^{\varkappa=n} (\varkappa-1)_{\varkappa-\nu} [\lambda]_{\varkappa-\nu} L_{n-\varkappa}.$$

Die Zahl ν nimmt hierin, da L_{n-1}' nach (25.) gleich Null ist, die Werthe $2, 3, \ldots, n-1$ an. Demzufolge kommt der Werth $\varkappa = 1$ in (38.) nicht vor. Setzt man für $L_{n-\varkappa}$ den in der ersten Gleichung (8.) bezeichneten Ausdruck ein, so entsteht aus (38.) die Gleichung

$$L_{n-\nu}' = \sum_{\varkappa=\nu}^{\varkappa=n} (\varkappa-1)_{\varkappa-\nu} [\lambda]_{\varkappa-\nu} \sum_{i=\varkappa}^{i=n} d_{\varkappa-2}^{(i-2)} R_{n-i}$$

oder, wenn die Formel (36.) benutzt wird,

$$\begin{aligned} L_{n-\nu}' &= \sum_{i=\nu}^{i=n} R_{n-i} \sum_{\varkappa=\nu}^{\varkappa=i} (\varkappa-1)_{\varkappa-\nu} [\lambda]_{\varkappa-\nu} d_{\varkappa-2}^{(i-2)} \\ &= \sum_{i=\nu}^{i=n} R_{n-i} \left\{ \begin{array}{l} d_{\nu-2}^{(i-2)} + (\nu)_1 [\lambda]_1 d_{\nu-1}^{(i-2)} + (\nu+1)_2 [\lambda]_2 d_\nu^{(i-2)} \\ \qquad + (\nu+2)_3 [\lambda]_3 d_{\nu+1}^{(i-2)} + \cdots + (i-1)_{i-\nu} [\lambda]_{i-\nu} d_{i-2}^{(i-2)} \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

---

*) Dieses Journal, Bd. 102, pag. 123, Gleichung (77.).

Die Grösse, mit welcher R_{n-i} in der letzteren Summe multiplicirt ist, wird aus der linken Seite der Formel (37.) erhalten, wenn daselbst

$$m = \nu - 2, \quad r = i - 2, \quad z = \lambda$$

genommen wird. Also ist $L'_{n-\nu}$ gleich dem Ausdruck

$$L'_{n-\nu} = \sum_{i=\nu}^{i=n} R_{n-i} \left\{ \begin{array}{l} d_{\nu-2}^{(i-2)} + (i-1)_1 d_{\nu-2}^{(i-3)} \lambda + (i-1)_2 d_{\nu-2}^{(i-4)} \lambda^2 \\ \qquad + (i-1)_3 d_{\nu-2}^{(i-5)} \lambda^3 + \cdots + (i-1)_{i-\nu} d_{\nu-2}^{(\nu-2)} \lambda^{i-\nu} \end{array} \right\}.$$

Für λ hat man nach (28.) den Werth $-\varrho_{n-1}$ zu substituiren, was zu der Gleichung

$$L'_{n-\nu} = \sum_{i=\nu}^{i=n} R_{n-i} \sum_{\varkappa=\nu}^{\varkappa=i} (-1)^{i-\varkappa} (i-1)_{i-\varkappa} d_{\nu-2}^{(\varkappa-2)} \varrho_{n-1}^{i-\varkappa}$$

führt. Indem man die Formel (36.) noch einmal anwendet, findet man

$$L'_{n-\nu} = \sum_{\varkappa=\nu}^{\varkappa=n} d_{\nu-2}^{(\varkappa-2)} \sum_{i=\varkappa}^{i=n} (-1)^{i-\varkappa} (i-1)_{i-\varkappa} \varrho_{n-1}^{i-\varkappa} R_{n-i}$$

oder, wegen (35.),

$$L'_{n-\nu} = \sum_{\varkappa=\nu}^{\varkappa=n} d_{\nu-2}^{(\varkappa-2)} \mathfrak{R}_{n-\varkappa}.$$

Es werde schliesslich wieder

$$\nu = \mu + 1, \quad \varkappa = k + 1$$

gesetzt. Dann gelangt man, für $\mu = 1, 2, \ldots, n-2$, zu der Gleichung

$$(39.) \qquad L'_{n-\mu-1} = \sum_{k=\mu}^{k=n-1} d_{\mu-1}^{(k-1)} \mathfrak{R}_{n-k-1},$$

die zu beweisen war*).

---

*) Eine ausführlichere Behandlung der Fälle $n = 3$ und $n = 4$ der obigen Gleichung (1.) findet sich in der Abhandlung des Verfassers „Ueber die Differentialgleichungen der Reihen $\mathfrak{F}(\varrho, \sigma; x)$ und $\mathfrak{F}(\varrho, \sigma, \tau; x)$“, Math. Annalen, Band 41.

Ueber diejenigen Polyeder, die bei gegebener Gattung und gegebenem Volumen die kleinste Oberfläche besitzen.

Erste Abhandlung.

(Von Herrn *Ernst Kötter*.)

In zwei grossen Abhandlungen*) beschäftigt sich *Steiner* mit der Frage, unter welchen Umständen ein Polyeder einer vorliegenden Gattung ein vorgeschriebenes Volumen mit dem kleinsten Aufwand an Oberfläche einschliesst. Zu einer Gattung rechnet er hierbei alle diejenigen allseitig convexen Polyeder, bei denen zwischen Ecken, Kanten und Flächen derselbe topologische Zusammenhang besteht. Bei zwei Klassen von Gattungen ist es ihm gelungen, das „isoperimetrische Ideal", so wollen wir uns der Kürze halber ausdrücken, wirklich aufzufinden. Es sind die Klasse der Pyramiden und diejenige der Doppelpyramiden. In beiden Fällen berührt eine Kugel sämmtliche Flächen einer Idealform in ihren Schwerpunkten. Dasselbe Gesetz findet sich bei einigen Gattungen erfüllt, wo die Idealform aus Symmetriegründen unmittelbar ersichtlich, als solche aber mathematisch schwer nachzuweisen ist. Solche Gattungen bestimmen u. A. das n-seitige Prisma und die regelmässigen Polyeder. *Steiner*s Vermuthung, dass hier ein allgemeines Gesetz vorliege, wird in ausgedehntem Masse durch folgenden schönen von Herrn *Lindelöf* aufgestellten Satz bestätigt: ***Man betrachte die Gesammtheit derjenigen allseitig convexen Polyeder, welche dieselbe Anzahl von Seitenflächen und dasselbe Volumen besitzen. Die nothwendigen Bedingungen für das Eintreten eines Minimums der Oberfläche sind bei allen den***

*) *Ueber Maximum und Minimum bei den Figuren in der Ebene, auf der Kugelfläche und im Raume überhaupt.* Zwei Abhandlungen. Gesammelte Werke, herausgegeben auf Veranlassung der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften, Bd. II, Berlin 1882, S. 177—308.

und nur bei den Polyedern erfüllt, deren Seitenflächen in ihren Schwerpunkten dieselbe Kugel berühren.*)

Dieses Gesetz ist von der einschneidendsten Bedeutung für diejenigen Gattungen, bei denen die Topologie des Netzes nur dreikantige Ecken vorschreibt. Aus einem eigentlichen Polyeder der Gattung erhält man nämlich durch beliebige unendlich kleine Verschiebungen seiner Ebenen ein Polyeder derselben Gattung. Das Ideal der Gattung wird daher ein „*Lindelöf*sches Polyeder“ (mit den oben erwähnten Eigenschaften) sein, wenn es nicht etwa als ein entartetes Polyeder der vorgelegten Gattung zu betrachten ist, durch Einschrumpfung einzelner Kanten, welche die Topologie des Gattungs-Netzes vorschreibt, mehrkantige Ecken erhalten hat. Bei einem solchen Grenz-Polyeder der Gattung sind nämlich nur diejenigen unendlich kleinen Verschiebungen der Polyederebenen zulässig, welche die mehrkantigen Ecken dem Gattungsgesetz gemäss in dreikantige auflösen; findet sich das Ideal unter ihnen, so braucht es nicht nothwendig ein *Lindelöf*sches Polyeder zu sein.

Zunächst entsteht also die Aufgabe, die einzelnen Polyedergattungen, bei denen nur dreikantige Ecken vorgeschrieben sind, daraufhin zu untersuchen, ob ihre Ideale eigentliche Glieder der Gattung sind oder nicht. Derselben stellen sich schon in den einfachsten Fällen erhebliche Schwierigkeiten entgegen. Immerhin zeigen die Resultate, die der Verfasser hinsichtlich eines sehr speciellen Falles in einer zweiten Abhandlung veröffentlichen

---

*) Vergl. die Abhandlung: ***Propriétés des polyèdres qui, sous une étendue superficielle donnée, renferment le plus grand volume.*** Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg, tome XIV, 1869, und auch Mathematische Annalen, Bd. II. Unter allen Polyedern von gleicher Flächenzahl und gleichem Volumen hat eines die kleinste Oberfläche und besitzt dann wirklich die erwähnten Eigenschaften, was Herr ***Lindelöf*** als Schlussresultat seiner Untersuchung anführt. Die Gleichungen, von denen Herr ***Lindelöf*** bei seinem Beweise ausgeht, haben zunächst folgenden geometrischen Inhalt. Man überdecke einmal die ganze Oberfläche eines Polyeders mit Masse von gleicher Dichtigkeit, zweitens nur seine Kanten, und zwar die Punkte jeder Kante proportional zu dem cotangens der Hälfte des ihr anliegenden Kantenwinkels. Alsdann ist der Schwerpunkt beliebig vieler Polyederflächen zugleich derjenige der zugehörigen Umrandungen, wenn die Oberfläche bei gegebenem Volumen ein Minimum wird. Dieses geometrische Gesetz hatte schon ***Berner*** aufgestellt, ohne aus ihm aber weitere Folgerungen zu ziehen. Vergl. ***über Maxima und Minima geometrischer Figuren etc.*** Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 11, S. 81—93.

wird, dass der Geltungsbereich des *Lindelöf*schen Satzes auf diese Weise wirklich eingeschränkt wird.

Fragt man aber, welche Eigenschaften die Ideale solcher Gattungen besitzen, in deren Netz mehrkantige Ecken vorgeschrieben sind, so bieten sich zunächst die Polyeder dar, die nur von Dreiecken begrenzt werden, als dualistische Bilder derer, die nur dreikantige Ecken besitzen. Wir wollen im Folgenden eine specielle Klasse von Gattungen dieser Art ins Auge fassen*). Unter ihnen treten zuerst die Tetraeder auf, als Polyeder, die nur dreikantige Ecken besitzen. Ihnen schliessen sich die drei- und vierseitigen Doppelpyramiden an, bei denen nur drei- und vierkantige Ecken auftreten. Am nächsten stehen ihnen aber diejenigen Polyeder, welche möglichst wenig, d. h. zwei mehr als vierkantige Ecken besitzen. Hier haben wir einmal die n-seitigen Doppelpyramiden mit zwei n-kantigen und n vierkantigen Ecken, sodann aber die Polyeder P_n, die uns im Folgenden beschäftigen sollen, und bei denen $n-3$ vierkantige, zwei dreikantige und zwei n-kantige Ecken auftreten. Ein P_n oder $\{B_1, B_2; A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}\}$ bringt man am leichtesten hervor, indem man die Spitzen B_1, B_2 einer Doppelpyramide mit einer ihrer vierkantigen Ecken A_0, A_1, A_2, …, A_{n-1}, etwa mit A_0, in eine Gerade bringt. Alsdann scheiden die Kanten A_0A_1 und A_0A_{n-1} aus, A_1 und A_{n-1} werden dreikantige Ecken, und P_n oder $\{B_1, B_2; A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}\}$ enthält die Kanten B_1A_1, B_1A_2, …, B_1A_{n-1}, B_2A_1, B_2A_2, …, B_2A_{n-1}, B_1B_2, A_1A_2, …, A_1A_{n-1}. Die Aufsuchung des Ideals der Gattung kann mit der n-Theilung der elliptischen Functionen auf folgende Art in Verbindung gebracht werden:

---

*) Auch in einzelnen Gattungen nur von Dreiecken begrenzter Polyeder giebt es *Lindelöf*sche Körper. An einem solchen sind aber sämmtliche Dreiecke zu einander congruent, ebenso wie die körperlichen Ecken, welche sie an dem Mittelpunkt der Kugel bestimmen. Es giebt deshalb nur drei Arten von Ecken an dem Körper, l-, m-, n-kantige, und es besteht die Relation

$$\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}>\frac{1}{2},$$

aus der zu schliessen ist, dass ausser den Doppelpyramiden nur noch neun specielle Gattungen existiren, in denen *Lindelöf*sche Polyeder vorkommen. Aus dem Gesagten geht jedenfalls hervor, dass unter den Gattungen der P_n nur die beiden ersten, die der P_3 und P_4, *Lindelöf*sche Polyeder enthalten. Ein P_3 ist nämlich ein Tetraeder, ein P_4 oder $\{B_1, B_2; A_1, A_2, A_3\}$ eine dreiseitige Doppelpyramide mit den Spitzen A_1, A_3 und dem Mitteldreieck $A_2B_1B_2$.

Es sei k der kleinste Modul, für den

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{2-3\xi_{03}^2\left(\frac{2i\omega}{n},\ k\right)}{\xi_{23}^2\left(\frac{2\omega}{n},\ k\right)-k^2\xi_{13}^2\left(\frac{2\omega}{n},\ k\right)\xi_{03}^2\left(\frac{2i\omega}{n},\ k\right)} = 0$$

ist; derselbe liegt zwischen den Grenzen $\sqrt{\frac{1}{2}}$ und $\sqrt{\frac{3}{4}}$, sobald $n > 3$ ist. Alsdann wird durch die Angaben

$$\xi_{23}\left(\frac{2\omega}{n},\ k\right) = \cos(A_iB_1A_{i+1}) = \cos(A_iB_2A_{i+1}), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-2)$$

$$\xi_{23}\left(\frac{2i\omega}{n},\ k\right) = \cos(A_iB_1B_2) = \cos(A_iB_2B_1) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

ein P_n unzweideutig festgelegt, das kleinere Oberfläche besitzt, als irgend ein anderes P_n mit gleichem Volumen, mag letzteres allseitig convex sein oder nicht. Das Ideal ist aber nicht immer allseitig convex. Sicher ist dies der Fall, sobald $n \leqq 8$ ist; es ist sicher längs B_1B_2 concav, im übrigen aber convex, wenn $n \geqq 14$ ist. Für die Zwischen-Zahlen bleibt der Charakter des Ideals unbestimmt.

Würde man nach dem P_n fragen, das unter allen allseitig convexen P_n von gleichem Volumen die kleinste Oberfläche zeigt, so erhielte man als Lösung für $n \leqq 8$ sicher das oben charakterisirte P_n, für $n \geqq 14$ aber ein entartetes P_n, bei dem der B_1B_2 anliegende Kantenwinkel sich gestreckt hat.

Aus der Beschreibung kann man rückwärts folgende geometrische Eigenschaften des idealen P_n erschliessen. ***Dasselbe besitzt zwei Symmetrieebenen, von denen eine B_1B_2 enthält, die andere hierzu senkrecht steht. Die in B_1 und B_2 zusammenstossenden Dreiecke zeigen daselbst denselben Winkel ψ $\left(\cos\psi = \xi_{23}\frac{2\omega}{n}\right)$. Aufeinanderfolgende der Ebenen $B_1A_iB_2$ schliessen denselben Winkel χ ein $\left(\cos\chi = \xi_{13}\frac{2\omega}{n}\right)$. Endlich stehen bei geradem n $(n = 2m)$ die Kanten $A_{m-1}A_m$ und $A_{m+1}A_m$ bez. auf $B_1A_{m-1}B_2$ und $B_1A_{m+1}B_2$ senkrecht.***

Für die Fälle $n = 5$, 6 habe ich auf Grund der erwähnten Eigenschaften die Frage algebraisch behandelt und die Auffindung des Ideals auf ganzzahlige Gleichungen achten, bez. dritten Grades zurückgeführt.

I.

Wir beweisen zwei für das Folgende nöthige Hülfssätze.

α) Lehrsatz 1. ***Bleibt bei einem Tetraeder von gegebenem Volumen V das eine Dreieck ABC und der Inhalt [BCD] eines zweiten, BCD, ungeändert, so erreicht die Summe der Inhalte der beiden anderen Dreiecke, [ABD]+[ACD], und damit die Oberfläche den kleinsten Werth, wenn diese gegen das erste, ABC, gleich geneigt sind, so dass also auch die A anliegenden Winkel derselben, (BAD) und (CAD), übereinstimmen****).

Es seien J, J_1, J_2, J_3 die Inhalte der Dreiecke *ABC, BCD, CAD, ABD*, α, ψ, χ die Neigungswinkel des ersten gegen die drei anderen, endlich a, b, c die Kanten *BC, CA, AB*. Alsdann ist

$$V = \tfrac{2}{3}\frac{J.J_1}{a}\sin\alpha = \tfrac{2}{3}\frac{J.J_2}{b}\sin\psi = \tfrac{2}{3}\frac{J.J_3}{c}\sin\chi,$$

so dass α einen von zwei supplementären Werthen haben kann, ferner ist

$$J = J_1\cos\alpha + J_2\cos\psi + J_3\cos\chi.$$

Daher muss

$$J_2+J_3 = \frac{3V}{2J}\left(\frac{b}{\sin\psi}+\frac{c}{\sin\chi}\right)$$

ein Minimum werden, und zwar bei unveränderlichem

$$J_2\cos\psi + J_3\cos\chi = \frac{3V}{2J}(b\cot\psi + c\cot\chi) = J - J_1\cos\alpha.$$

Als Bedingung des Minimums folgt aber

$$\cos\psi - q = 0, \quad \cos\chi - q = 0,$$

so dass wirklich $\psi = \chi$ und folglich $(BAD) = (CAD)$ ist. Da nur einmal die nothwendigen Bedingungen des Minimums erfüllt sind, das Eintreten eines solchen aber evident ist, so kann man noch schliessen:

Lehrsatz 2. ***Bewegt sich ein Punkt D auf einer Parallelen zu BC in der Richtung fort, dass der grössere der beiden Winkel (BAD) und (CAD) sich verkleinert, so wird die Summe der Inhalte [BAD]+[CAD] sich so lange verkleinern, bis beide Winkel einander gleich geworden sind.***

---

*) Dieser Satz steht in der Mitte zwischen zwei *Steiner*schen Lehrsätzen. Bei beiden handelt es sich darum, die Oberfläche eines Tetraeders bei gegebenem Volumen möglichst klein zu machen. In einem Fall ist noch die Grundfläche gegeben, im anderen Falle die Inhalte zweier Dreiecke. Vergl. *Ueber Maximum und Minimum etc.* S. 278 und: *Einfache Beweise der isoperimetrischen Hauptsätze.* Ges. Werke II, S. 75—91 (§ 8). Uebrigens würde *Steiner*s Schlussweise auch auf unseren Fall passen.

β) Gemeinsame Eigenschaften der Ideale aller Gattungen.

Es sei für ein beliebiges orthogonales Coordinaten-System die affine Transformation

$$x' = (1+\lambda)x, \quad y' = (1+\mu)y, \quad z' = (1+\nu)z$$

gegeben. Ein beliebiger Raumtheil mit dem Volumen V wird dann durch einen anderen vom Volumen

$$V+V(\lambda+\mu+\nu)+\cdots,$$

ein beliebiges Stück J einer Ebene mit den Richtungscosinus $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ durch ein anderes vom Inhalte

$$J+J\big((\mu+\nu)\cos^2\alpha+(\nu+\lambda)\cos^2\beta+(\lambda+\mu)\cos^2\gamma\big)+\cdots$$

ersetzt. Durch die Punkte sind Glieder zweiter und höherer Ordnung in λ, μ, ν angedeutet.

Bei einem Polyeder vom Volumen V und der Oberfläche F möge nun die einzelne der f Flächen den Inhalt F_i und die zugehörige Normale die Richtungscosinus $\cos\alpha_i$, $\cos\beta_i$, $\cos\gamma_i$ besitzen. Alsdann erfahren V und F bei der affinen Transformation die Veränderungen

$$\Delta V = V(\lambda+\mu+\nu)+\cdots,$$

$$\Delta F = (\mu+\nu)\sum_{i=1}^{f} F_i\cos^2\alpha_i + (\nu+\lambda)\sum_{i=1}^{f} F_i\cos^2\beta_i + (\lambda+\mu)\sum_{i=1}^{f} F_i\cos^2\gamma_i+\cdots,$$

während die Gattung des Polyeders ungeändert bleibt. Handelt es sich um das Ideal der Gattung, so muss ΔF bei genügend kleinen λ, μ, ν immer positiv sein, wenn ΔV verschwindet; hieraus folgt:

$$(1.) \qquad \sum_{i=1}^{f} F_i\cos^2\alpha_i = \sum_{i=1}^{f} F_i\cos^2\beta_i = \sum_{i=1}^{f} F_i\cos^2\gamma_i = \tfrac{1}{3}F.$$

Zunächst folgt nur, dass alle drei Summen denselben Werth Q haben; der Relationen

$$\cos^2\alpha_i+\cos^2\beta_i+\cos^2\gamma_i = 1$$

wegen ist aber $Q = \frac{1}{3}F$.

Den Relationen (1.) stellen sich drei andere an die Seite. Für irgend eine Axe ist nämlich, wie wir soeben zeigten,

$$\sum_{i=1}^{f} F_i\cos^2\varphi_i = \tfrac{1}{3}F,$$

unter φ_i den Winkel verstanden, den sie mit der Normale von F_i einschliesst.

Hat sie die Richtungscosinus $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$, so folgt:

$$\tfrac{1}{3}F = \cos^2\alpha' \sum_{i=1}^{f} F_i\cos^2\alpha_i + \cos^2\beta' \sum_{i=1}^{f} F_i\cos^2\beta_i + \cos^2\gamma' \sum_{i=1}^{f} F_i\cos^2\gamma_i$$
$$+ 2\cos\beta'\cos\gamma' \sum_{i=1}^{f} F_i\cos\beta_i\cos\gamma_i + 2\cos\gamma'\cos\alpha' \sum_{i=1}^{f} F_i\cos\gamma_i\cos\alpha_i$$
$$+ 2\cos\alpha'\cos\beta' \sum_{i=1}^{f} F_i\cos\alpha_i\cos\beta_i$$

oder:

$$0 = \cos\beta'\cos\gamma' \sum_{i=1}^{f} F_i\cos\beta_i\cos\gamma_i + \cos\gamma'\cos\alpha' \sum_{i=1}^{f} F_i\cos\gamma_i\cos\alpha_i$$
$$+ \cos\alpha'\cos\beta' \sum_{i=1}^{f} F_i\cos\alpha_i\cos\gamma_i.$$

Das ist aber nur möglich, wenn

$$(2.)\quad \sum_{i=1}^{f} F_i\cos\beta_i\cos\gamma_i = \sum_{i=1}^{f} F_i\cos\gamma_i\cos\alpha_i = \sum_{i=1}^{f} F_i\cos\alpha_i\cos\beta_i = 0$$

ist. Die Relationen (1.) und (2.) sind fünf unabhängigen äquivalent, da aus ihnen die Identität

$$F \equiv F$$

sich ableiten lässt. Wir können sie in die eine Relation

$$\sum_{i=1}^{f} F_i\cos\varphi_i\cos\psi_i = \tfrac{1}{3}F\cos\chi$$

zusammenfassen, wenn wir unter φ_i und ψ_i die Winkel verstehen, welche die Normale von F_i mit zwei festen Axen einschliesst, unter χ den Winkel, den die Axen mit einander einschliessen.

II.

Verschiebt man bei einem P_n oder $\{B_1, B_2;\ A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}\}$ in jeder Parallelen zu B_1B_2 die Strecke, welche P_n auf ihr abschneidet, so lange, bis ihr Mittelpunkt in eine bestimmte zu B_1B_2 senkrechte Ebene gelangt, so bilden die Endpunkte ein neues P_n, welches eine zu B_1B_2 senkrechte Symmetrieebene besitzt, dasselbe Volumen hat, wie das gegebene, aber nach dem *Steiner*schen Symmetrieprincip kleinere Oberfläche aufweist*). Bei Aufsuchung des Ideals der Gattung P_n, das bei gegebenem Volumen V die kleinste Oberfläche F besitzt, kann man sich also auf Polyeder mit dieser Symmetrieebene beschränken. Zur analytischen Behandlung der Aufgabe

*) Vgl. § 11 der Abhandlung: *Einfache Beweise etc.*

führen wir als Veränderliche die Länge $2z$ oder B_1B_2 und die Winkel

$$\varphi_i = (A_iB_1B_2) \quad = (A_iB_2B_1), \qquad (i=1, 2, \ldots, n-1)$$

$$\psi_i = (A_iB_1A_{i+1}) = (A_iB_2A_{i+1});\ \chi_i = (A_iB_0A_{i+1}); \qquad (i=1, 2, \ldots, n-2)$$

ein (B_0 ist der Mittelpunkt der Strecke B_1B_2). Alsdann ist

$$(3.)\quad \begin{cases} F = z^2\left\{\operatorname{tg}\varphi_1+\operatorname{tg}\varphi_{n-1}+\sum_{i=1}^{n-2}\dfrac{\sin\psi_i}{\cos\varphi_i\cos\varphi_{i+1}}\right\} \\ \quad \equiv \Phi(z,\ \varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_{n-1},\ \psi_1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_{n-2},\ \chi_1,\ \chi_2,\ \ldots,\ \chi_{n-2}), \end{cases}$$

$$(4.)\quad \begin{cases} V = \dfrac{z^3}{3}\sum_{i=1}^{n-2}\sin\chi_i\operatorname{tg}\varphi_i\operatorname{tg}\varphi_{i+1} \\ \quad \equiv \Psi(z,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_{n-1},\ \psi_1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_{n-2},\ \chi_1,\ \chi_2,\ \ldots,\ \chi_{n-2}). \end{cases}$$

Hierzu treten die Nebenbedingungen

$$(5.)\quad 0 = -\cos\psi_i+\cos\varphi_i\cos\varphi_{i+1}+\sin\varphi_i\sin\varphi_{i+1}\cos\chi_i \equiv X_i(\varphi_i,\ \varphi_{i+1},\ \psi_i,\ \chi_i). \qquad (i=1, 2, \ldots, n-2)$$

Setzt man nun mit aufzusuchenden Unveränderlichen $q,\ q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_{n-2}$

$$(6.)\qquad \Omega = \Phi+q\Psi+q_1X_1+q_2X_2+\cdots+q_{n-2}X_{n-2},$$

so gelten für das isoperimetrische Ideal ausser den Gleichungen (4.) und (5.) noch die anderen:

$$(7.)\quad \frac{\partial\Omega}{\partial z} = 0, \qquad (7^a.)\quad \frac{\partial\Omega}{\partial\varphi_i} = 0, \qquad (i=1, 2, \ldots, n-1)$$

$$(7^b.)\quad \frac{\partial\Omega}{\partial\psi_i} = 0, \qquad (7^c.)\quad \frac{\partial\Omega}{\partial\chi_i} = 0. \qquad (i=1, 2, \ldots, n-2)$$

Das gilt aber nur unter der Voraussetzung, dass das Ideal keinerlei Ausartungen zeigt. Falls etwa bei ihm $\sum_{i=1}^{n-2}\chi_i$ den äussersten Werth 2π erreichte, so brauchen die Gleichungen (7.) nicht nothwendig zu bestehen, da nicht bei allen den Gleichungen (4.) und (5.) entsprechenden Variationen der Veränderlichen F sich zu verkleinern braucht. Um dieser Schwierigkeit zu entgehen, construiren wir uns ein Continuum von theils uneigentlichen P_n, welches das gegebene umfasst, zeigen, dass das Ideal dieses Continuums sicher den Gleichungen (7.) bis (7^c.) genügt, und erkennen dann später, dass dieses Ideal dem Bereich der eigentlichen P_n angehört.

Zu diesem Zweck nehmen wir V als constant, die Winkel φ_1, $\varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_{n-1}$ als spitz, $\psi_1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_{n-2}$ aber und damit $\chi_1,\ \chi_2,\ \ldots,\ \chi_{n-2}$ zwischen den Grenzen 0 und π an. Nachdem ein bestimmter Drehungssinn für die Axe B_1B_2 gewählt ist, hat man dann $n-1$ Dreiecke $B_1A_1B_2$,

$B_1A_2B_2, \ldots, B_1A_{n-1}B_2$, die bei B_1 und B_2 die Winkel $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ zeigen, so festzulegen, dass aufeinanderfolgende der Reihe nach die Winkel $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_{n-2}$ einschliessen. V stellt dann die Summe der Tetraeder-Inhalte

$$[B_1B_2;\ A_1A_2]+[B_1B_2;\ A_2A_3]+\cdots+[B_1B_2;\ A_{n-2}A_{n-1}]$$

dar, während F eine Summe von Dreiecksinhalten ist:

$$F = [A_1B_1A_2]+[A_2B_1A_3]+\cdots+[A_{n-2}B_1A_{n-1}]+[A_1B_2A_2]+[A_2B_2A_3]+\cdots$$
$$\cdots+[A_{n-2}B_2A_{n-1}]+[B_1A_1B_2]+[B_1A_{n-1}B_2].$$

Sobald $\sum_{i=1}^{n-2} \chi_i$ grösser als 2π ist, erhalten wir kein eigentliches, sondern ein gewissermassen mehrfach um B_1B_2 herumgewundenes P_n. Wir beschränken unser Continuum durch die Festsetzung, dass ein P_n lediglich längs B_1B_2 concav sein darf.

Wir heben aus dem Gesammt-Continuum ein Theil-Continuum durch die Festsetzung heraus, dass $\sum_{i=1}^{n-2} \chi_i$ unterhalb einer Grenze liegen soll, die nicht kleiner als $\frac{1}{2}(n-2)\pi$ ist. An der Grenze oder im Innern des Theil-Continuums muss nothwendig ein P_n mit kleinster Oberfläche liegen. Im letzteren, aber nicht nothwendig im ersteren Fall müssen die Gleichungen (7.), (7^a.), (7^b.), (7^c.) gelten. An die Grenze des Continuums gelangt man aber, wenn die Gösse $B_1B_2 = 2z$ unendlich gross oder unendlich klein wird; zweitens, wenn ein Winkel des Polygons $B_0A_1A_2 \ldots A_{n-1}$, jedoch nicht der bei B_0 liegende, sich streckt oder einzelne seiner Seiten einschrumpfen, drittens, wenn einzelne der χ_i sich strecken oder einzelne der φ_i verschwinden, und endlich viertens, wenn die Summe der χ_i den vorgeschriebenen Grenzwerth erreicht. Zeigen wir, dass jedes dieser Grenzpolyeder durch ein nicht ausserhalb des Theil-Continuums liegendes von kleinerer Oberfläche ersetzt werden kann, so ist ein isoperimetrisches Ideal im Innern des Continuums nachgewiesen.

Versteht man unter G die Summe der Inhalte der Dreiecke $A_iB_0A_{i+1}$, so ist einerseits

$$F > 2G, \quad V = \tfrac{2}{3}Gz, \quad F > \frac{3V}{z}.$$

Ist ferner U der Umfang des Polygons $B_0A_1A_2 \ldots A_{n-1}$, der also grösser ist als der eines Kreises vom Inhalte G, so hat man

$$F > Uz, \quad U > 2\sqrt{G\pi}, \quad V = \tfrac{2}{3}Gz$$

und folglich

$$F > \sqrt{6V\pi z}.$$

Zeigt nun ein beliebiges P_n^0 die Oberfläche F_0, und setzt man

$$z' = \frac{3V}{F_0}, \quad z'' = \frac{F_0^2}{6V\pi},$$

so haben eine grössere Oberfläche als F_0 alle diejenigen P_n, bei denen nicht

$$z' < z < z''$$

ist. Da F grösser ist als der doppelte Inhalt jedes Dreiecks $B_1 A_i B_2$, so ergiebt sich für φ_i die obere Grenze

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg}\left(\frac{F_0}{2z'^2}\right). \tag{8.}$$

Ein Polyeder, bei dem einer der Winkel χ_i sich streckt oder einer der Winkel φ_i verschwindet, zerfällt in ein P_m und ein P_{n-m}. Dieselben mögen für sich die Volumina V_1 und V_2, die Oberflächen F_1 und F_2 besitzen; es sei ferner

$$\frac{F_1^3}{V_1^2} \leqq \frac{F_2^3}{V_2^2}.$$

Ein zu P_m ähnliches Polyeder mit dem Volumen V oder V_1+V_2 hat dann die Oberfläche

$$F_1\sqrt[3]{\frac{(V_1+V_2)^2}{V_1^2}} = F_1\sqrt[3]{\left(1+\frac{V_2}{V_1}\right)^2} < F_1\left(1+\sqrt[3]{\frac{V_2^2}{V_1^2}}\right) < F_1+F_2.$$

Dasselbe gehört aber zu unserem Continuum und hat wenigstens einen gestreckten Winkel χ_i weniger als das gegebene.

Ein P_m unseres Continuums kann entstehen, entweder indem einzelne der Winkel $(A_{i-1}A_iA_{i+1})$ sich strecken, oder indem einzelne Kanten A_iA_{i+1} zusammenschrumpfen, womit das Verschwinden einiger χ_i verknüpft ist. Man kann es in ein P_{m+1} zurückverwandeln, wenn man einen Punkt auf dem Umfange seines Mittelpolygons geeignet als $(m+1)$-ten Eckpunkt mit gestrecktem Winkel wählt. Mit dem neuen Eckpunkt A_{i+1} heisse nun das Polygon

$$B_0 \quad A_1 \quad \ldots \quad A_{i-1} \quad A_i \quad A_{i+1} \quad \ldots \quad A_m.$$

Hält man alle anderen Ecken fest, verschiebt aber A_i parallel zu $A_{i+1}A_{i-1}$, also auf A_{i-1} zu, so entsteht ein P_{m+1} unseres Continuums; nach Lehrsatz 2) wird es eine kleinere Oberfläche als P_m besitzen, wenn man (A_{i+1}, B_1, A_i)

kleiner als (A_{i-1}, B_1, A_i) gemacht hat. Ist bei einem Polyeder, bei welchem $\sum_{i=1}^{n-2} \chi_i$ den Grenzwerth erreicht, keines der bisherigen Verfahren anwendbar, so kann es auf Grund des Lehrsatzes 2) durch ein Polyeder des Continuums mit kleinerer Oberfläche ersetzt werden, wenn nicht

$$\varphi_1 > \psi_1 = \psi_2 = \cdots = \psi_{n-2} < \varphi_{n-1}$$

ist. Ist z. B. $\psi_i \gtrless \psi_{i+1}$, so wird eine Bewegung von A_i parallel zu $A_{i+1}A_{i-1}$ bezw. $A_{i-1}A_{i+1}$ das Volumen ungeändert lassen, die Oberfläche aber verkleinern, ist andererseits $\varphi_1 < \psi_1$, so wird, wenn man A_1 parallel zu B_0A_2 bewegt, $\sum_{i=1}^{n-2} \chi_i$ sich verkleinern, ebenso die Oberfläche, und es wird ein Polyeder des Continuums entstehen. Finden aber die obigen Relationen statt, so ist der gemeinsame Werth der ψ_i kleiner als $\frac{\pi}{2}$, da dies von φ_1 und φ_{n-1} gilt, wenigstens einer der Winkel $\chi_2, \chi_3, \ldots, \chi_{n-3}$ aber, etwa χ_i, ist stumpf, da χ_1 und χ_{n-2} spitz sind und die Summe aller χ nicht kleiner als $\frac{1}{2}(n-2)\pi$ ist. Man bewege nun die beiden Dreiecke $B_1A_iB_2$ und $B_1A_{i+1}B_1$ mit den vorangehenden und darauf folgenden Theilen des Polyeders um einen kleinen Winkel auf einander zu. Hierbei verkleinern sich sowohl ψ_i als auch χ_i; da aber ψ_i spitz, χ_i stumpf ist, so vermindert sich der Inhalt des Dreiecks $A_iB_1A_{i+1}$, derjenige von $A_iB_0A_{i+1}$ und folglich das Volumen des Tetraeders $B_1B_2A_iA_{i+1}$ aber vergrössert sich, und unser Polyeder ist somit in ein anderes verwandelt, welches grösseres Volumen und kleinere Oberfläche als das gegebene besitzt. Durch Verkleinerung nach der Aehnlichkeit kann man also ein P_n unseres Continuums herstellen, welches kleinere Oberfläche als das Grenzpolyeder besitzt. Aus allen diesen Erwägungen folgt, dass bei dem Ideal unseres Hauptcontinuums die Winkel φ_i, ψ_i und χ_i innerhalb der für sie gegebenen Grenzen liegen, dass ferner keiner der Winkel $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ sich streckt. In Folge dessen kann man den Winkeln φ_i und χ_i ganz unabhängig von einander Variationen von genügender Kleinheit ertheilen, ohne dass eine der möglichen Ausartungen eintritt. Berechnet man mit Hülfe von (4.) und (5.) die Variationen der χ_i und von z, so muss die totale Variation von F verschwinden, d. h. aber mit anderen Worten:

Lehrsatz 3. *In dem von uns construirten Continuum giebt es Träger eines Lösungssystems der Gleichungen* (4.), (5.), (7.), (7^a.), (7^b.), (7^c.) *Eines*

von diesen Polyedern, bei dem

$$(9.) \qquad \sum_{i=1}^{n-2} \chi_i < \tfrac{1}{2}(n-2)\pi$$

ist, hat kleinere Oberfläche als alle anderen Polyeder des Continuums.

Wir benutzen zuerst die Gleichungen (7^b.) und (7^c.). An dem „Ideal" finden also die Relationen statt:

$$(7^b.) \qquad z^2 \frac{\cos\psi_i}{\cos\varphi_i \cos\varphi_{i+1}} + q_i \sin\psi_i = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-2)$$

$$(7^c.) \qquad \frac{q}{3} z^3 \cos\chi_i \operatorname{tg}\varphi_i \operatorname{tg}\varphi_{i+1} - q_i \sin\chi_i \sin\varphi_i \sin\varphi_{i+1} = 0; \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-2)$$

da die φ_i mit Ausschluss der Grenzen zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegen, so folgt hieraus

$$(10.) \qquad 3\cot\psi_i = -qz\cot\chi_i.$$

Nach dem Theorem 2.) muss aber als nothwendige Folge aus den Gleichungen (5.), (7.), (7^a.), (7^b.), (7^c.) sich das Gleichungssystem

$$(11.) \qquad \varphi_1 = \psi_1 = \psi_2 = \cdots = \psi_{n-2} = \varphi_{n-1} = \psi$$

ergeben, denn im anderen Falle würde die Verschiebung einer Ecke des Polygons $B_0 A_1 A_2 \ldots A_{n-1}$ parallel zur Verbindungslinie der beiden Nachbarecken ein P_n mit kleinerer Oberfläche ergeben. Offenbar ist dann nach (10.):

$$(12.) \qquad \chi_1 = \chi_2 = \cdots = \chi_{n-2} = \chi.$$

Diese Folgerung wird nur dann hinfällig, wenn $\cot\psi$ und q beide verschwinden. Da jedoch wenigstens einer der Winkel χ_i spitz ist, (9.), und wir für φ_i eine obere Grenze, φ_0, haben, so ist

$$\cos\psi = \cos\varphi_i \cos\varphi_{i+1} + \sin\varphi_i \sin\varphi_{i+1} \cos\chi_i > \cos^2\varphi_0,$$

und es kann der besondere Fall nicht eintreten. χ ist ein spitzer Winkel, (9.). Die $n-2$ Strecken A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-2}A_{n-1}$ werden daher nicht nur von B_1, B_2, sondern auch von B_0 aus unter je demselben Sehwinkel erblickt.

Sind die Winkel χ und ψ bestimmt, so können noch in mehrfacher Weise zugehörige P_n construirt werden. Durch $\varphi_1 = \psi = (A_1 B_1 B_2)$ ist zunächst φ_2 oder $(A_2 B_1 B_2)$ bestimmt, weil A_2 nicht mit B_0 zusammenfallen darf. Bei φ_3 sind wir schon im Zweifel, ob er gleich φ_1 ist oder nicht. Ist φ_3 gewählt, so entsteht ein ähnlicher Zweifel hinsichtlich φ_4, u. s. w.

Wir wollen zeigen, dass φ_{i-1} und φ_{i+1} stets die Seiten der beiden verschiedenen sphärischen Dreiecke sind, die durch die Seiten φ_i und ψ und durch den der letzteren Seite gegenüberliegenden Winkel χ bestimmt werden. Zu diesem Zweck stellen wir die Gleichung (7ª.) bei allgemeinen Werthen der φ_i, ψ_i und χ_i auf und combiniren das erhaltene Ergebnis mit den Relationen (11.) und (12.). Wir setzen

$$(7^{a}.) \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi_i} = U_i^{(+1)} + U_i^{(-1)} = 0 \qquad (i = 2, 3, \ldots, n-2)$$

und definiren

$$U_i^{(+1)} = \frac{\partial}{\partial \varphi_i}\Big\{z^2 \frac{\sin\psi_i}{\cos\varphi_i \cos\varphi_{i+1}} + q\frac{z^3}{3}\sin\chi_i \operatorname{tg}\varphi_i \operatorname{tg}\varphi_{i+1} + q_i(-\cos\psi_i + \cos\varphi_i\cos\varphi_{i+1} + \sin\varphi_i\sin\varphi_{i+1}\cos\chi_i)\Big\}.$$

$U_i^{(-1)}$ erhalten wir bei Vertauschung von q_i, χ_i, ψ_i, φ_{i+1} gegen q_{i-1}, χ_{i-1}, ψ_{i-1}, φ_{i-1}. Nun ist offenbar

$$U_i^{(+1)} = z^2 \frac{\sin\psi_i \sin\varphi_i}{\cos^2\varphi_i \cos\varphi_{i+1}} + q\frac{z^3}{3}\frac{\sin\chi_i}{\cos^2\varphi_i}\operatorname{tg}\varphi_{i+1} + q_i(-\sin\varphi_i\cos\varphi_{i+1} + \cos\varphi_i\sin\varphi_{i+1}\cos\chi_i).$$

Benutzen wir hier die Gleichheit der ψ_i sowie die der χ_i und setzen

$$(10.) \qquad q = -\frac{3}{z}\cdot\frac{\cot\psi}{\cot\chi}, \quad q_i = -z^2\frac{\cot\psi}{\cos\varphi_i\cos\varphi_{i+1}},$$

so ergiebt sich

$$U_i^{(+1)} = +z^2\frac{\sin\psi\sin\varphi_i}{\cos^2\varphi_i\cos\varphi_{i+1}} - z^2\frac{\cot\psi}{\cot\chi}\frac{\sin\chi}{\cos^2\varphi_i}\operatorname{tg}\varphi_{i+1} - z^2\frac{\cot\psi}{\cos\varphi_i\cos\varphi_{i+1}}(-\sin\varphi_i\cos\varphi_{i+1} + \cos\varphi_i\sin\varphi_{i+1}\cos\chi),$$

$$U_i^{(+1)} = -\frac{z^2}{\sin\psi\cos\chi\cos^2\varphi_i\cos\varphi_{i+1}}[-\sin^2\psi\cos\chi\sin\varphi_i + \sin^2\chi\cos\psi\sin\varphi_{i+1} + \cos\chi\cos\psi\cos\varphi_i(-\sin\varphi_i\cos\varphi_{i+1} + \cos\chi\cos\varphi_i\sin\varphi_{i+1})],$$

$$U_i^{(+1)} = -\frac{z^2}{\sin\psi\cos\chi\cos^2\varphi_i\cos\varphi_{i+1}}\{\cos\psi\sin\varphi_{i+1} + \cos\chi(-\sin^2\psi\sin\varphi_i - \cos\psi\sin\varphi_i\cos\varphi_i\cos\varphi_{i+1}) - \cos^2\chi\cos\psi\sin^2\varphi_i\sin\varphi_{i+1}\}.$$

Setzt man hier

$$\cos\chi = \frac{\cos\psi - \cos\varphi_i\cos\varphi_{i+1}}{\sin\varphi_i\sin\varphi_{i+1}},$$

so ergiebt sich augenblicklich

$$U_i^{(+1)} = -\frac{z^2}{\cos\chi\cos^2\varphi_i}\cdot\frac{\cos\varphi_i-\cos\psi\cos\varphi_{i+1}}{\sin\psi\sin\varphi_{i+1}}.$$

Sollen also in dem sphärischen Dreiecke mit den Seiten ψ, φ_i, φ_{i+1} diesen die Winkel χ, ζ_i, η_{i+1} gegenüberliegen, so wird unsere Gleichung (7ª.):

$$(7^{a}.) \qquad U_i^{(-1)}+U_i^{(+1)} = -\frac{z^2}{\cos\chi\cos^2\varphi_i}(\cos\eta_i+\cos\zeta_i) = 0$$

oder

$$(13.) \qquad \eta_i+\zeta_i = \pi. \qquad (i=2,3,\ldots,n-2)$$

Also sind wirklich φ_{i-1} und φ_{i+1} die letzten Seiten der beiden verschiedenen sphärischen Dreiecke, welche durch die Seiten φ_i und ψ und den letzterer gegenüberliegenden Winkel χ bestimmt werden. Jeder der Winkel φ_i ist daher grösser als wenigstens einer der beiden Winkel φ_{i-1} und φ_{i+1}. Sucht man den grössten Winkel unter den φ_i heraus, es sei dies φ_k, so gilt das System von Ungleichungen

$$\varphi_1 < \varphi_2 < \cdots < \varphi_{k-1} < \varphi_k > \varphi_{k+1} > \varphi_{k+2} > \cdots > \varphi_{n-1}.$$

Eines der Zeichen zunächst φ_k kann in das Gleichheitszeichen übergehen. Es sei $\varphi_{k+\varepsilon}(\varepsilon = \pm 1)$ der grössere der beiden Winkel φ_{k-1} und φ_{k+1}. Bezeichnet man mit φ' die zweite χ anliegende Seite eines rechtwinkligen Dreiecks, das durch die Hypotenuse φ_k und den Winkel χ bestimmt ist, so ist augenscheinlich

$$\varphi' < \varphi_{k+\varepsilon} < \varphi_k.$$

Hieraus geht aber hervor, dass die drei Winkel des Dreiecks aus φ_k, ψ, $\varphi_{k+\varepsilon}$ sämmtlich spitz sind. Bei einem sphärischen Dreieck, dessen Seiten und Winkel sämmtlich kleiner als $\frac{\pi}{2}$ sind, ist aber die Grösse

$$k = \frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma}$$

kleiner als Eins. Dieses Verhältnis ist für alle sphärischen Dreiecke mit den Seiten ψ, φ_i, φ_{i+1} und den Winkeln χ, ζ_i, η_{i+1} offenbar der gleiche echte Bruch k.

III.

Nunmehr ist alles vorbereitet, um von dem bekannten Zusammenhang zwischen der sphärischen Trigonometrie und der Theorie der ellip-

tischen Functionen Gebrauch zu machen. Man setze zu ihrer Einführung

$$\sqrt{e_1-e_3}=1, \qquad k^2=e_2-e_3, \quad e_1+e_2+e_3=0,$$
$$\wp(\omega)=e_1, \quad \wp(\omega+\omega')=e_2, \qquad \wp(\omega')=e_3.$$

Die Grösse k sei kleiner als Eins, also ω reell und ω' rein imaginär. Bei einem sphärischen Dreieck mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ sei nun

$$k=\frac{\sin a}{\sin\alpha}=\frac{\sin b}{\sin\beta}=\frac{\sin c}{\sin\gamma}.$$

Alsdann giebt es ein Argument u innerhalb der Grenzen 0 und 2ω, für das

$$\sin\alpha=\xi_{03}(u)=\sqrt{\frac{1}{\wp(u)-e_3}}=\operatorname{sinam}(u,\ k)=\frac{\sigma}{\sigma_3}(u),$$
$$\cos\alpha=\xi_{13}(u)=\sqrt{\frac{\wp(u)-e_1}{\wp(u)-e_3}}=\operatorname{cosam}(u,\ k)=\frac{\sigma_1}{\sigma_3}(u),$$
$$\sin a=k\xi_{03}(u),$$
$$\cos a=\xi_{23}(u)=\sqrt{\frac{\wp(u)-e_2}{\wp(u)-e_3}}=\Delta\operatorname{am}(u,\ k)=\frac{\sigma_2}{\sigma_3}(u);$$

zu β, b bez. γ, c gehören zwei andere Argumente v und w, und es ist dann bekanntlich

$$u+v+w=2i\omega,$$

wo i gleich 1 oder 2 ist. Sind nun a, b, c sämmtlich kleiner als $\frac{\pi}{2}$, und ist folglich jede der Grössen $\beta+\gamma$, $\gamma+\alpha$, $\alpha+\beta$ kleiner als π, so hat man bestimmter

$$u+v+w=2\omega.$$

Bezeichnet man nun die Argumente, von denen die Paare gegenüberliegender Stücke χ, ψ; ζ_i, φ_i; η_{i+1}, φ_{i+1} in einem unserer $n-2$ Dreiecke abhängen, mit w, v_i, u_{i+1}, so hat man zunächst die Gleichungen

(14.) $$w+u_{i+1}+v_i=2\omega. \qquad (i=1, 2, \ldots, n-2)$$

Der Gleichungen (13.) wegen treten aber hinzu

(15.) $$u_i+v_i=2\omega, \qquad (i=2, 3, \ldots, n-2)$$

endlich, da ζ_1 und η_{n-1} mit χ übereinstimmen, ist noch

$$v_1=u_{n-1}=w.$$

Durch Addition der i ersten Gleichungen (14.) erhält man bei Berück-

sichtigung von (15.):

$$(i+1)w+u_{i+1} = 2\omega,$$

oder speciell für $i = n-2$:

$$nw = 2\omega.$$

Man hat daher allgemein

$$(16.) \qquad v_i = \frac{2i\omega}{n}, \quad u_{i+1} = \frac{2(n-i-1)\omega}{n}$$

und gewinnt damit folgende Beschreibung des Polyeders:

$$(17.) \begin{cases} \cos\psi = \cos(A_iB_1A_{i+1}) = \cos(A_iB_2A_{i+1}) = \xi_{23}\dfrac{2\omega}{n}, & (i=1,2,\ldots,n-2) \\ \cos\varphi_i = \cos(A_iB_1B_2) = \cos(A_iB_2B_1) = \xi_{23}\dfrac{2i\omega}{n}, & (i=1,2,\ldots,n-1) \\ \cos\chi_i = \cos(A_iB_0A_{i+1}) = \cos\chi = \xi_{13}\dfrac{2\omega}{n}. & (i=1,2,\ldots,n-2) \end{cases}$$

Da stets $\xi_{23}(2\omega-u) = \xi_{23}u$ ist, so ist

$$(18.) \qquad \varphi_i = \varphi_{n-i},$$

so dass also eine zweite B_1B_2 enthaltende Symmetrieebene auftritt, die bei geradem $n\,(=2m)$ die Ecke A_m enthält, bei ungeradem $n(=2m+1)$ aber die Kante A_mA_{m+1} halbirt. Im Falle $n=2m$ ergeben sich die Grössenbeziehungen

$$(18^a.) \qquad \varphi_1 < \varphi_2 < \cdots < \varphi_{m-1} < \varphi_m > \varphi_{m+1} > \cdots > \varphi_{n-2} > \varphi_{n-1};$$

ferner ist

$$v_m = u_m = \omega, \quad \eta_m = \zeta_m = \frac{\pi}{2},$$

also stehen A_mA_{m-1} und A_mA_{m+1} bez. auf $B_1A_{m-1}B_2$ und $B_1A_{m+1}B_2$ senkrecht*). Ist $n=2m+1$, so hat man

$$v_m = u_{m+1} = \frac{2m}{2m+1}\omega,$$

es ist also das mittelste der sphärischen Dreiecke gleichschenklig, und es ergeben sich die Relationen

$$(18^b.) \qquad \varphi_1 < \varphi_2 < \cdots < \varphi_{m-1} < \varphi_m = \varphi_{m+1} > \varphi_{m+2} > \cdots > \varphi_{n-2} > \varphi_{n-1}.$$

---

*) Da die dreiseitige Doppelpyramide auf drei Arten als ein P_4 aufgefasst werden kann, so folgt der bereits von ***Steiner*** ausgesprochene Satz, dass beim Ideal die von einer Spitze ausgehenden drei Kanten auf einander senkrecht stehen. Vergl. ***Ueber Maximum und Minimum*** etc., Zweite Abhdlg., §§ 52 I, 53, 54.

Die noch fehlende Gleichung zur Bestimmung von k kann in jeder der beiden Arten

$$(7^a.) \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0,$$

$$(1.) \qquad \Sigma F_i\left(\tfrac{1}{3} - \cos^2\alpha_i\right) = 0$$

dargestellt werden, wobei unter F_i die einzelnen Dreiecke, unter α_i ihre Neigungen gegen die erste Symmetrieebene verstanden werden. Dass jede der beiden Gleichungen eine Folge der anderen ist, sobald $0 < k < 1$ ist, lässt sich indirect ersehen; jede von beiden ist die nothwendige, doch auch hinreichende Bedingung dafür, dass die erste Variation von F mit der von V verschwindet, während die Gesetze

$$\varphi_1 = \psi_1 = \psi_2 = \cdots = \psi_{n-2} = \varphi_{n-1}; \quad \chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = \cdots = \chi_{n-2}$$

obwalten. Einen directen Beweis aus der Theorie der elliptischen Functionen habe ich nur für gerades n gefunden.

Die Gleichung

$$(7^a.) \quad 2z\left(2\operatorname{tg}\psi + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{\sin\psi}{\cos\varphi_i \cos\varphi_{i+1}}\right) + qz^2 \sum_{i=1}^{n-2} \sin\chi \operatorname{tg}\varphi_i \operatorname{tg}\varphi_{i+1} = \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0$$

lautet nach Einsetzung des Werthes

$$(10.) \qquad q = -\frac{3}{z}\,\frac{\cot\psi}{\cot\chi}:$$

$$(19.) \quad 2\sin\psi \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\cos\varphi_i \cos\varphi_{i+1}} - \frac{3\cos\psi \sin^2\chi}{\cos\chi \sin\psi} \sum_{i=0}^{n-1} \operatorname{tg}\varphi_i \operatorname{tg}\varphi_{i+1} = 0.$$

Hierbei verstehen wir unter φ_0 und φ_n den Werth Null. Nach Einführung der elliptischen Functionen und Fortlassung des Factors $k\operatorname{tg}\chi$ erhält man

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{2\xi_{13}\frac{2\omega}{n} - 3\xi_{23}\frac{2\omega}{n}\xi_{03}\frac{2i\omega}{n}\xi_{03}\frac{2(i+1)\omega}{n}}{\xi_{23}\frac{2i\omega}{n}\xi_{23}\frac{2(i+1)\omega}{n}} = 0.$$

Nun ist bekanntlich

$$\xi_{23}(v-w) = \xi_{23}v\,\xi_{23}w + k^2\xi_{03}v\,\xi_{03}w\,\xi_{13}(v-w),$$

und also für

$$w = \frac{2i\omega}{n}, \quad v = \frac{2(i+1)\omega}{n}:$$

$$(20.) \quad \xi_{03}\frac{2i\omega}{n}\xi_{03}\frac{2(i+1)\omega}{n} = \frac{\xi_{23}\frac{2\omega}{n} - \xi_{23}\frac{2i\omega}{n}\xi_{23}\frac{2(i+1)\omega}{n}}{k^2\xi_{13}\frac{2\omega}{n}}.$$

Die Einsetzung in (19.) ergiebt

$$(21.)\qquad \sum_{i=0}^{n-1}\left\{\frac{2k^2\xi_{13}^2\frac{2\omega}{n}-3\xi_{23}^2\frac{2\omega}{n}}{\xi_{23}\frac{2i\omega}{n}\,\xi_{23}\frac{2(i+1)\omega}{n}}+3\xi_{23}\frac{2\omega}{n}\right\}=0.$$

Weiter ist

$$\frac{1}{\xi_{23}(u-v)}+\frac{1}{\xi_{23}(u+v)}=\frac{2\xi_{23}u\,\xi_{23}v}{\xi_{23}^2v-k^2\xi_{13}^2v\,\xi_{03}^2u}$$

und also

$$\frac{1}{\xi_{23}\frac{2(i-1)\omega}{n}}+\frac{1}{\xi_{23}\frac{2(i+1)\omega}{n}}=\frac{2\xi_{23}\frac{2i\omega}{n}\,\xi_{23}\frac{2\omega}{n}}{\xi_{23}^2\frac{2\omega}{n}-k^2\xi_{13}^2\frac{2\omega}{n}\,\xi_{03}^2\frac{2i\omega}{n}}.$$

Mithin erhält man

$$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{\xi_{23}\frac{2i\omega}{n}\,\xi_{23}\frac{2(i+1)\omega}{n}}=\frac{1}{\xi_{23}\frac{2\omega}{n}}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\xi_{23}\frac{2i\omega}{n}}\left\{\frac{1}{\xi_{23}\frac{2(i-1)\omega}{n}}+\frac{1}{\xi_{23}\frac{2(i+1)\omega}{n}}\right\}$$

$$=\frac{1}{\xi_{23}\frac{2\omega}{n}}+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\xi_{23}\frac{2\omega}{n}}{\xi_{23}^2\frac{2\omega}{n}-k^2\xi_{13}^2\frac{2\omega}{n}\,\xi_{03}^2\frac{2i\omega}{n}}$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\xi_{23}\frac{2\omega}{n}}{\xi_{23}^2\frac{2\omega}{n}-k^2\xi_{13}^2\frac{2\omega}{n}\,\xi_{03}^2\frac{2i\omega}{n}}.$$

Die Einsetzung in (21.) ergiebt

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left\{\frac{2k^2\xi_{13}^2\frac{2\omega}{n}-3\xi_{23}^2\frac{2\omega}{n}}{\xi_{23}^2\frac{2\omega}{n}-k^2\xi_{13}^2\frac{2\omega}{n}\,\xi_{03}^2\frac{2i\omega}{n}}+3\right\}=0$$

oder, wenn man jedes Glied auf einen Nenner bringt und den Factor $k^2\xi_{13}^2\frac{2\omega}{n}$ ablöst,

$$(22.)\qquad \sum_{i=0}^{n-1}\frac{2-3\xi_{03}^2\frac{2i\omega}{n}}{\xi_{23}^2\frac{2\omega}{n}-k^2\xi_{13}^2\frac{2\omega}{n}\,\xi_{03}^2\frac{2i\omega}{n}}=0.$$

Eine analoge Reihe von Umformungen kann man mit der Gleichung (1.) vornehmen. Da

$$F_i = [A_i B_1 A_{i+1}] = [A_i B_2 A_{i+1}] = \frac{z^2}{2} \cdot \frac{\sin\psi}{\cos\varphi_i \cos\varphi_{i+1}},$$

$$F_0 = F_{n-1} = [B_1 A_1 B_2] = [B_1 A_{n-1} B_2] = z^2 \operatorname{tg}\psi,$$

$$\cos\alpha_i = \frac{[A_i B_0 A_{i+1}]}{[A_i B_1 A_{i-1}]} = \frac{[A_i B_0 A_{i+1}]}{[A_i B_2 A_{i+1}]} = \frac{\sin\chi}{\sin\psi} \sin\varphi_i \sin\varphi_{i+1}$$

ist, so lautet die Gleichung bei Fortlassung des Factors $\sin\psi$ zunächst

$$(23.) \qquad \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\cos\varphi_i \cos\varphi_{i+1}} \left(\frac{1}{3} - \frac{\sin^2\chi}{\sin^2\psi} \sin^2\varphi_i \sin^2\varphi_{i+1} \right) = 0,$$

$$(24.) \qquad \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\xi_{23} \frac{2i\omega}{n} \xi_{23} \frac{2(i+1)\omega}{n}} \left\{ \frac{1}{3} - k^2 \xi_{03}^2 \frac{2i\omega}{n} \xi_{03}^2 \frac{2(i+1)\omega}{n} \right\} = 0.$$

Mit Hülfe von (20.) geht dies zunächst über in

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \frac{k^2 \xi_{13}^2 \frac{2\omega}{n} - 3\xi_{23}^2 \frac{2\omega}{n}}{\xi_{23} \frac{2i\omega}{n} \xi_{23} \frac{2(i+1)\omega}{n}} + 6\xi_{23} \frac{2\omega}{n} - 3\xi_{23} \frac{2i\omega}{n} \xi_{23} \frac{2(i+1)\omega}{n} \right\} = 0.$$

Mit Benutzung von (21.) erhält man weiter

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \xi_{23} \frac{2\omega}{n} \left[- \frac{k^2 \xi_{13}^2 \frac{2\omega}{n} - 3\xi_{23}^2 \frac{2\omega}{n}}{2k^2 \xi_{13}^2 \frac{2\omega}{n} - 3\xi_{23}^2 \frac{2\omega}{n}} + 2 \right] - \xi_{23} \frac{2i\omega}{n} \xi_{23} \frac{2(i+1)\omega}{n} \right\} = 0,$$

$$(25.) \qquad \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \frac{3(1-k^2)\xi_{23} \frac{2\omega}{n}}{3\xi_{23}^2 \frac{2\omega}{n} - 2k^2 \xi_{13}^2 \frac{2\omega}{n}} - \xi_{23} \frac{2i\omega}{n} \xi_{23} \frac{2(i+1)\omega}{n} \right\} = 0.$$

Aus

$$\xi_{23}(u+v) + \xi_{23}(u-v) = \frac{2\xi_{23} u \xi_{23} v}{1 - k^2 \xi_{03}^2 u \xi_{03}^2 v}$$

folgert man

$$\sum_{i=0}^{n-1} \xi_{23} \frac{2i\omega}{n} \xi_{23} \frac{2(i+1)\omega}{n} = \xi_{23} \frac{2\omega}{n} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \xi_{23} \frac{2i\omega}{n} \left(\xi_{23} \frac{2(i-1)\omega}{n} + \xi_{23} \frac{2(i+1)\omega}{n} \right)$$

$$= \xi_{23} \frac{2\omega}{n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\xi_{23} \frac{2\omega}{n} \xi_{23}^2 \frac{2i\omega}{n}}{1 - k^2 \xi_{03}^2 \frac{2\omega}{n} \xi_{03}^2 \frac{2i\omega}{n}}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\xi_{23} \frac{2\omega}{n} \xi_{23}^2 \frac{2i\omega}{n}}{1 - k^2 \xi_{03}^2 \frac{2\omega}{n} \xi_{03}^2 \frac{2i\omega}{n}}.$$

Setzt man dies in (25.) ein, so entsteht:

$$(26.)\quad \sum_{i=0}^{n-1}\left\{\frac{\xi_{23}^2\frac{2i\omega}{n}}{1-k^2\xi_{03}^2\frac{2\omega}{n}\xi_{03}^2\frac{2i\omega}{n}}-\frac{3(1-k^2)}{3\xi_{23}^2\frac{2\omega}{n}-2k^2\xi_{13}^2\frac{2\omega}{n}}\right\}=0.$$

Benutzt man nun die Formeln

$$\xi_{23}(\omega-u)=\frac{1-k^2}{\xi_{23}u},\quad \xi_{03}(\omega-u)=\frac{\xi_{13}u}{\xi_{23}u},$$

so wird (26.) die Formen annehmen

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left\{\frac{1}{\xi_{23}^2\frac{(n-2i)\omega}{n}-k^2\xi_{03}^2\frac{2\omega}{n}\xi_{13}^2\frac{(n-2i)\omega}{n}}-\frac{3}{3\xi_{23}^2\frac{2\omega}{n}-2k^2\xi_{13}^2\frac{2\omega}{n}}\right\}=0,$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left\{\frac{1}{\xi_{23}^2\frac{2\omega}{n}-k^2\xi_{13}^2\frac{2\omega}{n}\xi_{03}^2\frac{(n-2i)\omega}{n}}-\frac{3}{3\xi_{23}^2\frac{2\omega}{n}-2k^2\xi_{13}^2\frac{2\omega}{n}}\right\}=0,$$

$$(27.)\qquad \sum_{i=0}^{n-1}\frac{2-3\xi_{03}^2\frac{(n-2i)\omega}{n}}{\xi_{23}^2\frac{2\omega}{n}-k^2\xi_{13}^2\frac{2\omega}{n}\xi_{03}^2\frac{(n-2i)\omega}{n}}=0.$$

Setzen wir für ungerades $n\,[=2m+1]$

$$n-2i=2r+1$$

und bedenken, dass

$$\xi_{03}^2(2\omega+u)=\xi_{03}^2u,\qquad \xi_{03}^2\frac{(2r+1)\omega}{n}=\xi_{03}^2\frac{(2(n+r)+1)\omega}{n}$$

ist, so wird (27.)

$$(28.)\qquad \sum_{r=0}^{n-1}\frac{2-3\xi_{03}^2\frac{(2r+1)\omega}{n}}{\xi_{23}^2\frac{2\omega}{n}-k^2\xi_{13}^2\frac{2\omega}{n}\xi_{03}^2\frac{(2r+1)\omega}{n}}=0.$$

Addiren wir dies zu (22.), so erhalten wir die nur für ungerades n geltende Gleichung

$$(29.)\qquad \sum_{i=0}^{2n-1}\frac{2-3\xi_{03}^2\frac{i\omega}{n}}{\xi_{23}^2\frac{2\omega}{n}-k^2\xi_{13}^2\frac{2\omega}{n}\xi_{03}^2\frac{i\omega}{n}}=0.$$

Für gerades n $(=2m)$ ist

$$n-2i=2r,$$

und (27.) erhält die Form

$$\sum_{r=-m+1}^{m} \frac{2-3\xi_{03}^2 \frac{2r\omega}{n}}{\xi_{23}^2 \frac{2\omega}{n} - k^2 \xi_{13}^2 \frac{2\omega}{n} \xi_{03}^2 \frac{2r\omega}{n}} = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{2-3\xi_{03}^2 \frac{2r\omega}{n}}{\xi_{23}^2 \frac{2\omega}{n} - k^2 \xi_{13}^2 \frac{2\omega}{n} \xi_{03}^2 \frac{2r\omega}{n}} = 0,$$

ist also für gerades n in (22.) übergeführt.

Man bemerke nun, dass unter Benutzung der Gleichung

$$\xi_{03} \frac{2i\omega}{n} = \xi_{03} \frac{(2n-2i)\omega}{n},$$

falls $i > \frac{n}{2}$ ist, bei ungeradem n die linke Seite von (29.), bei geradem n die von (22.) in eine Anzahl Terme von der Form

$$S(u) = \frac{2-3\xi_{03}^2\left(\frac{\omega}{2}-u\right)}{\xi_{23}^2 \frac{2\omega}{n} - k^2 \xi_{13}^2 \frac{2\omega}{n} \xi_{03}^2\left(\frac{\omega}{2}-u\right)} + \frac{2-3\xi_{03}^2\left(\frac{\omega}{2}+u\right)}{\xi_{23}^2 \frac{2\omega}{n} - k^2 \xi_{13}^2 \frac{2\omega}{n} \xi_{03}^2\left(\frac{\omega}{2}+u\right)}$$

zerfällt, wobei u zwischen Null und $\frac{\omega}{2}$ liegt. Nennt man die unzweifelhaft positiven Nenner der beiden Summanden N_1 und N_2, so ist

$$S(u) = \frac{Z(u)}{N_1 N_2} = \frac{1}{N_1 N_2}\Big\{4\xi_{23}^2 \frac{2\omega}{n} - \Big(3\xi_{23}^2 \frac{2\omega}{n} + 2k^2 \xi_{13}^2 \frac{2\omega}{n}\Big)\Big(\xi_{03}^2\Big(\frac{\omega}{2}-u\Big) + \xi_{03}^2\Big(\frac{\omega}{2}+u\Big)\Big)$$
$$+ 6k^2 \xi_{13}^2 \frac{2\omega}{n} \xi_{03}^2\Big(\frac{\omega}{2}+u\Big)\xi_{03}^2\Big(\frac{\omega}{2}-u\Big)\Big\}.$$

Unter Benutzung der Relation

$$\xi_{03}^2\Big(\frac{\omega}{2}+u\Big) + \xi_{03}^2\Big(\frac{\omega}{2}-u\Big) = 1 + k^2 \xi_{03}^2\Big(\frac{\omega}{2}+u\Big)\xi_{03}^2\Big(\frac{\omega}{2}-u\Big)$$

erhält man mithin

$$Z(u) =$$
$$\xi_{23}^2 \frac{2\omega}{n} - 2k^2 \xi_{13}^2 \frac{2\omega}{n} + k^2 \xi_{03}^2\Big(\frac{\omega}{2}+u\Big)\xi_{03}^2\Big(\frac{\omega}{2}-u\Big)\Big[-3\xi_{23}^2 \frac{2\omega}{n} - (2k^2-6)\xi_{13}^2 \frac{2\omega}{n}\Big],$$

(30.)
$$\begin{cases} Z(u) = 1 - 2k^2 + k^2 \xi_{03}^2 \frac{2\omega}{n} \\ \qquad + k^2 \xi_{03}^2\Big(\frac{\omega}{2}+u\Big)\xi_{03}^2\Big(\frac{\omega}{2}-u\Big)\Big(3-2k^2+(5k^2-6)\xi_{03}^2 \frac{2\omega}{n}\Big). \end{cases}$$

Hiernach erhalten wir

(31ª.) $$Z\Big(\frac{\omega}{2}\Big) = 1 - 2k^2 + k^2 \xi_{03}^2 \frac{2\omega}{n}$$

und, unter Benutzung der Formeln

$$\xi_{03}^2 \frac{\omega}{2} = \frac{1-k'}{k^2}, \quad k^2 \xi_{03}^4 \frac{\omega}{2} = \frac{1-k'}{1+k'};$$

$$Z(0) = 1-2k^2+k^2\xi_{03}^2\frac{2\omega}{n} + \frac{1-k'}{1+k'}\left(3-2k^2+(5k^2-6)\xi_{03}^2\frac{2\omega}{n}\right),$$

$$(31^b.) \qquad Z(0) = \frac{2k'(2k'-1)}{1+k'}\left(1-(1-k')\xi_{03}^2\frac{2\omega}{n}\right).$$

Hieraus kann man nun folgern, dass

$$(32.) \qquad \tfrac{1}{2} < k^2 < \tfrac{3}{4}$$

ist, sobald man das Tetraeder von der Betrachtung ausschliesst, also $n > 3$ nimmt. Da nämlich

$$\frac{d}{du}\left\{\xi_{03}\left(\frac{\omega}{2}+u\right)\xi_{03}\left(\frac{\omega}{2}-u\right)\right\} = -\xi_{03}(2u)\left\{1-k^2\xi_{03}^2\left(\frac{\omega}{2}+u\right)\xi_{03}^2\left(\frac{\omega}{2}-u\right)\right\}$$

ist, so nimmt $\xi_{03}\left(\frac{\omega}{2}+u\right)\xi_{03}\left(\frac{\omega}{2}-u\right)$ fortwährend ab, wenn u von Null bis $\frac{\omega}{2}$ wächst. Deshalb liegt $Z(u)$ zwischen $Z(0)$ und $Z\left(\frac{\omega}{2}\right)$, und es kann die Gleichung (22.) bezw. (29.) nicht stattfinden, wenn Z(0) und $Z\left(\frac{\omega}{2}\right)$ gleiches Vorzeichen haben. Sie sind aber beide positiv, sobald

$$k^2 < \tfrac{1}{2}, \quad k'^2 > \tfrac{1}{2}$$

ist, und beide sind negativ, sobald

$$k' < \tfrac{1}{2}, \quad k^2 > \tfrac{3}{4}; \quad n \geqq 4$$

ist, alsdann ist nämlich

$$Z\left(\frac{\omega}{2}\right) \leqq 1-2k^2+k^2\xi_{03}^2\frac{\omega}{2} = 1-2k^2+1-k' = k'(2k'-1) < 0.$$

Unsere späteren Entwickelungen werden zeigen, dass im Gebiete der P_5 und P_6, wie selbstverständlich im Gebiete der P_3 und P_4, die nothwendigen Bedingungen je ein Polyeder unzweideutig charakterisiren. Allgemein dürfte ein solcher Nachweis schwer zu führen sein. Als ein gewisser Ersatz kann der Satz gelten, dass, falls die Gleichung (22.) mehr als eine Wurzel besitzt, die kleinste unter ihnen das gesuchte Polyeder charakterisirt. Offenbar muss nämlich bei demselben auch die Grösse

$$U = \frac{F^3}{V^2} = \frac{9\sin^3\psi}{\sin^2\chi}\,\frac{\left(\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{\cos\varphi_i\cos\varphi_{i+1}}\right)^3}{\left(\sum_{i=1}^{n-2}\operatorname{tg}\varphi_i\operatorname{tg}\varphi_{i+1}\right)^2}$$

möglichst klein werden. Bei den Polyedern, unter denen allein wir zu wählen haben, gilt aber die Gleichung (19.), sodass für sie

$$U = \frac{81}{4}\frac{\sin^2\chi\cos^2\psi}{\sin\psi\cos^2\chi}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\cos\varphi_i\cos\varphi_{i+1}} = \frac{81}{4}\frac{\xi_{03}\frac{2\omega}{n}\,\xi_{23}^2\frac{2\omega}{n}}{k\xi_{13}^2\frac{2\omega}{n}}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{\xi_{23}\frac{2i\omega}{n}\,\xi_{23}\frac{2(i+1)\omega}{n}}$$

ist. Die Gleichung (24.) führt, da $\xi_{03}\left(\frac{0\omega}{n}\right)$ und $\xi_{03}\left(\frac{2n\omega}{n}\right)$ verschwinden, auf die Umformung

$$U = \frac{243}{4}\frac{k\xi_{03}\frac{2\omega}{n}\,\xi_{23}^2\frac{2\omega}{n}}{\xi_{13}^2\frac{2\omega}{n}}\sum_{i=1}^{n-2}\frac{\xi_{03}^2\frac{2i\omega}{n}\,\xi_{03}^2\frac{2(i+1)\omega}{n}}{\xi_{23}\frac{2i\omega}{n}\,\xi_{23}\frac{2(i+1)\omega}{n}},$$

$$U = \frac{243}{4}\frac{k\xi_{03}\frac{2\omega}{n}}{\xi_{13}^2\frac{2\omega}{n}}\sum_{i=1}^{n-2}\frac{\xi_{23}\frac{2\omega}{n}}{\xi_{23}\frac{2i\omega}{n}}\cdot\frac{\xi_{23}\frac{2\omega}{n}}{\xi_{23}\frac{2(i+1)\omega}{n}}\cdot\xi_{03}^2\frac{2i\omega}{n}\,\xi_{03}^2\frac{2(i+1)\omega}{n}.$$

Sind nun α und β Unveränderliche, welche den Ungleichungen

$$0 \leqq \alpha \leqq \beta \leqq 2-\alpha \leqq 2$$

genügen, so werden wir sofort zeigen, dass die Functionen

$$\xi_{03}(\beta\omega), \quad \frac{1}{\xi_{13}(\alpha\omega)}, \quad \frac{\xi_{23}(\alpha\omega)}{\xi_{23}(\beta\omega)}$$

fortwährend zunehmen, wenn k von 0 bis 1 zunimmt. Dies vorausgesetzt, wird auch U fortwährend wachsen, mithin das kleinste U die kleinste Wurzel der Gleichung (22.) bestimmen.

Um die erwähnten Hülfssätze zu zeigen, gehen wir von dem Ausdruck des Differentials $d'\sigma_\lambda(u, \omega, \omega')$ von $\sigma_\lambda(u, \omega, \omega')$ aus, wenn diese Grösse als Function von ω und ω' betrachtet wird. Dasselbe lautet, wie Herr *Weierstrass* gezeigt hat*), folgendermassen

$$2d'\sigma_\lambda = -2u\sigma_\lambda' u d_1 - (\sigma_\lambda'' u + (\tfrac{1}{12}g_2u^2 + e_\lambda)\sigma_\lambda u)d_2, \qquad (\lambda = 1, 2, 3)$$

d_1 und d_2 sind aus den Gleichungen

$$d(e_1-e_2) = -2(e_1-e_2)(d_1-e_3d_2); \quad d(e_1-e_3) = -2(e_1-e_3)(d_1-e_2d_2)$$

zu entnehmen, so dass in unserem speciellen Fall

$$kdk = (1-k^2)(d_1-e_3d_2); \quad 0 = d_1-e_2d_2,$$

*) Vergl. die Abhandlung: ***Zur Theorie der elliptischen Functionen;*** Sitzungsberichte der Königl. Preussischen Akademie der Wissenschaften, Sitzung vom 27. April 1872.

(33.) $$d_2 = \frac{dk}{k(1-k^2)}, \quad d_1 = \frac{(-1+2k^2)dk}{3k(1-k^2)}$$

ist. Ferner ist bei uns auch u oder $\alpha\omega$ eine Function von k und mithin

$$d\sigma_\lambda u = \sigma'_\lambda u . \alpha d\omega + d'\sigma_\lambda u.$$

Auch $d\omega$ ist in d_1 und d_2 linear und homogen:

$$\alpha d\omega = \alpha\omega d_1 + \alpha\eta d_2 = u d_1 + \alpha\eta d_2.$$

Demzufolge ist

$$2 d\sigma_\lambda u = -\left(\sigma''_\lambda u + \left(\tfrac{1}{12} g_2 u^2 + e_\lambda\right)\sigma_\lambda u - 2\alpha\eta\sigma'_\lambda u\right) d_2.$$

Hieraus folgt

$$2 d\xi_{23} u = -\left\{\frac{\sigma_3 u \sigma''_2 u - \sigma_2 u \sigma''_3 u}{\sigma_3^2 u} + (e_2 - e_3)\frac{\sigma_2 u}{\sigma_3 u} - 2\frac{\sigma_3 u \sigma'_2 u - \sigma_2 u \sigma'_3 u}{\sigma_3^2 u}\cdot\alpha\eta\right\} d_2.$$

Wir benutzen die bekannten Relationen

$$\xi'_{23} u = \frac{\sigma_3 u \sigma'_2 u - \sigma_2 u \sigma'_3 u}{\sigma_3^2 u} = -(e_2 - e_3)\xi_{03} u \xi_{13} u = -k^2 \xi_{03} u \xi_{13} u,$$

$$\xi''_{23} u = \frac{\sigma_3 u \sigma''_2 u - \sigma_2 u \sigma''_3 u}{\sigma_3^2 u} - 2\frac{\sigma_3 u \sigma'_2 u - \sigma_2 u \sigma'_3 u}{\sigma_3^2 u}\frac{\sigma'_3 u}{\sigma_3 u} = -k^2 \xi_{23} u (\xi_{13}^2 u - \xi_{03}^2 u),$$

$$\frac{\sigma'_3 u}{\sigma_3 u} - \frac{\sigma' u}{\sigma u} = -\xi_{13} u \xi_{20} u$$

und erhalten augenblicklich

(34.) $$d\xi_{23} u = -k^2 \xi_{03} u \xi_{13} u \left[\frac{\xi_{23} u}{\xi_{03} u \xi_{13} u} - \left(\frac{\sigma' u}{\sigma u} - \alpha\eta\right)\right] d_2.$$

Weiter folgt aus dem Additionstheorem von $\frac{\sigma' u}{\sigma u}$, wenn man die Argumente ω und $-u(=-\alpha\omega)$ einsetzt und $1-\alpha$ mit α_1, $\alpha_1\omega$ mit u_1 bezeichnet,

$$\frac{\sigma'(\alpha_1\omega)}{\sigma(\alpha_1\omega)} = \frac{\sigma'\omega}{\sigma\omega} - \frac{\sigma'(\alpha\omega)}{\sigma(\alpha\omega)} + \tfrac{1}{2}\frac{\wp'(\alpha\omega)}{e_1 - \wp(\alpha\omega)},$$

(35.) $$-\tfrac{1}{2}\frac{\wp' u}{\wp u - e_1} = \frac{\sigma' u_1}{\sigma u_1} - \alpha_1\eta + \frac{\sigma' u}{\sigma u} - \alpha\eta = \frac{\xi_{23} u}{\xi_{03} u \xi_{13} u}.$$

Demnach erhalten wir definitiv

(36.) $$\frac{d\xi_{23} u}{dk} = \frac{k}{1-k^2}\xi_{03} u \xi_{13} u \left(\alpha_1\eta - \frac{\sigma' u_1}{\sigma u_1}\right).$$

Lässt man α_1 das Intervall von 0 bis 1 durchlaufen, was völlig hinreicht, so geht der letzte Factor rechter Hand von $-\infty$ bis 0, da die anderen Factoren aber positiv sind, so ist $\frac{d\xi_{23} u}{dk}$ negativ, und $\xi_{23}(\alpha\omega)$ nimmt fortwährend ab, wenn k das Intervall von 0 bis 1 durchläuft.

Wollen wir $\frac{\xi_{23}(\alpha\omega)}{\xi_{23}(\beta\omega)}$ für Werthe von β untersuchen, die zwischen α und $2-\alpha$ liegen, so genügt es,

$$0 < \alpha < \beta < 1$$

zu nehmen, da

$$\xi_{23}(2-\alpha)\omega = \xi_{23}(\alpha\omega), \quad \xi_{23}(2-\beta)\omega = \xi_{23}(\beta\omega)$$

ist. Mit Hülfe von (36.) ergiebt sich nun, wenn

$$\beta\omega = v, \quad (1-\beta)\omega = \beta_1\omega = v_1$$

ist,

$$\frac{d}{dk}\left\{\frac{\xi_{23}u}{\xi_{23}v}\right\} = \frac{k}{1-k^2}\frac{1}{\xi_{23}^2 v}\left\{\xi_{23}v\,\xi_{03}u\,\xi_{13}u\left(\alpha_1\eta - \frac{\sigma' u_1}{\sigma u_1}\right) - \xi_{23}u\,\xi_{03}v\,\xi_{13}v\left(\beta_1\eta - \frac{\sigma' v_1}{\sigma v_1}\right)\right\}$$

$$= \frac{k}{1-k^2}\frac{\xi_{03}u\,\xi_{13}u\,\xi_{03}v\,\xi_{13}v}{\xi_{23}^2 v}\left\{\frac{\xi_{23}v}{\xi_{03}v\,\xi_{13}v}\left(\alpha_1\eta - \frac{\sigma' u_1}{\sigma u_1}\right) - \frac{\xi_{23}u}{\xi_{03}u\,\xi_{13}u}\left(\beta_1\eta - \frac{\sigma' v_1}{\sigma v_1}\right)\right\}.$$

Nach (35.) geht dies weiter über in

$$(37.)\quad \left\{\frac{d}{dk}\left\{\frac{\xi_{23}u}{\xi_{23}v}\right\} = \frac{k}{1-k^2}\frac{\xi_{03}u\,\xi_{13}u\,\xi_{03}v\,\xi_{13}v}{\xi_{23}^2 v}\left\{\left(\frac{\sigma' u}{\sigma u} - \alpha\eta\right)\left(\frac{\sigma' v_1}{\sigma v_1} - \beta_1\eta\right) - \left(\frac{\sigma' v}{\sigma v} - \beta\eta\right)\left(\frac{\sigma' u_1}{\sigma u_1} - \alpha_1\eta\right)\right\};\right.$$

die Grösse $\frac{\sigma' v_1}{\sigma v_1} - \beta_1\eta$ nimmt nun von 0 bis ∞ hin fortwährend zu, wenn $\beta(=1-\beta_1)$ von 0 bis 1 wächst, während dann $\frac{\sigma' v}{\sigma v} - \beta\eta$ fortwährend abnimmt. Nachdem daher der letzte Factor rechts für $\beta = \alpha$ verschwunden ist, ist er für $1 > \beta > \alpha$ sicher positiv, die anderen Factoren rechter Hand sind gewiss positiv, und folglich nimmt $\frac{\xi_{23}(\alpha\omega)}{\xi_{23}(\beta\omega)}$ mit k fortwährend zu, wenn α zwischen 0 und 1, β zwischen α und $2-\alpha$ liegt.

Schliesslich erhalten wir mit Hülfe der Formel

$$-k^2\xi_{03}u\frac{d\xi_{03}u}{dk} - k\xi_{03}^2 u = \xi_{23}u\frac{d\xi_{23}u}{dk} = -\frac{k}{1-k^2}\xi_{03}u\,\xi_{13}u\,\xi_{23}u\left(\frac{\xi_{23}u}{\xi_{03}u\,\xi_{13}u} - \left(\frac{\sigma' u}{\sigma u} - \alpha\eta\right)\right)$$

aus (34.):

$$\frac{d\xi_{03}u}{dk} = \frac{\xi_{13}u\,\xi_{23}u}{k(1-k^2)}\left(\frac{\xi_{13}u}{\xi_{03}u\,\xi_{23}u} - \left(\frac{\sigma' u}{\sigma u} - \alpha\eta\right)\right).$$

Aus dem Additionstheorem von $\frac{\sigma' u}{\sigma u}$ folgern wir ferner bei Einsetzung der Argumente $\omega+\omega'$ und $-u$ $(=-\alpha\omega)$:

$$\frac{\sigma'(\omega'+u_1)}{\sigma(\omega'+u_1)} = \eta+\eta'-\frac{\sigma' u}{\sigma u}+\tfrac{1}{2}\frac{\wp' u}{e_2-\wp u}$$

oder

$$\frac{\sigma'(\omega'+u_1)}{\sigma(\omega'+u_1)}-(\eta'+\alpha_1\eta)+\frac{\sigma' u}{\sigma u}-\alpha\eta = -\tfrac{1}{2}\frac{\wp' u}{\wp u-e_2} = \frac{\xi_{13}u}{\xi_{03}u\,\xi_{23}u},$$

woraus die Formel hervorgeht

$$\frac{d\xi_{03}u}{dk} = \frac{\xi_{13}u\,\xi_{23}u}{k(1-k^2)}\left[\frac{\sigma'(\omega'+u_1)}{\sigma(\omega'+u_1)}-(\eta'+\alpha_1\eta)\right]. \tag{38.}$$

Es genügt, α zwischen 0 und 1 zu nehmen. Alsdann könnte nur der letzte Factor der rechten Seite negativ sein. Derselbe verschwindet aber für $\alpha_1 = 0$ und $\alpha_1 = 1$ und hat zur Ableitung nach α_1 eine Function, $-[\omega\wp(\omega'+u_1)+\eta]$, die fortwährend abnimmt, wenn α_1 von 0 bis 1 wächst, also nur einmal vom Positiven zum Negativen übergeht. Daraus folgt, dass auch der letzte Factor positiv ist und $\xi_{03}(\alpha\omega)$ beständig zunimmt, wenn man k von 0 bis 1 wachsen lässt.

Das nunmehr genau charakterisirte Ideal wird ein eigentliches Polyeder, wenn der Kantenwinkel $[B_1B_2]$ kleiner als 2π ist, also falls

$$(n-2)\operatorname{am}\left(\frac{2\omega}{n},\ k\right) = (n-2)\arcsin\xi_{03}\frac{2\omega}{n} < 2\pi$$

ist. Nach dem Obigen (32.) erhalten wir für den gesuchten Winkel die beiden Grenzen ($n > 3$)

$$(n-2)\operatorname{am}\left(\frac{2\omega}{n},\ \sqrt{\tfrac{1}{2}}\right) < [B_1B_2] < (n-2)\operatorname{am}\left(\frac{2\omega}{n},\ \sqrt{\tfrac{3}{4}}\right).$$

Man zeigt nun leicht, dass bei wachsendem n und festem k die Grösse $(n-2)\operatorname{am}\frac{2\omega}{n}$ fortwährend zunimmt und der Grenze 2ω zustrebt. Dies vorausgesetzt, ist also

$$[B_1B_2] < (2\omega)_{k=\sqrt{\frac{3}{4}}}.$$

Hierauf beruht es, dass unser streng nachgewiesenes Ideal dem Gebiet der eigentlichen P_n angehört, denn es ist bekanntlich

$$\omega < \frac{\pi}{2k'},\quad (\omega)_{k=\sqrt{\frac{3}{4}}} < \pi,\quad [B_1B_2] < 2\pi.$$

Ist ferner n_2 bezw. n_1 die kleinste bezw. grösste ganze Zahl, für welche

$$(n_2-2)\operatorname{am}\left(\frac{2\omega}{n_2},\ \sqrt{\tfrac{1}{2}}\right) > \pi,\quad (n_1-2)\operatorname{am}\left(\frac{2\omega}{n_1},\ \sqrt{\tfrac{3}{4}}\right) < \pi$$

ist, so wird das Polyeder sicher allseitig convex sein, falls

$$n \leqq n_1$$

ist, sicher concav längs B_1B_2, falls

$$n \geqq n_2$$

ist. In dem Intervall

$$n_1 < n < n_2$$

bleibt der Charakter des Polyeders unentschieden. Eine kurze Rechnung liefert das Ergebniss

$$n_2 = 14, \quad n_1 = 8^*).$$

Fassen wir die Ergebnisse unserer Untersuchung zusammen, so erhalten wir genau den in der Einleitung gegebenen Satz. Nachdem k als der kleinste Werth fixirt ist, welcher der Gleichung (22.) genügt, ist das Ideal durch das Gleichungssystem (17.) unzweideutig bestimmt. Die geometrischen Eigenschaften sind in (11.), (12.), (13.) und (18.), (18^a.), (18^b.) erwiesen. Unsere Schlussbemerkungen ziehen endlich aus (32.) das Resultat, dass unser Ideal ein eigentliches, an allen Kanten ausser B_1B_2 convexes Polyeder ist, längs B_1B_2 aber sicher convex für $n \leqq 8$, sicher concav für $n \geqq 14$ ist. Da dem Continuum des Lehrsatzes (3.) alle Polyeder P_n von gleichem Volumen, angehören, die höchstens längs B_1B_2 concav sind, so ist der in der Einleitung ausgesprochene Satz vollständig bewiesen. Einfache Betrachtungen, denen ähnlich, die auf den Lehrsatz 3.) führen, würden zeigen, dass ein auch ausserhalb B_1B_2 concaves P_n ebenfalls kleinere Oberfläche besitzt als das Ideal, wenn es dasselbe Volumen hat.

IV.

An der Hand der erwiesenen Eigenschaften wollen wir nun das Ideal der Gattungen P_5 und P_6 auf algebraischem Wege fixiren. Indem man benutzt, dass $\xi_{23}\frac{2i\omega}{n}$ eine algebraische Function von k ist, könnte man dieses Ziel durch Umformung der Gleichung (22.) erreichen. Einfacher gelangt man aber folgendermassen zum Ziel. Ein P_5 ist vollständig bestimmt,

---

*) Unter Benutzung des § 45 der ***Formeln und Lehrsätze zur Anwendung der elliptischen Functionen***, herausgegeben von Herrn ***H. A. Schwarz***, Göttingen 1883, erhält man

$$12.\mathrm{am}\left(\frac{2\omega}{14}, \sqrt{\tfrac{1}{2}}\right) = 181^\circ 4'; \quad 6.\mathrm{am}\left(\frac{2\omega}{8}, \sqrt{\tfrac{3}{4}}\right) = 179^\circ 2'.$$

Auf dieses Werk verweisen wir auch hinsichtlich der oben angewendeten Formeln.

wenn die Winkel

$$\psi = \varphi_1 = \psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = \varphi_4 \quad \text{und} \quad \varphi_2 = \varphi_3$$

bekannt sind. Man gewinnt eine Gleichung für diese beiden Grössen, wenn man die Gleichheit von χ_1 und χ_2 ausdrückt, eine zweite, wenn man die Gleichung (23.) auf unseren speciellen Fall anwendet. Nun ist

$$(39.) \qquad \frac{\cos\psi - \cos\psi\cos\varphi_2}{\sin\psi\sin\varphi_2} = \cos\chi_1 = \cos\chi_2 = \frac{\cos\psi - \cos\varphi_2^2}{\sin^2\varphi_2}.$$

Wenn wir quadriren und

$$x = \cos\psi, \quad y = \cos\varphi_2$$

setzen, kommt

$$(1-y)^2(1-y^2)x^2 = (x-y^2)^2(1-x^2)$$

oder

$$(y-x)(2y^2x^2 - y^3 - y^2x - yx^2 - x^3 + 2yx) = 0.$$

Nun ist, (18^b.),

$$\varphi_1 < \varphi_2 = \varphi_3 > \varphi_4; \quad \cos\varphi_1 = x > y = \cos\varphi_2,$$

folglich erhält man nach Fortlassung des Factors $y-x$ einfacher

$$(40.) \qquad 2y^2x^2 - y^3 - y^2x - yx^2 - x^3 + 2yx = 0.$$

Die gewonnene Gleichung könnte ausser (39.) auch die Folge

$$\cos\chi_1 = -\cos\chi_2$$

haben. Dies ist ausgeschlossen, falls

$$1 > x > y$$

ist, wie es in unserem Fall sein muss. Die Gleichung (23.) lautete

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\cos\varphi_i\cos\varphi_{i+1}} \left(\tfrac{1}{3} - \frac{\sin^2\chi}{\sin^2\psi}\sin^2\varphi_i\sin^2\varphi_{i+1}\right) = 0;$$

wenn man im $i$ten Gliede, $(i = 1, 2, \ldots, n-2)$,

$$\sin^2\chi = \frac{\sin^2\varphi_i\sin^2\varphi_{i+1} - (\cos\psi - \cos\varphi_i\cos\varphi_{i+1})^2}{\sin^2\varphi_i\sin^2\varphi_{i+1}}$$

setzt, und bedenkt, dass φ_0 und φ_n verschwinden, so ergiebt sich in unserem Falle:

$$2\,\frac{1-2\cos^2\psi-\cos^2\varphi_2+2\cos^2\psi\cos\varphi_2}{\cos\psi\cos\varphi_2} + \frac{1-2\cos^2\varphi_2-\cos^2\psi+2\cos\psi\cos^2\varphi_2}{\cos^2\varphi_2}$$

$$= \frac{\sin^2\psi}{3}\left(\frac{2}{\cos\psi\cos\varphi_2} + \frac{2}{\cos\psi} + \frac{1}{\cos^2\varphi_2}\right).$$

Mit Einführung von x und y bekommt man nach gehöriger Zusammen-

ziehung

$$10x^2y^2-3y^3-3y^2x-5yx^2-x^3-y^2+2y+x = 0.$$

Subtrahirt man die mit 5 multiplicirte Gleichung (40.), so entsteht

$$(41.) \qquad 2y^3+2y^2x+4x^3-y^2-10xy+2y+x = 0.$$

Es handelt sich um solche Lösungen von (40.) und (41.), bei denen x und y mit Ausschluss der Grenzen zwischen 0 und 1 liegen und ausserdem $x > y$ ist. Die Werthepaare $x=0$, $y=0$ und $x=1$, $y=1$, die sich ergeben, sind also auszuschliessen; jedes dieser Werthepaare zählt doppelt, weil für sie die linke Seite von (40.) mit ihren beiden Ableitungen verschwindet. Eines der acht übrigen gemeinschaftlichen Werthepaare bestimmt unser Ideal.

Setzen wir nun

$$x = ty,$$

so werden (40.) und (41.) nach Abscheidung von y^2 und y

$$(42.) \qquad 2t^2y^2-(t^3+t^2+t+1)y+2t = 0,$$

$$(43.) \qquad 2(2t^3+t+1)y^2-(10t+1)y+t+2 = 0.$$

Die Elimination von y nach der bekannten Regel liefert die Gleichung zehnten Grades

$$[t^2(10t+1)-(2t^3+t+1)(t^3+t^2+t+1)][(t^3+t^2+t+1)(t+2)-2t(10t+1)]$$
$$= 2[t^2(t+2)-2t(2t^3+t+1)]^2,$$

von der 1 eine Doppelwurzel sein muss. Man erhält zuerst

$$2t^{10}+8t^9+7t^8-45t^7-60t^6+146t^5-18t^4-42t^3-5t^2+5t+2 = 0$$

und, nachdem der Factor $(t-1)^2$ abgelöst ist,

$$(44.) \qquad 2t^8+12t^7+29t^6+t^5-87t^4-29t^3+11t^2+9t+2 \equiv \Phi(t) = 0.$$

Nun ist $\Phi(t)$ für sehr grosse und sehr kleine Werthe von t positiv, für den Werth 1 aber negativ, gleich -50. Andererseits begegnen wir in der Reihe der Coefficienten nur an zwei Stellen Zeichenwechseln, so dass (44.) genau zwei positive Wurzeln besitzt. Eine von ihnen, t_1, liegt oberhalb 1. Setzen wir diesen Werth in (42.) und (43.) ein und berechnen den zugehörigen Werth von y, y_1 aus ihnen, so ist für das Ideal, dessen Existenz unzweideutig feststeht,

$$\cos\varphi_2 = y_1, \quad \cos\psi = y_1 t_1.$$

Ausserdem sehen wir, dass kein anderes Polyeder P_5 allen nothwendigen Bedingungen genügt. Aus unseren allgemeinen Bemerkungen wissen wir, dass das Ideal allseitig convex ist. Diese Thatsache lässt sich aber auch algebraisch leicht nachweisen. Ist der Körper convex, also

$$\chi < \frac{\pi}{3}, \quad \cos\chi > \frac{1}{2},$$

so erhält man aus

$$\cos\psi = \cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2\cos\chi$$

die Beziehung

$$\cos\psi > \cos^2\varphi_2 + \tfrac{1}{2}\sin^2\varphi_2,$$
$$y_1^2 - 2x_1 + 1 < 0.$$

Entnimmt man y_1^2 und $x_1 = y_1 t_1$ aus (42.) und (43.), so folgt nach kurzer Zwischenrechnung, dass im Falle allseitiger Convexität für die oberhalb 1 liegende Wurzel t_1 von (44.)

$$\frac{4t_1^6 - 12t_1^5 + 9t_1^4 - 15t_1^3 + 11t_1^2 + 3t_1}{2t_1^6 + 2t_1^5 + 3t_1^4 - 6t_1^3 + t_1^2 + 2t_1 + 1} < 0$$

ist. Der Nenner ist unzweifelhaft positiv, aus dem Zähler scheidet der positive Factor $t_1^2 - t_1$ aus, und die Bedingung wird mithin einfacher

$$4t_1^4 - 8t_1^3 + t_1^2 - 14t_1 - 3 < 0.$$

Dies ist sicher erfüllt, denn es ist, wie leicht zu ersehen*),

$$2 > t_1 > 1, \quad 4t_1^4 - 8t_1^3 < 0, \quad t_1^2 - 14t_1 - 3 < 0.$$

Für das ideale P_6 oder $\{B_1, B_2; A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ führen wir als Veränderliche die beiden Winkel

$$\psi = \varphi_1 = \psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = \psi_4 = \varphi_5; \quad \varphi_2 = \varphi_4$$

ein; da

$$\eta_3 = \zeta_3 = \frac{\pi}{2}, \quad \cos\varphi_3 = \cos\varphi_2 . \cos\psi$$

---

*) Genauer hat man

$t_1 = 1{,}396\,816, \quad \psi = 35^\circ 40' 53{,}3'', \quad \varphi_2 = 54^\circ 26' 33{,}6'', \quad \chi = 44^\circ 14' 44{,}6''.$

Für das später zu behandelnde P_6 ist

$y_1 = \cos\varphi_2 = 0{,}660442, \quad \varphi_2 = 48^\circ 39' 59{,}0'', \quad \psi = 29^\circ 31' 48{,}4'', \quad \chi = 37^\circ 1' 52{,}1''.$

ist, so haben wir durch ihre Angabe P_6 völlig festgelegt. Wir erhalten zuerst die Gleichung

$$\frac{\cos\psi-\cos\psi\cos\varphi_2}{\sin\psi\sin\varphi_2}=\cos\chi_1=\cos\chi=\cos\chi_2=\frac{\cos\psi-\cos\varphi_2\cos\varphi_3}{\sin\varphi_2\sin\varphi_3}$$

oder, wenn quadrirt und der Factor $\cos^2\psi$ abgesondert wird,

$$\begin{aligned}(1-y)^2(1-x^2y^2)&=(1-y^2)^2(1-x^2),\\(1-x^2y^2)&=(1+y)^2(1-x^2),\\2y+y^2&=x^2(1+2y).\end{aligned}\qquad(45.)$$

Hierbei ist wieder

$$y=\cos\varphi_2,\quad x=\cos\psi,\quad 0<y<x<1.\qquad(18^a.)$$

Die Gleichung (23.) wird für unseren Specialfall

$$\frac{\sin^2\chi}{\sin^2\psi}\left\{\frac{\sin^2\psi\sin^2\varphi_2}{\cos\psi\cos\varphi_2}+\frac{\sin^2\varphi_2\sin^2\varphi_3}{\cos\varphi_2\cos\varphi_3}\right\}=\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{\cos\psi}+\frac{1}{\cos\varphi\cos\varphi_2}+\frac{1}{\cos\varphi_2\cos\varphi_3}\right\};$$

setzen wir

$$\sin\chi=\frac{\sin\psi}{\sin\varphi_3}=\frac{\sin\psi}{\sqrt{1-\cos^2\varphi_2\cos^2\varphi_3}},$$

so folgt nach einigen Zwischenformen die Gleichung:

$$x^2(4y^4+4y^3-2y^2-3y)-(3y^3+4y^2-2y-2)=0.\qquad(46.)$$

Eliminirt man x^2 aus (45.) und (46.), so bekommt man

$$(4y^4+4y^3-2y^2-3y)(y^2+2y)-(3y^3+4y^2-2y-2)(2y+1)=0$$

oder

$$4y^6+12y^5-18y^3-6y^2+6y+2=0$$

oder endlich

$$2(y-1)(y+1)^2(2y^3+4y^2-2y-1)=0.$$

Das streng nachgewiesene Ideal gehört zu einem y zwischen den Grenzen 0 und 1. Dasselbe ist also mit der einzigen positiven Wurzel y_1 der Gleichung

$$2y^3+4y^2-2y-1=0\qquad(47.)$$

identisch, deren zugehöriger Werth x_1 dann aus (45.) entspringt. Man sieht, dass auch hier nur das eine Ideal allen nothwendigen Bedingungen genügt.

Um auch algebraisch festzustellen, dass das Polyeder allseitig convex ist, benutzen wir die Gleichung

$$\operatorname{tg}\chi = \frac{\operatorname{tg}\psi}{\sin\varphi_2}.$$

Das Polyeder ist also allseitig convex, wenn

$$\chi < \frac{\pi}{4}, \quad 1 > \frac{\operatorname{tg}\psi}{\sin\varphi_2}, \quad 1 - x_1^2(2-y_1^2) < 0$$

ist. Wegen (45.) wird diese Bedingung:

$$(1+2y_1)-(2y_1+y_1^2)(2-y_1^2) < 0,$$
$$(y_1^2-1)(y_1^2+2y_1-1) < 0.$$

Da y_1 zwischen den Grenzen $\frac{1}{2}$ und 1 liegt, so ist diese Bedingung sicher erfüllt.

Die Punktsysteme auf der Geraden und ihre Anwendung zur Erzeugung der algebraischen ebenen Curven.

(Von Herrn *Robert Schumacher* in Augsburg.)

Der Zweck dieser Abhandlung ist, eine geometrische Methode darzulegen, welche in ihrem Grunde frei von Sätzen, die nur rechnerisch erwiesen sind, alle der Geometrie der Lage zugehörigen Fragen zu behandeln im Stande wäre.

Nachdem die Arbeit bei diesem Journale eingereicht war, ist die von der Berliner Akademie im Jahre 1886 preisgekrönte Schrift*) von Herrn *Kötter*: „Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der algebraischen ebenen Curven“ im Drucke erschienen. Dieselbe giebt zum Zwecke einer geometrischen Curventheorie im Grunde die nämliche Methode wie die, welche hier dargelegt werden soll, jedoch in anderer Entwickelung. Herr *Kötter* geht nämlich von der Repräsentation der imaginären Elemente eines einförmigen Gebildes durch die Punkte einer Ebene aus und erzeugt die Involutionen durch Reihen von projectivischen Beziehungen. Die Involutionen vereinigen sich zu Systemen, „Involutionsnetzen“. Durch „projectivische“ Beziehung einstufiger Netze von Involutionen werden die Involutionen höheren Ranges abgeleitet, welche analytisch durch algebraische Gleichungen der Form $f(x, y) = 0$ mit dem Parameter y dargestellt werden.

In der vorliegenden Abhandlung bilden die Elemente der Methode Regeln, durch welche zu irgend $n-1$ Punkten einer Geraden ein $n$ter Punkt bestimmt wird. Diese Regeln werden durch $(n-1)$-dimensionale Reihen von Gruppen aus n Punkten (von denen auch beliebig viele zusammenfallen

*) Abhandl. der Kgl. Akademie der Wissensch. zu Berlin vom Jahre 1887. Diese Abhandlung geht in der Anwendung der hier vorgeführten Methode viel weiter, als die vorliegende. Dem Verfasser war bis nach Einreichung seiner Arbeit die Stellung der betreffenden Preisfrage unbekannt gewesen.

können) vorgestellt (Involutionsnetze). Die Gesammtheit der Gruppen von je n (reellen) Punkten einer Geraden oder vielmehr der Regeln, welche zu $n-1$ Punkten den $n$ten Punkt bestimmen, bildet das n-Punktesystem der Geraden. Die Regeln verbinden sich zu einfachen Vereinen verschiedener Stufe. Ein Verein $(n-1)$-ter Stufe im Falle des n-Punktesystems liefert einen neuen Begriff von „Gruppe des n-Punktesystems" als des Resultates der durch den Verein dargestellten Operationen (alle hier vorkommenden Operationsregeln gehen nur auf die Bestimmung von Punkten aus); eine solche Gruppe kann weniger als n Punkte enthalten. Eine Reihe solcher Vereine von Operationen giebt als Resultat die gewöhnliche Involution erster Stufe.

Die Herleitung der Regeln, welche durch $(n-1)$-dimensionale Reihen vorgestellt werden, geschieht mittelst der $(n-2)$-stufigen Reihen des $(n-1)$-Punktesystems. Den vollständigen Gruppen desselben (welche je $n-1$ Punkte enthalten) wird ein und derselbe Punkt des geraden Trägers beigesellt. Man erhält so eine specielle Regel, welche zu je $n-1$ Punkten immer denselben Punkt bestimmt. Es giebt eine Schaar von einfach unendlich vielen singulären Reihen, welche derartige specielle Regeln repräsentiren. Eine allgemeine $(n-1)$-dimensionale Reihe ist durch ihre Beziehung zu dieser Schaar bestimmt.

Charakteristisch für die Handhabung der vorgestellten Methode in dieser Abhandlung ist die Rolle, welche die Schaar der singulären Reihen spielt. Aus den speciellen Reihen wird die allgemeine Reihe abgeleitet. Jedes der Geometrie der Lage angehörige Problem führt auf eine Frage nach dem Verhalten der singulären Reihen im behandelten Falle. Die Reihen bilden nämlich die Elemente der Methode. Die Resultate der Operationen sind Punkte. Die speciellen Reihen stehen aber je mit einem Punkte in Zusammenhang und sind somit die unmittelbaren Quellen der Resultate.

Die Aufgabe zweiten Grades in der Geometrie führt auf die Frage nach den gemeinsamen Punkten zweier in einander liegenden projectiven Punktreihen; die Aufgabe dritten Grades führt auf die Frage nach den gemeinsamen Punkten in einander liegender collinearer Punktfelder; die Aufgabe vierten Grades führt auf collineare räumliche Systeme. Auf der geraden Linie wird das Punktfeld durch das Zweipunktesystem und das räumliche System durch das Dreipunktesystem vertreten. Den Raum von n Dimensionen vertritt das n-Punktesystem mit seinen Elementen, den $(n-1)$-dimensionalen Reihen, welche zu den Involutionen zweiten Grades die eigentlichen Analoga bilden. Eine Aufgabe $n$ten Grades führt so auf die Betrachtung zweier in

gewisser Beziehung zu einander stehenden n-Punktesysteme mit demselben Träger.

Die Normcurven*) $n$ter Ordnung im n-dimensionalen Raume haben die Eigenschaft, dass sie zur Bestimmung der Lage der Gebilde des Raumes dienen können. Irgend n Punkte der Curve bestimmen einen $(n-1)$-dimensionalen Raum eindeutig, und umgekehrt bestimmt ein solcher Raum in der analytischen Ausdrucksweise n Punkte der Curve. Das zur Normcurve reciproke Gebilde, „der Normbüschel", dient zur Lagenbestimmung der Punkte im n-dimensionalen Raume. Während in diesem Raume alle Normbüschel gleichberechtigt erscheinen, ist im n-Punktesystem unter den Büscheln von Reihen, welche diesen Normbüscheln entsprechen, einer ausgezeichnet, nämlich der der singulären Reihen. Dieser Umstand fordert dazu auf, die Betrachtung des n-Punketsystems an diesen Büschel zu heften. — Durch Beziehungen von n-Punktesystemen, welche der collinearen oder reciproken Verwandtschaft räumlicher Systeme ($n$ter Stufe) entsprechen, wird die Untersuchung der Aggregate des n-Punktesystems, welche den Normbüscheln bezw. Normcurven analog sind, auf die Untersuchung des Büschels der singulären Reihen geführt. Es gestaltet sich, wie sich zeigen wird, diese Untersuchung sehr einfach, indem die Eigenschaften dieses Büschels schon an der passend gewählten Bezeichnung abgelesen werden können. Die den Normcurven entsprechenden Gruppenaggregate sind die Involutionen höheren Ranges; sie heissen in dieser Abhandlung „Ketten"**). Unter den Ketten wird eine Art besonders hervorgehoben werden, die „Normalketten", welche hier die Rolle der Gleichung $n$ten Grades mit zwei Unbekannten (wovon eine einen Parameter darstellt) spielt. Soweit die Skizzirung der angekündigten Methode.

Um die Brauchbarkeit der Methode darzuthun, wird versucht, eine synthetische Definition der algebraischen ebenen Curven abzuleiten. Dieselbe ist analog der in der analytischen Geometrie gegebenen Bestimmung der algebraischen Curve mittelst einer Beziehung zwischen den Coordinaten ihrer Punkte; zu jeder Geraden eines Systems von Geraden durch einen

---

*) Es sind dies rationale Curven $n$ter Ordnung, die keinem Raume von $n-1$ Dimensionen angehören. S. Franz Meyer „Apolarität und rationale Curven".

**) Es war nicht mehr möglich, an Stelle dieser Bezeichnung, welcher in der synthetischen Geometrie schon ein anderer Sinn zukommt, eine andere zu setzen. In der *Kötter*schen Schrift ist die Bezeichnung „Kette" im geläufigen Sinne genommen.

Punkt (unendlich fernen) wird durch rechnerische Operationen eine Anzahl von Geraden eines anderen solchen Systemes zugeordnet. — Die fundamentalen Eigenschaften der Curven sollen hier mittelst der neuen Methode soweit bewiesen werden, als es nöthig ist, um die Deckung des hier gegebenen Begriffs der Curve $n$ter Ordnung mit dem von der analytischen Geometrie gegebenen darzuthun.

Bei der Verschiedenheit in der Auffassung und Herleitung der Methode glaubt der Verfasser, dass diese Schrift auch nach Erscheinen der *Kötter*schen noch von Interesse sei.

Nach dem Plane der Abhandlung wird zuerst das Dreipunktesystem aus dem Zweipunktesystem abgeleitet; dann wird der Weg angegeben, wie aus einem beliebigen Punktsystem das nächst höhere herzuleiten sei. Hierauf folgt die Untersuchung der Reihen verschiedener Stufe und der Aggregate, welche dem Normbüschel und der Normcurve entsprechen, es sind dies „Band“ und „Kette“; besonders betrachtet wird die Kette der Gruppen, welche nur aus einem Punkte bestehend für vollzählig gelten. Soweit die Entwickelung der Methode. Nach der Abhandlung der Punktcorrespondenzen und der Normalkette folgt die Anwendung der Methode zur Erzeugung der algebraischen Curven. Die Erzeugung geschieht mittelst einer Beziehung zweier Strahlenbüschel. Es wird für den Kegelschnitt und die Curve dritten Grades gesondert bewiesen, dass zwei beliebige Punkte der Ebene an Stelle der Centra dieser Büschel treten können. Hieran schliesst sich der Beweis des allgemeinen Falles. Auf die Definition von Curvenbüschel und Curvenbündel folgt der Satz über die Mannigfaltigkeit der hier definirten Curve $n$ten Grades, welcher die Deckung des Begriffs derselben mit dem in der analytischen Geometrie gegebenen erweist.

Zusammenstellung der wichtigsten im Folgenden angewandten Bezeichnungen.

$S^n = n$-Punktesystem.

$r_{n,n-1}$ bedeutet die allgemeine $(n-1)$-dimensionale Reihe des n-Punktesystems,

$R_{n,n-1}$ ein einzelnes Individuum,

$s^{\alpha}_{n,n-1}$ die singuläre Reihe, deren Gruppen den Punkt P^{α}, das Haupt der Reihe, gemein haben.

$\beta_{n,\lambda}$ bezeichnet ein Bündel λter Stufe von Reihen $r_{n,n-1}$ und

$B_{n,\lambda}$ ein einzelnes Individuum.

$r_{n,\lambda}$ sei die allgemeine Gruppenreihe λter Stufe, $R_{n,\lambda}$ eine einzelne Reihe,

$s_{n,\lambda}^{\alpha,\beta,\gamma,\dots}$ eine singuläre Reihe, deren Gruppen die Punkte P^α, P^β, P^γ, ... gemein haben und

$S_{n,\lambda}^{\alpha,\beta,\gamma,\dots}$ ein einzelnes Individuum.

Das Dreipunktesystem.

§ 1.

Die Gruppen von je zwei Punkten auf einer Geraden bilden eine Mannigfaltigkeit von der zweiten Dimension. Wie die Punkte einer Ebene sich zu Geraden verbinden, so vereinigen sich die Gruppen von zwei Punkten zu linearen Reihen r_{21} — Involutionen zweiten Grades*).

Durch die Tangenten eines Kegelschnitts k, welcher eine Gerade G berührt, werden die Punkte der Ebene E von k den Gruppen von zwei Punkten auf G eindeutig zugeordnet. Einem Punkte von E gehört die Gruppe der Schnittpunkte der durch ihn gehenden Tangenten mit G zu; einem Paar von Punkten auf G entspricht der Schnittpunkt ihrer Tangenten an k (ausserhalb G). Den Punkten einer Geraden entsprechen die Punktepaare einer Involution. Dem Büschel von Geraden durch einen Punkt entspricht ein „echter“ oder „unechter“ Büschel erster Ordnung von Involutionen**), je nachdem der Punkt ausserhalb oder innerhalb von k liegt. — Einer Tangente entspricht eine singuläre Reihe s_{21}^ν, deren Gruppen einen Punkt P^ν gemein haben; P^ν heisse das Haupt von s_{21}^ν.

Die Gesammtheit der Reihen r_{21} bildet das Zweipunktesystem S^2 von G. Die r_{21} verhalten sich unter einander wie die Geraden einer Ebene. Durch zwei Gruppen ist eine r_{21} bestimmt. Zwei r_{21} haben eine oder keine Gruppe mit einander gemein. Eine s_{21}^ν hat mit jeder r_{21} eine Gruppe gemein. Eine Reihe von Gruppen befindet sich zu einer anderen Reihe in einem projectivischen oder perspectivischen Verhältniss, wenn die ihnen in E ent-

*) *O. Hesse* „Ein Uebertragungsprincip“. Dieses Journal Bd. 66.

**) Die Vereinigung der Involutionen zu Büscheln ist von der Wahl des Kegelschnittes k unabhängig, wie leicht ersichtlich ist, wenn man zwei Tangenten an k mittelst des einem Büschel von Involutionen entsprechenden Geradenbüschels perspectivisch auf einander bezieht.

sprechenden Punktreihen projectivisch oder perspectivisch liegen. — Die Reihe der Gruppen aus je zwei zusammenfallenden Punkten heisse die Hauptreihe des Zweipunktesystems; sie hat mit einer r_{21} höchstens zwei Gruppen gemein.

In einer collinearen Verwandtschaft von S^2 zu dem Zweipunktesystem S_2' einer anderen Geraden entspricht jeder r_{21} von S^2 eine Reihe r_{21}' von S_2' und jedem Büschel erster Ordnung von r_{21} ein Büschel von r_{21}'. Die collineare Verwandtschaft ist durch die Zuordnung von vier Reihen r_{21} bezw. Gruppen von S_2' bestimmt. In einer reciproken Verwandtschaft von S^2 zu S_2' entspricht einer Gruppe von S^2 eine Reihe r_{21}' von S_2', und den Gruppen einer r_{21} entsprechen die r_{21}' eines Büschels. Die Möglichkeit einer collinearen oder reciproken Verwandtschaft geht aus obiger Beziehung von S^2 auf E hervor.

§ 2.

Die Punkte der Geraden G lassen sich zu dreien zu Gruppen von einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit vereinigen.

Definition: 1) Eine Reihe von Gruppen zu drei Punkten, in welcher es immer eine und nur eine Gruppe giebt, die irgend zwei Punkte enthält, ist eine zweidimensionale Reihe, die im allgemeinen Falle mit r_{32} bezeichnet werde. Enthalten alle ihre Gruppen denselben Punkt P^ν, so heisse P^ν das Haupt der „singulären Reihe s_{32}^ν“.

2) In einer eindimensionalen Reihe ist zu jedem Punkte im Allgemeinen eine und nur eine Gruppe (oder „Missgruppe“, je nachdem dieselbe aus drei Punkten oder nur einem besteht) gegeben, welche ihn enthält. Die allgemeine Bezeichnung für eine solche Reihe sei r_{31}. Enthalten alle Gruppen der Reihe denselben Punkt P^ν, so heisse die singuläre Reihe s_{31}^ν mit dem Haupte P^ν. In der Reihe $s_{31}^{\mu\nu}$ haben alle Gruppen die Punkte P^μ und P^ν gemein.

Nimmt man zu jeder Gruppe des Zweipunktesystems von G den Punkt P^ν hinzu, so erhält man nach der Definition eine singuläre zweidimensionale Reihe s_{32}^ν. Eine r_{21} geht hierbei in eine singuläre Reihe s_{31}^ν über; r_{21} heisse die Grundreihe von s_{31}^ν. Zwei Reihen s_{32}^α und s_{32}^β haben nur die Gruppen der singulären Reihe $s_{31}^{\alpha\beta}$ gemein; $s_{31}^{\alpha\beta}$ hat zwei Grundreihen s_{21}^α und s_{21}^β, je nachdem sie als Reihe von s_{32}^β oder s_{32}^α aufgefasst wird. Drei Reihen s_{32}^α, s_{32}^β und s_{32}^γ haben nur die Gruppe $(P^\alpha P^\beta P^\gamma)$ gemein.

Eine Reihe s_{32}^{μ} hat mit s_{31}^{ν} nur die Gruppe gemein, welche aus P^{μ}, P^{ν} und dem in der Grundreihe von s_{31}^{ν} zu P^{μ} gehörigen Punkt besteht.

Satz: Haben die Reihen S_{31}^{0}, S_{31}^{1} und S_{31}^{α} jede mit der anderen eine verschiedene Gruppe gemein, so enthält irgend eine Reihe S_{31}^{β}, welche mit S_{31}^{0} und S_{31}^{1} je eine Gruppe gemein hat, auch eine Gruppe von S_{31}^{α}.

Beweis. Die Reihe s_{32}^{2} enthalte von S_{31}^{0} die Gruppe I_3^{0} und von S_{31}^{1} die Gruppe I_3^{1}. Durch den Büschel (I_3^{0}) der Reihen s_{31}^{0}, welche die Gruppe I_3^{0} gemein haben, ist jeder Gruppe von s_{31}^{01} die Gruppe von $s_{31}^{0\alpha}$ zugeordnet, welche mit ihr in derselben Reihe von (I_3^{0}) enthalten ist; gleicherweise werden durch den Büschel (I_3^{1}) die Gruppen von s_{31}^{01} den Gruppen von $s_{31}^{\alpha 1}$ eindeutig zugeordnet. Hierdurch ist jeder Gruppe von $s_{31}^{0\alpha}$ eine Gruppe von $s_{31}^{1\alpha}$ zugewiesen.

Die Grundreihen einer $s_{31}^{\mu\nu}$ befinden sich in einem projectivischen Verhältniss, wenn jeder Gruppe der einen Grundreihe diejenige der anderen zugeordnet wird, welche mit ihr zu derselben Gruppe von $s_{31}^{\mu\nu}$ gehört. Hieraus folgt: Durch die Büschel (I_3^{0}) und (I_3^{1}) bezw. die Büschel ihrer Grundreihen sind die Grundreihen von s_{31}^{01}, $s_{31}^{0\alpha}$ und $s_{31}^{\alpha 1}$ so projectivisch auf einander bezogen, dass diejenigen Gruppen einander entsprechen, welche zu einander zugewiesenen Gruppen von s_{31}^{01}, $s_{31}^{0\alpha}$ und $s_{31}^{1\alpha}$ gehören. Die gemeinschaftliche Gruppe der letzteren Reihen $(P^0 P^1 P^{\alpha})$ ist in der Beziehung derselben auf einander sich selbst zugeordnet. Daher ist s_{21}^{0}, die Grundreihe von $s_{31}^{0\alpha}$, so auf s_{21}^{1}, die Grundreihe von $s_{31}^{1\alpha}$, projectivisch bezogen, dass $(P^0 P^1)$ sich selbst entspricht. Die Vereinigungsreihen r_{21} entsprechender Gruppen in dieser Beziehung bilden daher einen echten Büschel erster Ordnung; denn demselben gehört die Reihe s_{21}^{2} an, da $s_{31}^{2\alpha}$ entsprechende Gruppen von $s_{31}^{0\alpha}$ und $s_{31}^{1\alpha}$ vereinigt. Hieraus folgt, indem man die r_{21} dieses Büschels mit P^{α} verbindet, dass die Verbindungsreihen s_{31}^{α} zugeordneter Gruppen von $s_{31}^{0\alpha}$ und $s_{31}^{1\alpha}$ alle eine Gruppe I_3^{α} gemein haben, also einen Büschel (I_3^{α}) bilden.

Auf dieselbe Art erhält man zu irgend einer anderen Reihe s_{32}^{β} einen Büschel (I_3^{β}), dessen Reihen Gruppen von $s_{31}^{0\beta}$ und $s_{31}^{1\beta}$ vereinigen, welche durch (I_3^{0}) und (I_3^{1}) einander zugeordnet sind. Die Gruppen von $s_{31}^{0\beta}$ sind den Gruppen von $s_{31}^{0\alpha}$ und die von $s_{31}^{1\beta}$ denen von $s_{31}^{1\alpha}$ eindeutig zugeordnet, und hiermit ist jeder Reihe von (I_3^{α}) eine Reihe von (I_3^{β}) zugewiesen. (I_3^{α}) und (I_3^{β}) geben eine eindeutige Beziehung der Reihe $s_{31}^{\alpha\beta}$ auf sich selbst. Hierbei sind die Gruppen $(P^2 P^{\alpha} P^{\beta})$, $(P^{\alpha} P^{\beta} P^{0})$ und $(P^{\alpha} P^{\beta} P^{1})$ sich selbst zugeordnet. In dem hierdurch gegebenen projectivischen Verhältniss

der Grundreihen s_{21}^{α} und s_{21}^{β} von $s_{31}^{\alpha\beta}$ entsprechen also den Gruppen (P^2P^{α}), (P^0P^{α}), (P^1P^{α}) von s_{21}^{α} die Gruppen, welche mit diesen je in einer Gruppe von $s_{31}^{\alpha\beta}$ enthalten sind. Da nun durch drei Zuordnungen eine projectivische Beziehung bestimmt ist, so entspricht in der Beziehung von $s_{31}^{\alpha\beta}$ auf sich selbst jede Gruppe sich selbst, d. h. jede Reihe s_{31}^{β} von (I_3^{β}) hat mit der entsprechenden s_{31}^{α} von (I_3^{α}) eine Gruppe gemein. Hiermit ist der an die Spitze gestellte Satz bewiesen. (Zwei entsprechende Reihen von (I_3^{α}) bezw. (I_3^{β}) haben nämlich je eine Gruppe mit derselben Reihe von $(I_3^{(0)})$ gemein.)

§ 3.

Die Gruppen aller Reihen s_{31}, welche von zwei Reihen S_{31}^0 und S_{31}^1 mit gemeinschaftlicher Gruppe je eine Gruppe enthalten, bilden eine zweidimensionale Reihe r_{32}; an die Stelle von S_{31}^0 und S_{31}^1 können nach dem Vorigen irgend zwei andere Reihen s_{31} von r_{32} treten. In jeder Reihe s_{32}^{μ} ist eine solche s_{31} enthalten, da s_{32}^{μ} mit S_{31}^0 und S_{31}^1 je eine Gruppe gemein hat. Jede $s_{31}^{\mu\lambda}$ enthält eine Gruppe von r_{32}, nämlich die, welche den in s_{32}^{μ} und s_{32}^{λ} enthaltenen zu r_{32} gehörigen Reihen s_{31}^{μ} und s_{31}^{λ} gemeinsam ist. Durch irgend zwei Punkte P^{α} und P^{β} ist daher eine und nur eine Gruppe von r_{32} gegeben, welche sie enthält; dies ist die gemeinsame Gruppe von r_{32} und $s_{31}^{\alpha\beta}$. Die Gesammtheit der zweidimensionalen Dreipunktereihen r_{32} bildet das *„Dreipunktesystem“* S^3 der Geraden G.

Ein Büschel von Reihen $s_{31}^{(0)}$, welcher aus einem Büschel erster Ordnung von r_{21} hervorgeht, begründet mit einem analogen Büschel von Reihen s_{31}^1 einen Büschel β_{31} von r_{32}. Aus § 2 folgt: Jede s_{32}^{μ} hat mit dem Büschel β_{31} einen Büschel von s_{31}^{μ} gemein, der sich auf einen Büschel erster Ordnung von r_{21} gründet. Die gemeinsamen Gruppen zweier β_{31} angehörigen r_{32} bilden eine eindimensionale Dreipunktereihe r_{31}, welche in jeder r_{32} des Büschels enthalten ist. Jeder Punkt P^{μ} von G ist in einer und nur einer Gruppe von r_{31} enthalten; diese besteht aus drei Punkten oder nur einem, je nachdem s_{32}^{μ} mit β_{31} einen Büschel b_1^{μ} von s_{31}^{μ} gemein hat, der sich auf einen echten oder unechten Büschel von r_{21} gründet. — Man erkennt sofort: Eine r_{31} ist durch zwei Gruppen bestimmt; zwei r_{31}, welche eine Gruppe gemein haben, sind in einer r_{32} enthalten. (Um dies einzusehen, wählt man die Gruppe in der Reihe $s_{32}^{(0)}$).

Durch eine collineare Beziehung des Zweipunktesystems S^2 auf sich selbst, in welcher jeder Gruppe (P^0P^{ξ}) (P^{ξ} bedeute einen veränderlichen

Punkt) von s_{21}^0 die Gruppe $(P^1 P^\xi)$ von s_{21}^1 zugeordnet wird, ist eine „collineare" Verwandtschaft zwischen s_{32}^1 und s_{32}^0 hergestellt, d. h. jeder Reihe s_{31}^0 ist eine Reihe s_{31}^1 und jedem Büschel b_1^0 von s_{31}^0 ein Büschel b_1^1 von s_{31}^1 zugeordnet. Entsprechende Reihen haben mit s_{31}^{01} dieselbe Gruppe gemein. Irgend zwei entsprechende Reihen geben daher Grund zu einer r_{32}. Die Gesammtheit aller solcher r_{32} bilden ein „Bündel β_{32}". — Durch drei r_{32} ist ein Bündel bestimmt; denn durch die Zuordnung ihrer in s_{32}^0 enthaltenen Reihen zu den in s_{32}^1 gehörigen ist eine collineare Verwandtschaft, wie die beschriebene, bestimmt. Durch ein Bündel B_{32} und einen Büschel B_{31} von Reihen r_{32} ist eine r_{32} gegeben, welche beiden angehört. B_{31} habe mit s_{32}^0 und s_{32}^1 die Büschel B_1^0 resp. B_1^1 von Reihen s_{31} gemein. Entspricht in der Verwandtschaft von s_{32}^0 zu s_{32}^1, welche B_{32} zu Grunde liegt, dem Büschel B_1^0 der Büschel B_1^1, dann gehört die Reihe s_{31}^1, welche B_1^0 und B_1^1 gemeinsam ist, der gesuchten r_{32} an. — Da die einem Bündel β_{32} zu Grunde liegende Verwandtschaft durch die Zuordnung einer s_{31}^0 zu einer s_{31}^1 und eines Büschels b_1^0 zu einem Büschel b_1^1 bestimmt ist, so ist β_{32} durch eine r_{32} und einen Büschel β_{31} gegeben. Zwei Bündel β_{32} haben einen Büschel β_{31} gemein. (Dies folgt aus der Verbindung der zwei letzten Sätze). Hieraus: Drei Bündel β_{32} haben eine r_{32} gemein. — Ein Bündel β_{32} enthält eine oder drei singuläre Reihen s_{32}. Denn durch die collineare Verwandtschaft von s_{32}^0 zu s_{32}^1, welche β_{32} zu Grunde liegt, und durch diejenige, in welcher zwei Reihen s_{31}^0 und s_{31}^1 mit derselben Grundreihe einander zugeordnet sind, ist s_{32}^0 collinear auf sich selbst bezogen. Jede sich selbst zugeordnete Reihe ist, wie man leicht sieht, eine Reihe s_{31}^{0r}. — Gehören zu dem Bündel β_{32} drei Reihen s_{32}, so haben alle r_{32} von β_{32} eine Gruppe gemein. Enthält β_{32} nur die Reihe s_{32}^α, so haben alle zu β_{32} gehörigen Büschel β_{31} denselben Büschel b_1^α von s_{31}^α gemein.

Definition: Zwei Bündel β_{32} sind collinear resp. reciprok verwandt, wenn die beiden Systeme von Reihen s_{31}^α, welche ihre Reihen r_{32} mit s_{32}^α gemein haben, collinear resp. reciprok verwandt sind; zwei collineare Bündel β_{32} bestimmen in jeder s_{32} zwei collineare Systeme von s_{31}. (Dies folgt leicht aus dem Bisherigen).

Zwei Bündel β_{32}, die einander so zugeordnet sind, dass je zwei Reihen r_{32} einander entsprechen, welche mit einer festen Reihe R_{32} zu einem Büschel β_{31} gehören, sind collinear verwandt. Da nämlich ein Büschel β_{31} mit einem Bündel β_{32} im Allgemeinen nur eine Reihe r_{32} gemein hat,

und da die Reihen s_{32} und s_{31} dieselben Eigenschaften wie die r_{32} und r_{31} besitzen, so ist durch jene Zuordnung zu jeder Reihe r_{32} des einen Bündels nur eine des anderen bestimmt, damit ist auch jeder s_{31}^{α} nur eine s_{31}^{α} zugeordnet. Ebenso ist einem Büschel b_1^{α} von s_{31}^{α} ein anderer Büschel von s_{31}^{α} zugewiesen.

Hieraus folgt: Die Reihen r_{32} des Dreipunktesystems S^3 haben dieselben Eigenschaften unter einander wie die Ebenen des Raumes. Wie eine collineare Verwandtschaft von zwei räumlichen Systemen durch die Zuordnung von fünf Ebenen zu fünf anderen Ebenen bestimmt ist, so ist auch eine collineare Verwandtschaft zwischen dem Dreipunktesystem S^3 einer Geraden G und demjenigen S_3' einer Geraden G' durch die Zuordnung von fünf Reihen r_{32} von S_3 zu fünf Reihen r_{32}' von S_3' gegeben. Unter collinearer Verwandtschaft von S_3 zu S_3' verstehen wir eine Beziehung, in welcher jeder Reihe r_{32} von S_3 eine r_{32}' von S_3' und jedem Büschel β_{31} von r_{32} ein Büschel β_{32}' von r_{32}' zugeordnet ist. Analog verhält es sich mit einer reciproken Verwandtschaft zweier Dreipunktesysteme. Das Dreipunktesystem S^3 kann auf den Raum collinear bezogen werden, so dass jeder r_{32} eine Ebene und jedem β_{32} ein Punkt entspricht. Dem Büschel der singulären Reihen s_{32} entspricht ein Ebenenbüschel E_3 dritter Ordnung; denn in der collinearen Verwandtschaft von s_{32}^1 zu s_{32}^0, in welcher jeder Reihe s_{31}^1 die Reihe s_{31}^0 mit derselben Grundreihe r_{21} entspricht, sind irgend zwei Reihen $s_{31}^{1\xi}$ und $s_{31}^{0\xi}$, welche derselben s_{31}^{ξ} angehören, einander zugeordnet.

Die Reihe H_3 der Gruppen, welche aus drei zusammenfallenden Punkten von G besteht, entspricht der Curve dritter Ordnung, deren Osculationsebenen den Büschel E_3 bilden. Denn die Reihen $s_{31}^{a\xi}$ in s_{32}^{a} bilden einen Büschel, welchem in der Beziehung auf den Raum der Büschel der Tangenten eines Kegelschnittes entspricht. Den Punkten dieses Kegelschnittes entspricht eine Reihe, welche aus der Hauptreihe von S^2 verbunden mit dem Punkte P^{α} besteht. Der Reihe $s_{31}^{a\alpha}$ entspricht im Raume eine Axe von E_3, durch welche nur eine Ebene von E_3 geht, dem Punkte P^{α} als Gruppe der Berührungspunkt dieser Axe mit der Curve dritter Ordnung. H_3 heisse die Hauptreihe von S^3. — Wie eine Involution zweiten Grades zwei Ordnungspunkte besitzt, so hat eine zweidimensionale Dreipunktereihe drei Gruppen, welche aus je drei zusammenfallenden Punkten bestehen, oder drei „Ordnungspunkte".

Die Gruppen des Dreipunktesystems S^3 einer Geraden G können mittelst der Ebenen eines Büschels E_3 dritter Ordnung, wovon G eine eigent-

liche Axe ist, eindeutig den Punkten des Raumes zugeordnet werden. Jedem Punkte des Raumes ist die Gruppe der Schnittpunkte von G mit den drei durch ihn gehenden Ebenen von E_3 zugeordnet; und umgekehrt gehört zu einer Gruppe von drei Punkten auf G der Schnittpunkt der drei Ebenen von E_3, welche von jedem derselben ausgehen und G nicht enthalten. In einer durch G gehenden Ebene von E_3 schneiden die Ebenen von E_3 die Tangenten eines Kegelschnittes an G aus. Den Punkten einer Ebene ε^α von E_3 mit dem Schnitt P^α auf G sind die Gruppen des Zweipunktesystems von G je verbunden mit P^α auf diese Weise zugeordnet. Einer Geraden von ε^α entspricht eine Involution zweiten Grades verbunden mit P^α, d. h. eine Reihe s^α_{31}. Den Schnittgeraden einer beliebigen Ebene mit den Ebenen von E_3 entspricht ein System von s_{31}, von denen jede von der andern eine Gruppe enthält, welche also eine r_{32} bilden. (G darf auch eine uneigentliche Axe sein, da die Ebenen von E_3 auf den Axen projectivische Punktreihen ausschneiden).

Das n-Punktesystem*).

§ 4.

Auf analoge Weise, wie aus dem Zweipunktesystem einer Geraden G ihr Dreipunktesystem hervorgeht, entwickelt sich aus dem letzteren das Vierpunktesystem. Durch fortgesetztes analoges Verfahren gelangt man zu einem k-Punktesystem, dessen Gruppen die beliebig gewählte Anzahl k von Punkten enthalten. Im Folgenden soll gezeigt werden, wie man allgemein aus dem $(n-1)$-Punktesystem S^{n-1} das n-Punktesystem S^n erhält. Hierbei setzen wir, von der Analogie des Dreipunktesystems ausgehend, für alle k-Punktesysteme S^k, für welche $k <$ oder $= n$ ist, Eigenschaften voraus, welche Functionen von k sind. Es wird dann gezeigt, dass die Eigenschaften des auf S^{n-1} gegründeten Systems S^n dieselben sind, wie sie sich aus diesen Functionen für $k = n$ ergeben.

Voraussetzungen.

I. Durch das k-Punktesystem S^k sind die Punkte der Geraden G zu Gruppen von je k vereinigt. Die Gruppen wieder vereinigen sich zu $(k-1)$

*) Zu dem Folgenden vgl. die oben angeführte Abhandlung von *Kötter,* p. 110 u. f.

dimensionalen k-Punktereihen $r_{k,k-1}$; jeder Reihe $r_{k,k-1}$ gehört eine und nur eine Gruppe an, die irgend $n-1$ gegebene Punkte enthält. Die Reihen $r_{k,k-1}$ bilden eine Mannigfaltigkeit von k Dimensionen.

II. Unter den $r_{k,k-1}$ finden sich „singuläre Reihen“ $s^{\nu}_{k,k-1}$, deren Gruppen einen Punkt P^{ν} gemein haben; P^{ν} heisst das Haupt der Reihe. Jeder Punkt ist das Haupt einer $s_{k,k-1}$.

III. Irgend zwei Reihen $r_{k,k-1}$ bestimmen einen und nur einen sie enthaltenden Büschel β_{k1} von einfach unendlich vielen Reihen $r_{k,k-1}$. Durch irgend eine den Reihen von β_{k1} nicht gemeinsame Gruppe ist eine Reihe von β_{k1} bestimmt. Alle Gruppen, welche irgend zwei $r_{k,k-1}$ von β_{k1} gemein haben, gehören jeder Reihe des Büschels an.

IV. Drei Reihen $r_{k,k-1}$, die nicht demselben Büschel β_{k1} angehören, bestimmen ein Bündel β_{k2} (das einzige, das sie enthält,) von zweifach unendlich vielen Reihen $r_{k,k-1}$. Die Reihen eines jeden Bündels β_{k2} lassen sich derartig eindeutig den Punkten eines ebenen Systems zuordnen, dass jeder Reihe ein Punkt und jedem Büschel β_{k1} von Reihen eine Punktreihe entspricht und umgekehrt.

Folgerungen.

1. Jeder Büschel β_{k1}, welcher von einem Bündel β_{k2} zwei Reihen enthält, gehört demselben an. Zwei β_{k1}, deren Reihen $r_{k,k-1}$ demselben β_{k2} angehören, haben eine Reihe gemein und umgekehrt. Die Gruppen, welche drei nicht zu demselben Büschel β_{k1} gehörige $r_{k,k-1}$ gemein haben, gehören allen Reihen des durch sie bestimmten Bündels β_{k2} an. Hieraus folgt: Die Reihen $r_{k,k-1}$ eines Bündels β_{k2}, welche eine beliebige Gruppe gemein haben, bilden einen Büschel β_{k1}; derselbe wird durch die zwei Reihen bestimmt, welche unter den Reihen zweier beliebig gewählter Büschel β_{k1} von β_{k2} die Gruppe enthalten (II.). — Durch zwei Gruppen ist im Allgemeinen eine $r_{k,k-1}$ bestimmt, welche einem gegebenen Bündel β_{k2} angehört.

2. Durch $\lambda+1$ beliebige Reihen $r_{k,k-1}$ ist im Allgemeinen ein und nur ein Bündel λter Stufe $\beta_{k,\lambda}$ (von λ-fach unendlich vielen $r_{k,k-1}$) bestimmt; demselben gehören die Reihen aller Büschel β_{k1} an, welche irgend zwei seiner Reihen enthalten.

Beweis: Nehmen wir den Satz im Falle $\lambda=\mu$ als richtig an, so bestimmt die in einem Bündel $B_{k\mu}$ nicht enthaltene Reihe $R_{k,k-1}$ mit allen Reihen von $B_{k\mu}$ Büschel $\beta_{k,1}$, deren Reihen ein Bündel $(\mu+1)$ter Stufe $B_{k,\mu+1}$ bilden. Alle Büschel β_{k1}, welche durch $R_{k,k-1}$ und die Reihen eines

Büschels β_{k1} von $B_{k\mu}$ bestimmt sind, machen ein Bündel β_{k2} aus. Da ein solches Bündel β_{k2} die Reihen eines jeden Büschels enthält, welchem irgend zwei seiner Reihen angehören, so ist dies auch mit $B_{k,\mu+1}$ der Fall. Da der Satz für $\lambda = 2$ giltig ist, so gilt er allgemein. Aus dem Satze folgt ohne weiteres: ein Bündel $\beta_{k,\lambda}$ enthält jedes Bündel $\beta_{k\varrho}$, welcher $\varrho+1$ nicht zu demselben Bündel $\beta_{k,\varrho-1}$ gehörige Reihen $r_{k,k-1}$ von $\beta_{k\lambda}$ enthält. — Zu der im Beweise angegebenen Erzeugung von $B_{k,\mu+1}$ kann jedes in $B_{k,\mu+1}$ enthaltene Bündel $\beta_{k\mu}$ und jede nicht zu $\beta_{k\mu}$ gehörige $r_{k,k-1}$ von $B_{k,\mu+1}$ benutzt werden.

3. Haben zwei Bündel $\beta_{k,\mu}$ und $\beta_{k\varrho}$ ein Bündel $\beta_{k\nu}$ gemein, so sind sie in einem Bündel $\beta_{k\lambda}$ von der Stufe $\lambda = \mu+\varrho-\nu$ enthalten; $\beta_{k\lambda}$ ist das Bündel von der niedrigsten Stufe, welcher $\beta_{k\mu}$ und $\beta_{k\varrho}$ enthält.

Beweis: Das Bündel $B_{k\mu}$ habe mit $B_{k\varrho}$ das Bündel $B_{k\nu}$ gemein. Eine nicht zu $B_{k\mu}$ gehörige Reihe $r_{k,k-1}$ von $B_{k\varrho}$ bestimmt mit $B_{k\mu}$ nach dem Vorigen ein Bündel $B_{k,\mu+1}$, welches mit $B_{k\varrho}$ offenbar nur ein Bündel $B_{k,\nu+1}$ gemein hat. Von $B_{k,\mu+1}$ gelangt man auf dieselbe Weise zu einem Bündel $B_{k,\mu+2}$, welches mit $B_{k\varrho}$ ein Bündel $B_{k,\nu+2}$ gemein hat. Setzt man das Verfahren fort, bis man ein Bündel $B_{k\lambda}$ erhält, welches $B_{k\varrho}$ selbst enthält, so ist $B_{k\lambda}$ das Bündel der niedrigsten Stufe, welches $B_{k\mu}$ und $B_{k\varrho}$ enthält; λ ist offenbar gleich $\mu+\varrho-\nu$. Haben $\beta_{k\mu}$ und $\beta_{k\varrho}$ eine Reihe gemein, so ist das Bündel der niedrigsten Stufe, welches sie enthält, von der Stufe $\mu+\varrho$, und wenn $\beta_{k\mu}$ und $\beta_{k\varrho}$ keine Reihe gemein haben, so ist es von der Stufe $\mu+\varrho+1$.

4. Zwei Bündel $\beta_{k\mu}$ und $\beta_{k\varrho}$ haben, wenn $\beta_{k\lambda}$ das Bündel von der niedrigsten Stufe ist, welcher beide enthält, ein Bündel von der Stufe $\varrho+\mu-\lambda$ gemein; für den Fall $\varrho+\mu = \lambda$ enthalten $\beta_{k\mu}$ und $\beta_{k\varrho}$ eine gemeinsame Reihe.

5. Die Gesammtheit der Bündel β_k, welche einem Bündel $\beta_{k\lambda}$ angehören und ein Bündel $\beta_{k\mu}$ gemein haben, bilden „ein Netz“ $(\beta_\mu)_\varrho$ von der ϱten Stufe, wobei $\varrho = \lambda-\mu-1$.

6. Ein Netz $(\beta_\mu)_\varrho$, dessen Bündel mit einem Bündel $\beta_{k\varrho}$ in demselben Bündel $\beta_{k\lambda}$ enthalten sind, ist im Allgemeinen auf $\beta_{k\varrho}$ eindeutig bezogen, indem jede Reihe $r_{k,k-1}$ von $\beta_{k\varrho}$ in einem Bündel $\beta_{k,\mu+1}$ des Netzes enthalten ist; die Reihen $r_{k,k-1}$ von $\beta_{k\varrho}$, welche einen Büschel β_{k1} bilden, sind in den Bündeln $\beta_{k,\mu+1}$ eines Bündels $\beta_{k,\mu+2}$ enthalten. Den Reihen eines Bündels $\beta_{k\nu}$ von $\beta_{k\lambda}$ sind hierdurch die Bündel $\beta_{k,\mu+1}$ des Netzes zu-

geordnet, welche in einem Bündel $\beta_{k,\mu+\nu+1}$ enthalten sind. Diese Beziehung heisse eine „perspectivische".

Hieraus folgt: Ein Netz $(\beta_\lambda)_2$ zweiter Stufe lässt sich so auf ein ebenes System beziehen, dass jedem Bündel $B_{k,\lambda+1}$ ein Punkt P und jedem $B_{k,\lambda+1}$ enthaltenden Bündel $\beta_{k,\lambda+2}$ eine Gerade durch P zugeordnet ist (Vorauss. IV).

7. Ein Netz $(\beta_\mu)_\varrho$ von Bündeln $\beta_{k,\lambda-1}$, die in einem Bündel $\beta_{k\lambda}$ enthalten sind, geht aus einem Netz $(\beta_{\mu+1})_{\varrho-1}$, das in $(\beta_\mu)_\varrho$ enthalten ist, auf analoge Weise hervor, wie ein Bündel $\beta_{k\varrho}$ aus einem ihm angehörigen Bündel $\beta_{k,\varrho-1}$.

Beweis: Zwei Bündel $\beta_{k,\lambda-1}$ des Netzes $(B_\mu)_\varrho$, dessen Bündel dem Bündel $B_{k\lambda}$ angehören, haben nach 4. ein Bündel $\beta_{k,\lambda-2}$ gemein, bestimmen also ein Netz $(\beta_{k,\lambda-2})_1$ erster Stufe — „eine Schaar" —. $(B_{\mu+1})_{\varrho-1}$ sei in dem Netz $(B_\mu)_\varrho$ enthalten, und $B_{k,\lambda-1}$ sei ein nicht zu $(B_{\mu+1})_{\varrho-1}$ gehöriges Bündel von $(B_\mu)_\varrho$. $B_{k,\lambda-1}$ bestimmt mit jedem $\beta_{k,\lambda-1}$ von $(B_{\mu+1})_{\varrho-1}$ eine Schaar. Die Bündel $\beta_{k,\lambda-1}$ aller solcher Schaaren machen das Netz $(B_{k\mu})_\varrho$ aus; denn irgend ein Bündel von $(B_\mu)_\varrho$ bestimmt mit $B_{k,\lambda-1}$ eine Schaar, welcher mit $(B_{\mu+1})_{\varrho-1}$ ein Bündel $\beta_{k,\lambda-1}$ gemeinsam ist (das Bündel $\beta_{k,\lambda-2}$, welches den $\beta_{k,\lambda-1}$ der Schaar gemeinsam ist, hat mit $B_{k,\mu+1}$ das Bündel $B_{k\mu}$ gemein, gehört also (No. 3.) mit $B_{k,\mu+1}$ zu einem Bündel $\beta_{k,\lambda-1}$).

Aus dem Bisherigen folgt: Man erhält für ein Netz $(\beta_\mu)_\varrho$ analoge Eigenschaften wie für ein Bündel $\beta_{k\varrho}$, wenn man die Bündel $\beta_{k,\lambda-1}$ an Stelle der Reihen $r_{k,k-1}$ setzt.

8. Entsprechen in der Beziehung eines Bündels zweiter Stufe β_{k2} auf ein ebenes System (Vorauss. IV) vier Reihen $r_{k,k-1}$ bezw. vier Büschel β_{k1} vier harmonischen Elementen des Systems, so sind denselben in jeder derartigen Beziehung vier harmonische Elemente eines ebenen Systemes zugeordnet; sie mögen deshalb vier harmonische Reihen bezw. Büschel heissen.

Definition: Zwei Bündel β_{k2} befinden sich in collinearer bezw. reciproker Verwandtschaft, wenn sie nach Art von Vorauss. IV auf zwei collinear bezw. reciprok verwandte ebene Systeme bezogen sind.

In einer Verwandtschaft zweier Bündel β_{k2} entsprechen je vier harmonischen Reihen bezw. Büscheln ebenfalls vier harmonische Reihen oder Büschel. — Eine collineare Verwandtschaft zweier Bündel β_{k2} ist durch vier Zuordnungen von je einer Reihe $r_{k,k-1}$ des einen zu einer des anderen bestimmt.

Definition: Zwei Büschel β_{k1} sind projectivisch auf einander bezogen,

wenn je vier harmonischen Reihen des einen immer vier harmonische Reihen des anderen entsprechen. — Zwei Büschel β_{k1}, welche einander in einer collinearen Verwandtschaft zweier β_{k2} entsprechen, stehen in projectivischem Verhältniss. Zwei in einem Bündel β_{k2} enthaltene Büschel β_{k1} stehen in projectivischem Verhältniss, wenn jede Reihe des einen derjenigen $r_{k,k-1}$ des anderen zugeordnet ist, welche mit ihr und einer festen Reihe $r_{k,k-1}$ von β_{k2} zu einem Büschel β_{k1} gehören — „perspectivisches Verhältniss". — Zwei Büschel β_{k1} in projectivischem Verhältniss befinden sich in perspectivischem Verhältniss, wenn sie eine sich selbst entsprechende Reihe $r_{k,k-1}$ gemein haben.

Analoge Sätze gelten von dem Netz zweiter Stufe und der Schaar von Bündeln (5.).

9. Fasst man Bündel und Netz unter dem Begriffe Grundaggregat zusammen, und nennt man die in einem Bündel bezw. Netz enthaltenen Bündel (bezw. Reihen) der niedrigsten und höchsten Stufe die Elemente des Aggregates, so erhält man folgende für Bündel und Netz geltende Definition: Zwei Grundaggregate befinden sich in collinearer bezw. reciproker Verwandtschaft, wenn jedem Element des einen ein gleichartiges bezw. ungleichartiges Element entspricht — gleichartig ist z. B. eine Reihe und ein Bündel der niedrigsten Stufe in einem Netze —, und wenn den Elementen eines Grundaggregates erster Stufe ebenfalls die Elemente eines Grundaggregates erster Stufe zugeordnet sind.

10. Die Verwandtschaft zweier Grundaggregate von der ϱten Stufe ist durch die Zuordnung von $\varrho+2$ beliebigen Elementen des einen zu $\varrho+2$ Elementen des anderen bestimmt, wofern keine $\varrho+1$ dieser Elemente demselben Aggregat niedrigerer Stufe angehören.

Beweis: Da offenbar zwei Grundaggregate in collinearer Verwandtschaft stehen, wenn sie zu einem dritten in reciproker Verwandtschaft stehen, und da sich jedes Netz nach No. 5 collinear auf ein Bündel beziehen lässt, so ist der Beweis nur für den Fall der reciproken Verwandtschaft eines Bündels und eines Netzes nöthig.

Der Satz gilt nach No. 8 für den Fall $\varrho = 2$. Wir suchen daher zu zeigen, wie aus der Gültigkeit für eine Stufe ϱ die Gültigkeit des Satzes für die Stufe $\varrho+1$ folgt.

Das Bündel $B'_{k,\varrho+1}$ stehe zu dem Netze $(B_{\mu-1})_{\varrho+1}$ in reciproker Verwandtschaft. Dem Bündel $B'_{k\varrho}$ sei hierbei das Netz $(B_\mu)_\varrho$ von $(B_{\mu-1})_{\varrho+1}$ zugeordnet (dass in einer solchen Verwandtschaft jedem Bündel niedrigerer

Stufe ein Netz derselben Stufe zugeordnet ist, folgt aus der Erzeugung eines Bündels bezw. Netzes durch Bündel bezw. Netze niedrigerer Stufe). Den Reihen ${}^0R'_{k,k-1}$ und ${}^1R'_{k,k-1}$ von $B'_{k,\varrho+1}$, welche nicht zu $B'_{k\varrho}$ gehören, entsprechen die Bündel ${}^0B_{k,\lambda-1}$ und ${}^1B_{k,\lambda-1}$ ($\lambda=\varrho+\mu+1$ No. 5). Der durch die beiden Reihen bestimmte Büschel habe mit $B'_{k\varrho}$ die Reihe ${}^2R'_{k,k-1}$, und die durch die beiden Bündel bestimmte Schaar habe mit dem Netz $(B_\mu)_\varrho$ das Bündel ${}^2B_{k,\lambda-1}$ gemein. ${}^2R'_{k,k-1}$ sei ${}^2B_{k,\lambda-1}$ zugeordnet. In irgend einer Reihe $R'_{k,k-1}$ findet man das entsprechende Bündel $B_{k,\lambda-1}$ wie folgt: $R'_{k,k-1}$ bestimmt mit ${}^0R'_{k,k-1}$ und ${}^1R'_{k,k-1}$ ein Bündel B'_{k2}, welches mit $B'_{k\varrho}$ einen Büschel gemein hat; diesem Büschel entspricht in $(B_\mu)_\varrho$ eine Schaar, welche mit ${}^0B_{k,\lambda-1}$ und ${}^1B_{k,\lambda-1}$ ein Netz $(B_{\mu+\varrho-2})_2$ bestimmt. Durch die Beziehung der Schaar auf den Büschel und die Zuordnung von ${}^0R'_{k,k-1}$ und ${}^1R'_{k,k-1}$ zu ${}^0B_{k,\lambda-1}$ und ${}^1B_{k,\lambda-1}$ ist eine reciproke Verwandtschaft zwischen B'_{k2} und $(B_{\mu+\varrho-2})_2$ festgelegt; der Reihe $R'_{k,k-1}$ ist hierbei $B_{k,\lambda-1}$ zugeordnet. — Ein Büschel β_{k1} von $B'_{k,\varrho+1}$ bestimmt im Allgemeinen mit ${}^0R'_{k,k-1}$ und ${}^1R'_{k,k-1}$ je ein Bündel β_{k2}; jedes dieser β_{k2} hat mit $B'_{k\varrho}$ einen Büschel gemein. Jedem derselben entspricht in $(B_\mu)_\varrho$ eine Schaar; die beiden Schaaren bestimmen, die eine mit ${}^0B_{k,\lambda-1}$, die andere mit ${}^1B_{k,\lambda-1}$, zwei Netze zweiter Stufe, welche die dem ersten Büschel entsprechende Schaar gemein haben. — Man sieht hieraus, dass die Verwandtschaft durch die Beziehung von $(B_\mu)_\varrho$ auf $B'_{k\varrho}$ und die Zuordnung von ${}^0R'_{k,k-1}$, ${}^1R'_{k,k-1}$ zu ${}^0B_{k,\lambda-1}$, ${}^1B_{k,\lambda-1}$ vollständig bestimmt ist. Die Beziehung von $(B'_\mu)_\varrho$ zu $B_{k\varrho}$ ist aber nach der Voraussetzung ausser der Zuordnung von ${}^2R_{k,k-1}$ zu ${}^2B_{k,\lambda-1}$ noch durch $\varrho+1$ Zuordnungen bestimmt. Die Verwandtschaft von $(B_{\mu-1})_{\varrho+1}$ zu $B'_{k,\varrho+1}$ ist somit durch $\varrho+3$ Zuordnungen im Allgemeinen bestimmt; man erkennt aus dem Beweise auch leicht, dass durch $\varrho+3$ Zuordnungen im Allgemeinen immer eine solche Verwandtschaft gegeben ist. (Die Richtigkeit der im Satze ausgesprochenen Beschränkung erkennt man ohne weiteres.)

11. Die Gruppen, welche $\lambda+1$ ein Bündel $\beta_{k\lambda}$ bestimmenden Reihen $r_{k,k-1}$ gemeinsam sind, gehören allen $r_{k,k-1}$ von $\beta_{k\lambda}$ an. — Denn dieser im Falle $\lambda=2$ richtige Satz gilt für $\beta_{k,\lambda+1}$, wenn er für $\beta_{k\lambda}$ Gültigkeit hat (dies geht aus der Entstehung von $\beta_{k,\lambda+1}$ aus $\beta_{k\lambda}$ No. 2 hervor).

12. Eine Gruppe von k Punkten, welche nicht allen $r_{k,k-1}$ von $\beta_{k\lambda}$ gemeinsam ist, gehört allen $r_{k,k-1}$ eines in $\beta_{k\lambda}$ enthaltenen Bündels $\beta_{k,\lambda-1}$ an. — Der Satz gilt für $\lambda=2$. Ist der Satz richtig für $\lambda=\mu$, so ist er es auch für $\lambda=\mu+1$. Denn dann enthält irgend ein Bündel $B_{k\mu}$,

welcher in dem Bündel $B_{k,\mu+1}$ enthalten ist, ein Bündel $B_{k,\mu-1}$, dessen Reihen alle eine gegebene Gruppe gemein haben. Irgend einem Büschel β_{k1} von $B_{k,\mu+1}$, welcher von $B_{k,\mu-1}$ keine $r_{k,k-1}$ enthält (ein solcher Büschel wird bestimmt durch eine $r_{k,k-1}$, die nicht zu $B_{k\mu}$, und eine $r_{k,k-1}$, die zu $B_{k\mu}$, aber nicht zu $B_{k,\mu-1}$ gehört,) kommt eine $r_{k,k-1}$ mit jener Gruppe zu. Diese Reihe bestimmt mit $B_{k,\mu-1}$ ein Bündel $\beta_{k\mu}$, dessen Reihen alle die Gruppe gemein haben. Diesem Bündel gehören aber auch alle Reihen von $B_{k,\mu+1}$ an, die diese Gruppe enthalten; denn sonst gehörte dieselbe $\mu+2$ das Bündel $B_{k,\mu+1}$ bestimmenden Reihen $r_{k,k-1}$ an.

13. „Durch λ Gruppen von k Punkten ist im Allgemeinen eine sie enthaltende Reihe $r_{k,k-1}$ bestimmt, welche einem gegebenen Bündel $\beta_{k\lambda}$ angehört."

Wird die Gültigkeit des Satzes für irgend einen Werth von λ angenommen, so erweist sich der Satz auch für $\lambda+1$ als richtig. Denn ein Bündel $B_{\mu,\lambda+1}$ enthält ein Bündel $B_{k\lambda}$, dessen Reihen eine gegebene Gruppe gemein haben. $B_{k\lambda}$ selbst enthält aber im Allgemeinen eine Reihe, welcher die übrigen λ Gruppen angehören (eine Ausnahme tritt ein, wenn einige derselben den Reihen $r_{k,k-1}$ von $B_{k\lambda}$ gemeinsam sind). Der Satz ist für $\lambda = 2$ gültig.

14. Da das k-Punktesystem S^k in den Reihen $r_{k,k-1}$ von einer k-dimensionalen Mannigfaltigkeit ist, so muss ein nach der bekannten Weise (No. 2) aus einem Bündel $\beta_{k,k-1}$ gewonnenes Bündel β_{kk} alle Reihen $r_{k,k-1}$ enthalten. (Denn eine nicht zu β_{kk} gehörige Reihe würde Grund zu einem Bündel von $(k+1)$-fach unendlich vielen S^k angehörigen $r_{k,k-1}$ geben.) Alle Reihen $r_{k,k-1}$, welche eine Gruppe gemein haben, bilden daher ein Bündel $\beta_{k,k-1}$. Hieraus folgt: „Eine Reihe $r_{k,k-1}$ ist im Allgemeinen durch k Gruppen bestimmt."

§ 5.

Ableitung des $(n+1)$-Punktesystems S^{n+1} aus dem n-Punktesystem S^n.

Die Voraussetzungen von § 4 sollen für alle Punktsysteme S^k einer Geraden G gelten, solange $k \leqq n$.

Fügt man zu allen Gruppen von S^n denselben Punkt P^ν, so erhält man eine singuläre Reihe $s^\nu_{n+1,n}$ des $(n+1)$-Punktesystems S^{n+1}. Aus irgend einer Reihe $r_{n,n-1}$ geht hierbei eine $(n-1)$-dimensionale $(n+1)$-Punktereihe $s^\nu_{n+1,n-1}$ hervor; $r_{n,n-1}$ heisse die Grundreihe von $s^\nu_{n+1,n-1}$. Beliebige $n-1$

Punkte von G sind zugleich in einer und nur einer Gruppe von $s^{\nu}_{n+1,n-1}$ enthalten.

Die Gruppen eines Systems S^k mit denselben $n+1-k$ Punkten $P^{\alpha}, P^{\beta}, \ldots, P^{\nu}$ verbunden bilden eine k-dimensionale Reihe von Gruppen von S^{n+1}; sie heisse $s^{\alpha,\beta\ldots\nu}_{n+1,k}$. Aus einer Reihe $r_{k,k-1}$ von S^k geht hierbei eine Reihe $s^{\alpha,\beta\ldots\nu}_{n+1,k-1}$ hervor; $r_{k,k-1}$ heisse „die $(1+n-k)$te Grundreihe".

Zwei singuläre Reihen $s^{\alpha}_{n+1,n}$ und $s^{\beta}_{n+1,n}$ haben die Gruppen einer Reihe $s^{\alpha\beta}_{n+1,n-1}$ gemein, welche alle die Punkte P^{α} und P^{β} enthalten. $s^{\alpha\beta}_{n+1,n-1}$ hat zwei Grundreihen $s^{\beta}_{n,n-1}$ und $s^{\alpha}_{n,n-1}$, je nachdem sie zu $s^{\alpha}_{n+1,n}$ oder zu $s^{\beta}_{n+1,n}$ gerechnet wird.

Zu den Voraussetzungen von § 4 fügen wir noch folgende hinzu:

V. Jede Reihe $r_{k,k-1}$ hat mit einer Reihe $s^{\nu}_{k,k-1}$ die Gruppen einer Reihe $s^{\nu}_{k,k-2}$ gemein, welche eine Reihe $r_{k-1,k-2}$ von S^{k-1} zur Grundreihe hat. Die Reihen $r_{k,k-1}$ eines Büschels β_{k1} haben mit $s^{\nu}_{k,k-1}$ Reihen $s^{\nu}_{k,k-2}$ gemein, deren Grundreihen einen Büschel $\beta_{k-1,1}$ bilden. Umgekehrt begründet jede Reihe $r_{k-1,k-2}$ von S^{k-1} eine Reihe $s^{\nu}_{k,k-2}$, deren Gruppen den Reihen $r_{n,n-1}$ eines Büschels β_{n1} gemeinsam sind.

Diese Voraussetzung, welche für $k=3$ gilt, sei für $k \leqq n$ angenommen.

Aus der Voraussetzung folgt: Die Reihen $r_{k,k-1}$ von S^k, welche von $s^{\nu}_{k,k-1}$ Reihen $s^{\nu}_{k,k-2}$ enthalten, deren Grundreihen einen Büschel $\beta_{k-1,1}$ bilden, bilden selbst ein Bündel β_{k2}. Denn irgend zwei solcher Reihen $r_{k,k-1}$ bestimmen einen Büschel β_{k1}; die Reihen, welche die Reihen dieses Büschels mit $s^{\nu}_{k,k-1}$ gemeinsam haben, haben die Reihen $r_{k-1,k-2}$ jenes Büschels $\beta_{k-1,1}$ zu Grundreihen. Der Büschel β_{k1} bestimmt mit $s^{\nu}_{k,k-1}$ das fragliche Bündel β_{k2}.

Hieraus folgt: Eine Reihe $r_{k,k-1}$ hat mit $s^{\mu\nu}_{k,k-2}$, der gemeinsamen Reihe von $s^{\mu}_{k,k-1}$ und $s^{\nu}_{k,k-1}$, eine Reihe $s^{\mu\nu}_{k,k-3}$ gemein, welche aus den gemeinsamen Gruppen der Reihen $r_{k,k-1}$ eines Bündels β_{k2} besteht.

Eine Reihe $s^{\nu}_{n+1,n-1}$ hat nach dem Vorigen mit der Reihe $s^{\mu\nu}_{n+1,n-1}$ eine Reihe $s^{\mu\nu}_{n+1,n-1}$ und mit $s^{\mu\nu\lambda}_{n+1,n-2}$ eine Reihe $s^{\mu\nu\lambda}_{n+1,n-3}$ gemein.

Satz): Haben drei Reihen $S^{0}_{n+1,n-1}$, $S^{1}_{n+1,n-1}$ und $S^{\alpha}_{n+1,n-1}$ eine mit der anderen je eine verschiedene Reihe $s_{n+1,n-2}$ gemein, so ist jeder vierten Reihe $S^{\beta}_{n+1,n-1}$, welche von $S^{0}_{n+1,n-1}$ und $S^{1}_{n+1,n-1}$ je eine $s^{\beta i}_{n+1,n-2}$ enthält, eine Reihe $s^{\alpha\beta}_{n+1,n-1}$ mit $S^{\beta}_{n+1,n-1}$ gemeinsam.*

---

*) Siehe Note 2.

Beweis: Die Reihen $r_{n,n-1}$ eines Büschels B^0_{n1}, welchem die Grundreihe von $S^0_{n+1,n-1}$ angehört, enthalten von $s^1_{n,n-1}$ (der Grundreihe von $s^{01}_{n+1,n-1}$ für $s^0_{n+1,n}$) Reihen $s^1_{n,n-2}$, deren Grundreihen $r_{n-1,n-2}$ einen Büschel $B_{n-1,1}$ bilden. Die Reihen von $B_{n-1,1}$ begründen ein Bündel von Reihen $s^0_{n,n-2}$. Irgend eine Reihe $r_{n,n-1}$, welche eine dieser $s^0_{n,n-2}$ enthält, bestimmt mit der Grundreihe von $S^1_{n+1,n-1}$ (diese enthält ebenfalls eine $s^0_{n,n-2}$ dieses Büschels) einen Büschel B^1_{n1}; die zweiten Grundreihen derselben machen $B_{n-1,1}$ aus. Die Büschel B^0_{n1} und B^1_{n1} begründen einen Büschel b^0 von Reihen $s^0_{n+1,n-1}$ und einen b^1 von Reihen $s^1_{n+1,n-1}$. Je eine Reihe von b^0 enthält mit einer Reihe von b^1 eine zu $s^{01}_{n+1,n-1}$ gehörige Reihe $s^{01}_{n+1,n-2}$. Alle diese $s^{01}_{n+1,n-2}$ bilden den Büschel B^{01}. Gleicherweise bestimmen b^0 und b^1 einen Büschel $B^{0\alpha}$ und einen $B^{1\alpha}$ von Reihen $s^{0\alpha}_{n+1,n-2}$ resp. $s^{1\alpha}_{n+1,n-2}$. Durch die Reihen von b^0 werden die Reihen von B^{01} und $B^{0\alpha}$ eindeutig einander zugeordnet, ebenso durch b^1 die Reihen von B^{01} und $B^{0\beta}$. Hierdurch wiederum ist jeder Reihe von $B^{0\alpha}$ eine Reihe von $B^{0\beta}$ zugewiesen. $s^{0\alpha}_{n+1,n-1}$ und $s^{\alpha 1}_{n+1,n-1}$ haben die Reihe $s^{01\alpha}_{n+1,n-2}$ gemein. Zwei entsprechende Reihen von $B^{0\alpha}$ und $B^{1\alpha}$ enthalten von $s^{01\alpha}_{n+1,n-2}$ dieselbe $s^{01\alpha}_{n+1,n-3}$ ($s^{01\alpha}_{n+1,n-2}$ ist die gemeinschaftliche Reihe der drei Reihen $s^0_{n+1,n}$, $s^1_{n+1,n}$ und $s^\alpha_{n+1,n}$). $s^{01\alpha}_{n+1,n-2}$ hat als Reihe von $s^\alpha_{n+1,n}$ die Grundreihe $s^{01}_{n,n-2}$; die Grundreihen je zweier entsprechender Reihen von $B^{0\alpha}$ und $B^{1\alpha}$ (in Bezug auf $s^\alpha_{n+1,n}$) enthalten von $s^{01}_{n,n-2}$ dieselbe $s^{01}_{n,n-3}$, sie sind daher je in einer Reihe $r_{n,n-1}$ enthalten (dies folgt aus der Folgerung von Voraussetzung V). Das Bündel der Reihen $r_{n,n-1}$, welche die Grundreihen der Reihen $s^{0\alpha}_{n+1,n-2}$ von $B^{0\alpha}$ enthalten, hat folglich mit dem Bündel, das in derselben Beziehung zu $B^{1\alpha}$ steht, mehr als eine $r_{n,n-1}$, d. h. einen Büschel B^α_{n1} gemein. Dies giebt: Die entsprechenden Reihen von $B^{0\alpha}$ und $B^{1\alpha}$ sind je in einer Reihe $s^\alpha_{n+1,n-1}$ enthalten; diese Reihen $s^\alpha_{n+1,n-1}$ bilden einen Büschel b^α, der sich auf den Büschel B^α_{n1} gründet. (Der Fall, in welchem die Reihen von B^{01} insgesammt dieselbe Reihe $s^{01\alpha}_{n,n-3}$ enthalten, sei hier ausgeschlossen).

Tritt an die Stelle von $s^\alpha_{n+1,n}$ die Reihe $s^\beta_{n+1,n}$, so erhält man gleicherweise ein Bündel, b^β, von Reihen $s^\beta_{n+1,n-1}$, welche sich auf die Reihen $r_{n,n-1}$ eines Büschels B^β_{n1} gründen. Wie jeder Reihe von b^α, so ist auch jeder Reihe von b^β eine Reihe von b^0 und b^1 eindeutig zugeordnet. b^α und b^β bestimmen zwei Büschel $B^{\alpha\beta}$ und $'B^{\alpha\beta}$ von Reihen $s^{\alpha\beta}_{n+1,n-1}$ ($B^{\alpha\beta}$ habe analoge Bedeutung wie B^{01}). Jeder Reihe von $B^{\alpha\beta}$ ist eine Reihe von $'B^{\alpha\beta}$ zugeordnet; jeder Reihe $s^{\alpha\beta}_{n+1,n-2}$ von $B^{\alpha\beta}$ resp. $'B^{\alpha\beta}$ ist eine Reihe $s^0_{n+1,n-1}$ von

b^0 und eine $s^1_{n+1,n-1}$ von b^1 zugewiesen. Zwei zugeordnete Reihen von $B^{\alpha\beta}$ und $'B^{\alpha\beta}$ enthalten von $s^{\alpha\beta 0}_{n+1,n-2}$, der gemeinsamen Reihe von $s^0_{n+1,n}$ und $s^{\alpha\beta}_{n+1,n-1}$ je dieselbe Reihe $s^{\alpha\beta 0}_{n+1,n-3}$, nämlich diejenige, welche die entsprechende Reihe $s^0_{n+1,n-1}$ von b^0 mit $s^{\alpha\beta 0}_{n+1,n-2}$ gemeinsam hat. Ebenso enthalten zwei zugeordnete Reihen von $B^{\alpha\beta}$ und $'B^{\alpha\beta}$ auch dieselbe Reihe $s^{1\alpha\beta}_{n+1,n-3}$. Die Reihen von $B^{\alpha\beta}$ fallen daher mit denen von $'B^{\alpha\beta}$ zusammen (wofern nicht jede $s^{0\alpha\beta}_{n+1,n-3}$ mit $s^{01\alpha\beta}_{n+1,n-3}$ zusammenfällt, ein Fall, welcher sich, wie man sich leicht überzeugt, durch die Wahl von b^0 vermeiden lässt). Denn durch die zweiten Grundreihen von einer $s^{0\alpha\beta}_{n+1,n-3}$ und einer $s^{1\alpha\beta}_{n+1,n-3}$ sind (Vorauss. V.) zwei Büschel $\beta_{n-1,1}$ von Reihen $r_{n-1,n-2}$ bestimmt, welche höchstens eine $r_{n-1,n-2}$ gemein haben (wären die Grundreihen identisch, so müsste offenbar $s^{0\alpha\beta}_{n+1,n-3}$ gleich $s^{01\alpha\beta}_{n+1,n-3}$ sein). Eine Reihe von b^α hat folglich mit einer Reihe von b^β eine Reihe $s^{\alpha\beta}_{n+1,n-2}$ gemein, wenn beide mit einer Reihe von b^0 und derjenigen Reihe von b^1, welche mit ihr dieselbe $s^{01}_{n+1,n-2}$ von B^{01} enthält, je eine Reihe $s^{i\alpha}_{n+1,n-2}$ resp. $s^{i\beta}_{n+1,n-2}$ gemein haben ($i = 0, 1$). Hiermit ist der Satz bewiesen.

§ 5a.

Die Gruppen der Reihen $s^{\xi}_{n+1,n-1}$, welche mit den Reihen $S^0_{n+1,n-1}$ und $S^1_{n+1,n-1}$ je eine Reihe $s^{0\xi}_{n+1,n-2}$ resp. $s^{1\xi}_{n+1,n-2}$ gemein haben, bilden eine Reihe $r_{n+1,n}$; dieselbe ist in den Gruppen von einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit. An die Stelle von $S^0_{n+1,n-1}$ und $S^1_{n+1,n-1}$ können offenbar irgend zwei andere Reihen $s^{\xi}_{n+1,n-1}$, welche in $r_{n+1,n}$ enthalten sind, treten. Jede Reihe $s^r_{n+1,n}$ hat mit $r_{n+1,n}$ eine Reihe $s^r_{n+1,n-1}$ gemein (dies folgt aus dem Beweise des vorigen Paragraphen); dieselbe enthält die gemeinsame Reihe von $s^r_{n+1,n}$ mit $S^0_{n+1,n-1}$.

Hat die Reihe $S^0_{n+1,n-1}$ mit $s^{01}_{n+1,n-1}$ die Reihe $S^{01}_{n+1,n-2}$ gemein, so geben die Reihen $s^1_{n+1,n-1}$, welche $S^{01}_{n+1,n-2}$ enthalten, (an Stelle von $S^1_{n+1,n-1}$ tretend) Grund zu einfach unendlich vielen Reihen $r_{n+1,n}$. Die Reihen $r_{n+1,n}$ bilden daher eine $(n+1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Zu n beliebigen Punkten giebt es im Allgemeinen eine und nur eine Gruppe einer $r_{n+1,n}$, welche dieselben enthält. Die Punkte seien mit $P^1, P^2, \ldots, P^n$ bezeichnet. $r_{n+1,n}$ hat mit $s^1_{n+1,n}$ eine Reihe $s^1_{n+1,n-1}$ gemein. Die Grundreihe von $s^1_{n+1,n-1}$ enthält nach Vorauss. I. im Allgemeinen eine Gruppe von n Punkten, zu welcher die $n-1$ Punkte $P^2, P^3, \ldots, P^n$ gehören. Letztere Gruppe bildet mit dem Punkte t die fragliche $(n+1)$-Punktegruppe. (Dies ist die einzige Gruppe, da jede solche der Reihe

$s^1_{n+1,n-1}$ angehören müsste.) — Die Reihen $r_{n+1,n}$ besitzen somit alle in der Vorauss. I. den Reihen $r_{k,k-1}$ zugeschriebenen Eigenschaften.

Da die Grundreihen der Reihen $s^{0\xi}_{n+1,n-1}$ für $s^0_{n+1,n}$ specielle Reihen $r_{n,n-1}$ (Vorauss. II.) sind, so sind die Reihen $s^r_{n+1,n}$ specielle Reihen $r_{n+1,n}$. Vorauss. II.

Büschel $\beta_{n+1,1}$: Die Reihen $s^0_{n+1,n-1}$ eines Büschels b^0, welche sich auf die Reihen $r_{n,n-1}$ eines Büschels β_{n1} gründen, bestimmen mit den Reihen $s^1_{n+1,n-1}$ eines Büschels b^1, deren Grundreihen ebenfalls einen Büschel β_{n1} bilden, einen Büschel $\beta_{n+1,1}$ von Reihen $r_{n+1,n}$, wofern je eine $s^0_{n+1,1}$ von b^0 mit einer $s^1_{n+1,1}$ von b^1 eine Reihe $s^{01}_{n+1,n-2}$ gemein hat. — $\beta_{n+1,1}$ ist durch irgend zwei seiner Reihen $r_{n+1,1}$ bestimmt. Denn die beiden Reihen $s^0_{n+1,n-1}$, welche sie mit $s^0_{n+1,n}$ gemein haben, bestimmen den Büschel b^0 (ihre Grundreihen bestimmen einen Büschel β_{n1}); dasselbe gilt von b^1. — Durch irgend eine Gruppe von $n+1$ Punkten ist im Allgemeinen eine Reihe von $\beta_{n+1,1}$ bestimmt, welche sie enthält. Einer der Punkte sei das Haupt von $s^\alpha_{n+1,n}$. Die Reihen $s^\alpha_{n+1,n-1}$, welche den Reihen $r_{n+1,n}$ von $\beta_{n+1,1}$ angehören, bilden einen Büschel b^α, ihre Grundreihen einen Büschel β_{n1}. Es besitzt β_{n1} eine Reihe $r_{n,n-1}$, welcher die n-Punktegruppe aus den übrigen n Punkten zugehört. Durch diese Reihe ist eine $s^\alpha_{n+1,n}$ und durch sie wieder eine Reihe $r_{n+1,n}$ von $\beta_{n+1,1}$ bestimmt. Da jede $s^r_{n+1,n}$, welcher die $(n+1)$-Punktegruppe angehört, nur eine Reihe $s^r_{n+1,n-1}$ mit dieser Gruppe besitzt und jene Reihe $r_{n+1,n}$ von $s^r_{n+1,n}$ eine solche $s^r_{n+1,n-1}$ enthält, so giebt es nur eine derartige $r_{n+1,n}$ (Ausnahme: die Gruppe gehört allen Reihen von $\beta_{n+1,1}$ an). — Den Büscheln $\beta_{n+1,1}$ kommen die Eigenschaften zu, welche Vorauss. III. über β_{k1} aussagt. — Man erkennt leicht: Zwei $r_{n+1,n}$, welche dieselbe Reihe $s^r_{n+1,n-1}$ enthalten, bestimmen einen Büschel $\beta_{n+1,1}$, dessen Reihen diese $s^r_{n+1,n-1}$ gemeinsam angehört. Hieraus und aus der Ableitung der $r_{n+1,n}$ ergiebt sich, dass die Vorauss. V. für $k=n+1$ gilt.

Bündel $\beta_{n+1,2}$: Drei Reihen $s^0_{n+1,n-1}$ bestimmen ein Bündel B^0 von Reihen $s^0_{n+1,n-1}$, welche sich auf die Reihen $r_{n,n-1}$ eines Bündels B_{n2} gründen. Ebenso bestimmen drei Reihen $s^1_{n+1,n-1}$, von welchen jede mit einer der drei $s^0_{n+1,n-1}$ eine Reihe $s^{01}_{n+1,n-2}$ gemeinsam habe, ein Bündel B^1. Aus Vorauss. V. erkennt man leicht, dass jede Reihe $s^0_{n+1,n-1}$ von B^0 mit einer $s^1_{n+1,n-1}$ von B^1 eine $s^{01}_{n+1,n-2}$ enthält. Die Bündel B^0 und B^1 bestimmen daher zweifach unendlich viele $r_{n+1,n}$, welche ein Bündel $\beta_{n+1,2}$ bilden. Jede Reihe $s^0_{n+1,n-1}$ von B^0 gehört einer $r_{n+1,n}$ von $\beta_{n+1,2}$ an (und umgekehrt);

die Reihen $s^0_{n+1,n-1}$ eines Büschels b^0 gehören den Reihen $r_{n+1,n}$ eines Büschels $\beta_{n+1,1}$ von $\beta_{n+1,2}$ an. Hierdurch ist das Bündel $\beta_{n+1,2}$ derartig auf das Grundreihenbündel B_{n2} von B^0 bezogen, dass jeder Reihe $r_{n+1,n}$ von $\beta_{n+1,2}$ eine Reihe $r_{n,n-1}$ von B_{n2} und jedem Büschel $\beta_{n+1,1}$ ein Büschel β_{n1} zugeordnet ist. Hieraus folgt: Trifft die Voraussetzung IV. für den Fall $k=n$ zu, so thut sie es auch im Falle $k=n+1$.

§ 6.

Reihen niederer Stufe *).

Durch das System S^n sind die Reihen $s^0_{n+1,n}$ und $s^1_{n+1,n}$ „collinear" auf einander bezogen, indem zwei Reihen $s^0_{n+1,n-1}$ und $s^1_{n+1,n-1}$ mit derselben Grundreihe $r_{n,n-1}$ einander zugeordnet sind. Die Reihen $s^\xi_{n+1,n}$ enthalten diejenigen einander zugeordneten Reihen $s_{n+1,n-1}$, welche je eine Reihe $s^{01}_{n+1,n-2}$ gemein haben. Die Reihen $s^\xi_{n+1,n}$ bilden einen Büschel $(n+1)$ten Grades, d. h. jedes Bündel $\beta_{n+1,n}$ enthält höchstens $n+1$ Reihen $s^\xi_{n+1,n}$. Die Reihen $r_{n+1,n}$, welchen eine $(n+1)$-Punktegruppe (eigentliche) gemeinsam ist, bilden ein Bündel $\beta_{n+1,n}$, welchem die $n+1$ Reihen $s^\nu_{n+1,n}$, die je einen der Punkte der Gruppe zum Haupte haben, angehören. Die Reihen $r_{n+1,n}$ eines Bündels $B_{n+1,n}$ beziehen im Allgemeinen die Reihe $s^0_{n+1,n}$ „collinear" auf die Reihe $s^1_{n+1,n}$, d. h. jeder Reihe $s^0_{n+1,n-1}$ wird eine Reihe $s^1_{n+1,n-1}$ und den Reihen eines Büschels b^0 werden die Reihen eines Büschels b^1 zugeordnet und umgekehrt. Durch diese und die vorhergehende collineare Beziehung von $s^0_{n+1,n}$ auf $s^1_{n+1,n}$ ist eine collineare Beziehung von $s^0_{n+1,n}$ auf sich selbst bestimmt. Jede Reihe $s^0_{n+1,n-1}$, welche hierbei sich selbst entspricht, ist offenbar eine $s^{0\xi}_{n+1,n-1}$. Da es aber keine n Reihen $s^{0\xi}_{n+1,n-1}$ giebt, deren Grundreihen für $s^0_{n+1,n}$ demselben Bündel $\beta_{n,n-2}$ angehörten (sie bestimmen eine n-Punktegruppe, also ein Bündel $\beta_{n,n-1}$), so fallen höchstens $n+1$ einander entsprechende Reihen $s^0_{n+1,n-1}$ zusammen (§§ 4, 10). Jede solche Reihe bestimmt eine zu $B_{n+1,n}$ gehörige Reihe $s^\nu_{n+1,n}$.

Die Gruppen, welche den Reihen $r_{n+1,n}$ eines Bündels $\beta_{n+1,n-\lambda}$ gemeinsam angehören, bilden eine λ-dimensionale $(n+1)$-Punktereihe $r_{n+1,\lambda}$ (dieselbe ist in den Gruppen von einer λ-dimensionalen Mannigfaltigkeit). λ beliebige Punkte $P^1, P^2, \ldots, P^\lambda$ sind in einer und nur einer Gruppe von $r_{n+1,\lambda}$ (im Allgemeinen) enthalten. Die Gruppe heisse eine eigentliche oder

*) Zu dem Folgenden ist die Note 3 über die Definition von Gruppen zu beachten.

uneigentliche (Missgruppe), je nachdem sie $n+1$ oder weniger Punkte enthält; hierbei kommt es vor, dass ein Punkt für mehrere gerechnet werden muss. — Die Reihen von $\beta_{n+1,n-\lambda}$ haben mit $s^1_{n+1,n}$ Reihen $s^1_{n+1,n-1}$ gemein, deren Grundreihen $r_{n,n-1}$ ein Bündel $\beta_{n,n-\lambda}$ bilden; die Reihen von $\beta_{n,n-\lambda}$ wiederum enthalten von $s^2_{n,n-1}$ Reihen $s^2_{n,n-2}$, deren Grundreihen $r_{n-1,n-2}$ ein Bündel $\beta_{n-1,n-\lambda}$ ausmachen, u. s. f.; schliesslich gelangt man auf diese Weise zu einem Bündel $\beta_{n-\lambda+1,n-\lambda}$ von Reihen $r_{n-\lambda+1,n-\lambda}$; diese Reihen können eine $(n-\lambda+1)$-Punktegruppe gemeinsam enthalten. Die λ Punkte P^1, P^2, ..., P^λ bilden mit dieser $(n-\lambda+1)$-Punktegruppe eine $(n+1)$-Punktegruppe von $r_{n+1,n-\lambda}$. Ist letztere Gruppe eine uneigentliche, so ist sie durch jenes Bündel $\beta_{n-\lambda+1,n-\lambda}$ charakterisirt.

Aus den Sätzen über die Netze von Bündeln $\beta_{k,k-1}$ folgt: Eine Reihe $r_{k,\lambda}$ des k-Punktesystems S^k einer Geraden ist durch $\lambda+1$ Gruppen, die nicht zugleich einer Reihe $r_{k,\lambda-1}$ angehören, bestimmt (der Satz gilt auch von uneigentlichen Gruppen, wenn wir uns dieselben durch Bündel $\beta_{k,k-1}$ charakterisirt denken). Zwei Reihen $r_{k\mu}$ und $r_{k\varrho}$ haben, wenn $r_{k\lambda}$ die Reihe der niedrigsten Stufe ist, welche beide enthält, eine Reihe $r_{k,\varrho+\mu-\lambda}$ gemein; für den Fall $\varrho+\mu=\lambda$ enthalten $r_{k\mu}$ und $r_{k\varrho}$ eine gemeinsame Gruppe. Hiervon gilt auch die Umkehrung. Zwei Reihen $r_{k\lambda}$ sind collinear [reciprok] verwandt, wenn jeder Gruppe der einen eine Gruppe [Reihe $r_{k,\lambda-1}$] der anderen und jeder Reihe r_{k1} von Gruppen der einen eine Reihe r_{k1} [Reihen $r_{k,\lambda-1}$, die eine $r_{k,\lambda-2}$ gemein haben], der anderen zugeordnet ist [sind], (hierbei ist wieder eine Missgruppe durch ein Bündel $\beta_{k,k-1}$ charakterisirt gedacht). Die collineare Beziehung ist durch die Zuordnung von $\lambda+2$ Gruppen der einen Reihe zu $\lambda+2$ Gruppen der anderen bestimmt, wofern keine $\lambda+1$ derselben, die zu einer der beiden Reihen gehören, in der nämlichen Reihe $r_{k,\lambda-1}$ enthalten sind. Analoges gilt für die reciproke Beziehung.

Eine Gruppe des k-Punktesystems S^k einer Geraden ist im Folgenden immer als durch ein Bündel $\beta_{k,k-1}$ von Reihen $r_{k,k-1}$ charakterisirt gedacht (bisher haben wir, wenn es nicht ausdrücklich bemerkt war, nur von vollständigen Gruppen gehandelt); sie besteht aus den Punkten, welche je das Haupt einer zum Bündel gehörigen singulären Reihe $s_{k,k-1}$ bilden.

Unter einem Bündel $\beta_{k\lambda}$ sei von jetzt ab die Gesammtheit der eine Reihe $r_{k,k-\lambda-1}$ enthaltenden Reihen höherer Stufe begriffen; $r_{k,k-\lambda-1}$ heisse der „Stock“ des Bündels (r_{k0} bedeutet eine Gruppe). Alle Reihen eines Bündels $\beta_{k\lambda}$, welche in einer Reihe $r_{k\mu}$ enthalten sind, bilden ein Bündel

${}_{\mu}\beta_{\mu\varrho}$, der ϱ-fach unendlich viele Reihen $r_{k,\mu-1}$ enthält; alle Reihen desselben haben die gemeinschaftliche Reihe von $r_{k\mu}$ und dem Stock von $\beta_{k\lambda}$ gemein; ist diese von der νten Stufe, so ist $\varrho = \mu - \nu - 1$. Die Bündel ${}_{\mu}\beta_{k\varrho}$ einer Reihe $r_{k\mu}$ zeigen unter einander dasselbe Verhalten wie die Bündel $\beta_{k\varrho}$.

Reihe und Bündel sei unter dem Begriff Grundaggregat eines Punktesystems zusammengefasst. Die Reihen der niedrigsten und der höchsten Stufe in einem Grundaggregat heissen seine Elemente (die Gruppe als Reihe 0ter Stufe aufgefasst). Gleichartig sind zwei Elemente, wenn beide durch Reihen der niedrigsten oder beide durch Reihen der höchsten Stufe repräsentirt werden, ungleichartig, wenn das eine aus einer Reihe von der niedrigsten, das andere von der höchsten Stufe besteht.

Zwei Grundaggregate von demselben oder von verschiedenen Punktsystemen sind collinear bezw. reciprok verwandt, wenn jedem Element des einen ein gleichartiges bezw. ungleichartiges Element des anderen und den Elementen eines Grundaggregates erster Stufe des einen die Elemente eines Grundaggregates erster Stufe vom anderen zugeordnet sind (${}_{\mu}\beta_{k1}$ gilt hierbei als Grundaggregat erster Stufe).

Die collineare bezw. reciproke Beziehung zweier Grundaggregate ϱter Stufe ist durch die Zuordnung von $\varrho+2$ Elementen des einen zu $\varrho+2$ gleichartigen bezw. ungleichartigen des anderen bestimmt. (Dies folgt aus Früherem, indem an die Stelle des Netzes ϱter Stufe von Bündeln die Reihe $r_{k\varrho}$ tritt.)

§ 7.

Band und Kette*).

1. Die Reihen $r_{k\varrho}$, welche entsprechende Reihen $r_{k,\varrho-1}$ zweier in derselben Reihe $r_{k,\varrho+1}$ enthaltenen collinear verwandten Reihen $r_{k\varrho}$ enthalten, bilden im Allgemeinen einen Büschel $(\varrho+1)$ter Ordnung; d. h. jedem Bündel ${}_{\varrho+1}\beta_{k\varrho}$ von $r_{k,\varrho+1}$ gehören höchstens $\varrho+1$ solcher Reihen an. — Die singulären Reihen $s_{k\varrho}$ mit $n-\varrho$ Häuptern, welche in einer $s_{n,\varrho+1}$ enthalten sind, bilden, wie man sich leicht überzeugt, einen solchen Büschel $(\varrho+1)$ter Ordnung.

2. Eine Reihe $r_{l,\varrho+1}$ lässt sich derart auf eine Reihe $r_{k,\varrho+1}$ collinear beziehen, dass die Reihen eines bestimmten Büschels $(\varrho+1)$ter Ordnung

*) Siehe Note 4. Vergl. die oben angeführte Abhandlung von *Kötter*, S. 136 u. f.

von der obigen Art den Reihen eines vorgegebenen Büschels $(\varrho+1)$ter Ordnung entsprechen. Zur Herstellung einer solchen Beziehung steht die Zuordnung von irgend drei Reihen des einen Büschels zu irgend dreien des anderen frei.

Beweis: Der Büschel $(\varrho+1)$ter Ordnung B_k enthalte die Reihen $r_{k\varrho}$, welche entsprechende Reihen der collinear verwandten Reihen ${}^0R_{k\varrho}$ und ${}^1R_{k\varrho}$ enthalten. Das Analoge sei mit dem Büschel $(\varrho+1)$ter Ordnung B_l in Bezug auf ${}^0R_{l\varrho}$ und ${}^1R_{l\varrho}$ der Fall. ${}^0R_{k\varrho}$ und ${}^1R_{k\varrho}$ seien in $R_{k,\varrho+1}$ enthalten, ${}^0R_{l\varrho}$ und ${}^1R_{l\varrho}$ in $R_{l,\varrho+1}$. ${}^{01}R_{k,\varrho-1}$ und ${}^{01}R_{l,\varrho-1}$ sind die gemeinsamen Reihen von ${}^0R_{k\varrho}$ und ${}^1R_{k\varrho}$, bezw. ${}^0R_{l\varrho}$ und ${}^1R_{l\varrho}$.

Die Reihen $r_{k,\varrho-1}$, welche die Reihen von B_k mit ${}^0R_{k\varrho}$ gemein haben, bilden einen Büschel ϱter Ordnung b_k; derselbe besteht aus den Reihen $r_{k,\varrho-1}$, welche entsprechende Reihen $r_{k,\varrho-2}$ von ${}^{01}R_{k,\varrho-1}$ und der ihr als Reihe von ${}^1R_{k\varrho}$ zugeordneten Reihe ${}^{00}R_{k,\varrho-1}$ von ${}^0R_{k\varrho}$ enthalten. Gleicherweise bestimmt B_l mit ${}^0R_{l\varrho}$ einen Büschel b_l von Reihen $r_{l,\varrho-1}$, welche entsprechende Reihen der einander zugeordneten Reihen ${}^{01}R_{l,\varrho-1}$ und ${}^{00}R_{l,\varrho-1}$ vereinigen.

Wir setzen jetzt den zu beweisenden Satz für die Büschel von kleinerem Grade wie $\varrho+1$ als gültig voraus und nehmen an, dass den zur Erzeugung eines solchen Büschels dienenden Reihen unter den Reihen des Büschels keine Ausnahmestellung zukommt. Ordnet man den Reihen ${}^{01}R_{k,\varrho-1}$, ${}^{00}R_{k,\varrho-1}$ und einer beliebigen Reihe $R_{k,\varrho-1}$ von b_k die Reihen ${}^{01}R_{l,\varrho-1}$ bezw. ${}^{00}R_{l,\varrho-1}$ bezw. $R_{l,\varrho-1}$ (ebenfalls eine beliebig gewählte Reihe von b_l) zu, so ist hiernach eine collineare Verwandtschaft zwischen ${}^0R_{k\varrho}$ und ${}^0R_{l\varrho}$ bestimmt, in welcher jeder Reihe von b_k eine Reihe von b_l entspricht. Durch die collineare Verwandtschaft von ${}^0R_{k\varrho}$ zu ${}^1R_{k\varrho}$ und von ${}^0R_{l\varrho}$ zu ${}^1R_{l\varrho}$ ist ${}^1R_{k\varrho}$ derartig auf ${}^1R_{l\varrho}$ bezogen, dass ${}^{01}R_{k,\varrho-1}$ der Reihe ${}^{01}R_{l,\varrho-1}$ entspricht (dies folgt aus der Zuordnung von ${}^{00}R_{k,\varrho-1}$ zu ${}^{00}R_{l,\varrho-1}$). In dieser Verwandtschaft ist ${}^{01}R_{k,\varrho-1}$ gerade so auf ${}^{01}R_{l,\varrho-1}$ collinear bezogen, wie durch die collineare Verwandtschaft von ${}^0R_{k\varrho}$ zu ${}^0R_{l\varrho}$; denn offenbar entspricht jeder Reihe $r_{k,\varrho-2}$, welche eine Reihe von B_k mit ${}^{01}R_{k,\varrho-1}$ gemein hat, beidemal dieselbe Reihe $r_{l,\varrho-2}$, die ebenso einer Reihe von B_l und der Reihe ${}^{01}R_{l,\varrho-1}$ gemeinsam ist. Durch die beiden Beziehungen von ${}^iR_{k,\varrho}$ auf ${}^iR_{l,\varrho}$ $(i=0,1)$ ist daher eine collineare Verwandtschaft von $R_{k,\varrho+1}$ zu $R_{l,\varrho+1}$ bestimmt, in welcher den Reihen von B_k die Reihen von B_l zugeordnet sind. — Besteht B_l aus singulären Reihen $s_{l,\varrho}$ mit $l-\varrho$ Häuptern, so folgt für B_k, dass die

Reihen ${}^0R_{k,\varrho}$ und ${}^1R_{k\varrho}$ unter seinen Reihen keine Sonderstellung einnehmen. — Der zu beweisende Satz gilt somit für die Büschel $(\varrho+1)$ten Grades von der in 1. angegebenen Art, wofern er für die Büschel ϱten Grades gilt. Ohne Weiteres erkennt man aber seine Gültigkeit für $\varrho = 3$.

3. Ein Büschel ϱter Ordnung, der nach der in 1. angegebenen Art erzeugt wird, heisse fernerhin *„ein Band ϱter Ordnung“*; dasselbe ist durch $3+\varrho$ seiner Reihen bestimmt.

4. Die Reihen r_{k1}, welche entsprechende Gruppen zweier collinear verwandten und zu derselben Reihe $r_{k,\varrho}$ gehörigen Reihen $r_{k,\varrho-1}$ in sich vereinigen, sind durch die Reihen $r_{k,\varrho-1}$ des durch die Verwandtschaft bestimmten Bandes projectivisch auf einander bezogen („projectivisch auf einander bezogen“ sind zwei Reihen r_{k1}, die in einer collinearen Verwandtschaft von Reihen höherer Stufe einander zugeordnet sind“); solche Reihen r_{k1} mögen „Axreihen“ des Bandes heissen.

Beweis: Die Reihen R'_{k1} und R''_{k1} vereinigen je zwei entsprechende Gruppen der collinear verwandten Reihen ${}^0R_{k,\varrho-1}$ und ${}^1R_{k,\varrho-1}$, durch deren Verwandtschaft das Band ϱter Ordnung B erzeugt wird. R'_{k1} und R''_{k1} seien in der Reihe dritter Stufe R_{k3} enthalten. Die beiden Reihen ${}^iR_{k1}$ $(i = 0, 1)$, welche je die gemeinsamen Gruppen von ${}^iR_{k,\varrho-1}$ mit R'_{k1} und R''_{k1} enthalten, gehören ebenfalls R_{k3} an. Den Reihen r_{k1}, welche entsprechende Gruppen von ${}^0R_{k1}$ und ${}^1R_{k1}$ aufnehmen, entsprechen in der Beziehung von R_{k3} auf den Raum die Geraden der einen Schaar einer Regelfläche. Jede Reihe von B enthält offenbar eine solche r_{k1}. Nehmen wir für das Band $(\varrho-1)$ter Ordnung an, dass jede Gruppe einer seiner Axreihen nur einer Reihe des Bandes angehört, die diese Axreihe nicht enthält, so gilt dies auch für das Band ϱter Ordnung. Da diese Annahme für $\varrho = 3$ zutrifft, so ist jede Reihe r_{k1}, welche einer Geraden der anderen Schaar von obiger Regelfläche entspricht, in einer und nur einer Reihe $r_{k,\varrho-1}$ von B enthalten. Durch diese Reihen werden aber R'_{k1} und R''_{k1} projectivisch auf einander bezogen; hiermit ist der Satz bewiesen.

Eine Reihe r_{k1}, welche in $\varrho-1$ einem Bande ϱter Ordnung angehörigen Reihen enthalten ist, ist eine Axreihe d sselben.

Aus dem vorigen Beweise folgt, dass die Reihen r_{k1}, welche die entsprechenden Gruppen von ${}^0R_{k,\varrho-1}$ und ${}^1R_{k,\varrho-1}$ vereinigen, irgend zwei andere Reihen von B collinear auf einander beziehen (jeder Reihe r_{k1} ist wieder eine r_{k1} zugeordnet). Diese collineare Beziehung ist dieselbe, welche

bei Zugrundelegung dieser Reihen zur Erzeugung von B dient. Setzt man daher an die Stelle von ${}^0R_{k,\varrho-1}$ und ${}^1R_{k,\varrho-1}$ irgend zwei andere Reihen von B, so erhält man immer dieselben Axreihen.

5. Die Reihen $r_{k,\varrho-1}$, welche die entsprechenden Gruppen von ϱ beliebigen projectivisch auf einander bezogenen Reihen r_{k1}, die derselben Reihe $r_{k\varrho}$ angehören, in sich schliessen, bilden im Allgemeinen ein Band ϱter Ordnung.

Beweis. ${}^0R_{k1}$ sei eine von ϱ solchen Reihen r_{k1}, die in der Reihe $R_{k\varrho}$ enthalten sind. ${}^0R_{k,\varrho-1}$ enthalte von diesen Reihen r_{k1} Gruppen, die einander zugeordnet sind. ${}^0R_{k1}$ sei mit einer der übrigen $\varrho-1$ Reihen, etwa mit ${}^1R_{k1}$, in der Reihe dritter Stufe R_{k3} enthalten. R_{k3} hat mit ${}^0R_{k,\varrho-1}$ die Reihe zweiter Stufe R_{k2} gemein. Aus der Beziehung von R_{k3} auf den Raum folgt: Die Reihen r_{k1}, welche entsprechende Gruppen von ${}^0R_{k1}$ und ${}^1R_{k1}$ vereinigen, haben mit R_{k2} die Gruppen einer Reihe erster Stufe ${}^2R_{k1}$ gemein, welche auf ${}^0R_{k1}$ projectivisch bezogen ist. Tritt an die Stelle von ${}^1R_{k1}$ jede der übrigen der ϱ Reihen r_{k1}, so erhält man $\varrho-1$ in ${}^0R_{k,\varrho-1}$ enthaltene Reihen r_{k1}, die ebenfalls projectivisch auf einander bezogen sind. Jede Reihe $r_{k,\varrho-1}$, welche entsprechende Gruppen jener Reihen enthält, vereinigt auch entsprechende Gruppen der letzten $\varrho-1$ Reihen. Gilt daher der Satz für das Band $(\varrho-1)$ter Ordnung, so hat er auch für das Band ϱter Ordnung, Gültigkeit. Für $\varrho=3$ ist die Gültigkeit leicht erkennbar.

6. Die Reihen eines Bandes sind dadurch den Gruppen einer Reihe r_{k1} „projectivisch“ zugeordnet, dass man eine Axreihe des Bandes projectivisch auf sie bezieht.

7. In der reciproken Verwandtschaft einer Reihe $r_{k\varrho}$ zu einer Reihe $r_{l\varrho}$ entsprechen den Reihen eines Bandes ϱter Ordnung die Gruppen einer Reihe ϱter Ordnung; dieselbe besteht aus den Gruppen, welche in der collinearen Verwandtschaft zweier Bündel ${}_\varrho\beta_{k,\varrho-1}$ den zugeordneten Reihen r_{k1} gemeinsam sind. Die beiden Gruppen, welche je sämmtlichen Reihen dieser Bündel angehören, gehören zu der Reihe ϱter Ordnung. Eine Reihe ϱter Ordnung von dieser Art möge „eine Kette“ heissen. — Die gemeinsamen Gruppen entsprechender Reihen $r_{k,\varrho-1}$ von ϱ projectivisch auf einander bezogenen Büscheln ${}_\varrho\beta_{k1}$, welche in derselben Reihe $r_{k\varrho}$ enthalten sind, bilden im Allgemeinen eine Kette ϱter Ordnung. — Eine Kette ϱter Ordnung ist durch $\varrho+3$ ihrer Gruppen bestimmt.

In der collinearen bezw. reciproken Beziehung einer $r_{k\varrho}$ auf

ein Bündel ${}_{\mu}\beta_{k\varrho}$ entspricht einem Bande ϱter Ordnung ein „Band ϱter Ordnung von Reihen $r_{k,\mu-1}$“ bezw. eine „Reihenkette“ ϱter Ordnung von Reihen $r_{k,\mu-\varrho}$.

Die Reihen (Gruppen) eines Bandes oder einer Kette lassen sich (vermittelst der Beziehung auf ein Band von der seither behandelten Art) eindeutig den Punkten einer Geraden zuordnen („projectivische Zuordnung“, siehe 6.).

8. Die singuläre Reihe des k-Punktesystems einer Geraden, deren Gruppen den λ-fach zu zählenden Punkt P^{ν} gemein haben, heisse die $(\lambda-1)$te Unterreihe zu $s^{\nu}_{k,k-1}$. Zu $s^{\nu}_{k,k-1}$ giebt es $k-2$ Unterreihen. Eine Gruppe von $s^{\nu}_{k,k-1}$ besteht aus dem k-fach zu zählenden Punkt P^{ν} — „Hauptgruppe (P^{ν})“. Die Hauptgruppen des k-Punktesystems bilden die „Hauptreihe“ des Systems. Die Gruppen, welche je aus einer Hauptgruppe des $(k-\lambda)$-Punktesystems nebst dem λ-fach zu zählenden Punkte P^{ν} bestehen, bilden die Hauptreihe der $(\lambda-1)$ten Unterreihe von $s^{\nu}_{k,k-1}$ oder, wenn $\lambda=1$, der Reihe $s^{\nu}_{k,k-1}$ selbst.

Satz: Die Hauptreihe des k-Punktesystems ist eine Kette $k$ter Ordnung.

Beweis. Wir machen für die Punktsysteme, deren Dimension ϱ kleiner als k ist, folgende Annahme: Die ersten Unterreihen der Reihen $s^{\xi}_{\varrho,\varrho-1}$ bestimmen mit jeder Hauptgruppe des Systems die Reihen $r_{\varrho,\varrho-1}$ eines Bandes von der Ordnung $\varrho-1$. Dasselbe sei mittelst dieser Unterreihen projectivisch auf das Band der Reihen $s^{\xi}_{\varrho,\varrho-1}$ bezogen (zwei zugeordnete Reihen enthalten dieselbe $s^{\xi\xi}_{\varrho,\varrho-2}$). Seine Reihen haben mit der μten Unterreihe jeder $s^{\xi}_{\varrho,\varrho-1}$ die Reihen eines Bandes $(\varrho-1-\mu)$ter Ordnung gemein, welchem die $(\mu+1)$te Unterreihe angehört (für alle möglichen Werthe von μ).

Im Falle $\varrho=k$ bedeute B den Büschel der Reihen $r_{k,k-1}$, welche durch je eine Reihe $s^{\xi\xi}_{k,k-2}$ und die Hauptgruppe (P^{0}) bestimmt sind. Aus der Annahme folgt: Die Reihen von B haben mit $s^{01}_{k,k-2}$ die Reihen eines Bandes b_{k-2} von der Ordnung $k-2$ gemein. Die Reihen von b_{k-2} enthalten von der λ-dimensionalen Unterreihe U_{λ} von $s^{1}_{k,k-1}$ die Reihen eines Bandes der $(\lambda-1)$ten Ordnung, welchem die Unterreihe $U_{\lambda-1}$ angehört. Ausserdem ist b_{k-2} durch die Reihen $s^{\xi\xi 01}_{k,k-4}$ projectivisch auf das Band Σ der Reihen $s^{\xi}_{k,k-1}$ bezogen. Die Unterreihe U_2 von $s^{1}_{k,k-1}$ hat mit $s^{01}_{k,k-2}$ eine Reihe a, eine Axreihe von b_{k-2}, gemein. a ist durch b_{k-2} projectivisch auf Σ (6.) bezogen. Die Hauptreihe von U_2 ist durch die Reihen $s^{\xi\xi}_{k,k-2}$ (jede dieser

Reihen enthält von U_2 nur eine der Hauptreihe angehörige Gruppe) ebenfalls projectivisch auf Σ bezogen und hiermit auch auf a. Die Reihen von B enthalten je zwei einander hierbei zugeordnete Gruppen. Die Reihen r_{k1} von U_2, welche in den Reihen von B enthalten sind, bilden ein Band zweiter Ordnung. Denn in der Beziehung von U_2 auf ein ebenes System entspricht ihrer Hauptreihe ein Kegelschnitt, der Reihe a eine Tangente an ihn. Die Punkte der Tangente sind den Punkten des Kegelschnitts zugeordnet; der Berührungspunkt entspricht, wie man sich leicht überzeugt, sich selbst. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte bilden daher einen Büschel II. Ordnung. Die Unterreihe U_3 hat daher mit den Reihen von B die Reihen eines Bandes dritter Ordnung gemein, welchem U_2 und die gemeinsame Reihe von U_3 mit $s^{01}_{k,k-2}$ angehören. Hieraus folgt weiter, dass in U_4 durch B die Reihen eines Bandes vierter Ordnung bestimmt werden, welchem U_3 angehört, dass überhaupt die Reihe U_λ mit den Reihen von B die Reihen eines Bandes*) von der Ordnung λ, welchem $U_{\lambda-1}$ angehört, gemein hat. Insbesondere bilden die gemeinsamen Reihen $r_{k,k-2}$ von $U_{k-1} = s^1_{k,k-1}$ und den Reihen von B ein Band $(k-1)$ter Ordnung b_{k-1}. Die Reihe a ist Axreihe desselben. Durch die projectivische Beziehung von a auf Σ ist b_{k-1} und damit B derartig auf Σ bezogen, dass zwei entsprechende Reihen dieselbe $s^{\xi\xi}_{k,k-2}$ enthalten. Das oben Angenommene gilt daher für $\varrho = k$, wenn es für $\varrho < k$ Gültigkeit hat. In der That trifft es für $\varrho = 3$ zu.

Durch die Beziehung von b_{k-1} auf Σ und damit auch auf das Band der Reihen $s^{1\xi}_{k,k-2}$ ist eine collineare Beziehung von $s^1_{k,k-1}$ auf sich selbst bestimmt; hierbei sind die Unterreihen von $s^1_{k,k-1}$ sowie die Gruppe (P^1) sich selbst zugeordnet. Hierdurch wiederum ist eine collineare Verwandtschaft des Bündels der Reihen, welchen die Gruppe (P^0) angehört, und der Reihe $s^1_{k,k-1}$ gegeben. Die hiermit bestimmte Beziehung jenes Bündels auf das $(k-1)$-Punktesystem S^{k-1} ändert sich nicht, wenn $s^{\xi}_{k,k-1}$ an Stelle von $s^1_{k,k-1}$ tritt. Den Hauptgruppen von S^{k-1} entsprechen in ihr die Reihen r_{k1}, welche (P^0) mit je einer anderen Hauptgruppe von S^k vereinigen. Diese Reihen bilden daher eine Kette $(k-1)$ter Ordnung, wenn die Hauptreihe von S^{k-1}

*) Dieses Band könnte, wenn das analoge Band in $U_{\lambda-1}$ von der $(\lambda-1)$ten Ordnung ist, nur dann von niedrigerer Ordnung sein, wenn in der durch dasselbe hergestellten collinearen Verwandtschaft zwischen $U_{\lambda-1}$ und der Reihe R, welche U_λ und $s^0_{k,k-1}$ gemein haben, die gemeinsame Reihe von R und $U_{\lambda-1}$ sich selbst entspräche; es entspricht ihr aber $U_{\lambda-1}$.

eine Kette $(k-1)$ter Ordnung ist. Letzteres trifft für $k=4$ zu. Da an die Stelle von (P^0) jede andere Hauptgruppe von S^k treten kann, so ist die Hauptreihe von S^k eine Kette $k$ter Ordnung.

Hieraus folgt: Eine dem k-Punktesystem einer Geraden angehörige $(k-1)$-dimensionale Reihe ersten Grades enthält höchstens k Gruppen, welche je aus einem k-fach zu zählenden Punkte bestehen.

Durch die Zuordnung jeder Hauptgruppe (P^ξ) zur zugehörigen Reihe $s^\xi_{k,k-1}$ ist, wie man aus dem vorigen Beweise erkennt, die Hauptreihe auf das Band der Reihen projectivisch bezogen. Hierdurch ist eine reciproke Verwandtschaft der in einander liegenden k-Punktesysteme S^k und S'_k bestimmt, in welcher offenbar der Hauptgruppe (P^ξ), ob man sie zu S^k oder zu S'_k rechnet, die Reihe $s^\xi_{k,k-1}$ entspricht. Jeder Gruppe des k-Punktesystems ist hiermit eine Reihe zugeordnet. Die Reihe heisse die „Polarreihe" der Gruppe.

§ 8.

Correspondenz zwischen den Punkten auf geraden Linien.

1. Durch die projectivische Beziehung einer geraden Punktreihe p' mit dem Träger g' auf eine Kette K, welche dem k-Punktesystem S^k der Geraden g angehört und von der $k$ten Ordnung ist, sind jedem Punkte auf g', welchem eine vollständige Gruppe von K entspricht, k Punkte von g zugeordnet, und umgekehrt sind jedem Punkte von g', welcher in k Gruppen von K enthalten ist, k Punkte auf g' zugewiesen, diejenigen, welche diesen Gruppen entsprechen. Es ist also hierdurch eine Correspondenz (k, k) zwischen den Punkten von g und g' bestimmt. Die Gruppen der Punkte auf g', welche je einem Punkte auf g entsprechen, bilden ebenfalls eine zum k-Punktesystem S'_k von g' gehörige Kette $k$ter Ordnung. Die Punktreihe p auf g ist so auf dieselbe projectivisch bezogen, dass jedem Punkte von g diejenige Gruppe entspricht, welche aus den ihm durch die Correspondenz zugewiesenen Punkten besteht. Denn durch die projectivische Beziehung von p' auf K ist auch das Band der singulären Reihen $s'_{k,k-1}$ von S'_k projectivisch auf K bezogen (einer Gruppe von K, welche dem Punkte P'_ν entspricht, ist die Reihe $s^{\nu'}_{k,k-1}$ zugeordnet). Hierdurch ist eine reciproke Verwandtschaft zwischen S'_k und S^k bestimmt. Den Reihen $s_{k,k-1}$ von S^k entsprechen hierbei die Gruppen einer Kette $k$ter Ordnung. Diejenige dieser Gruppen, welche der Reihe $s^\nu_{k,k-1}$ zugeordnet ist, besteht offenbar aus den

Häuptern derjenigen Reihen $s'_{k,k-1}$, welchen die den Punkt P^ν enthaltenden Gruppen von K entsprechen. Durch die projectivische Beziehung einer geraden Punktreihe p' auf eine Kette, welche dem λ-Punktesystem einer Geraden g angehört und von der $k$ten Ordnung ist, wird eine Correspondenz (k, λ) bestimmt. Ist diese Kette in der Reihe $R_{\lambda k}$ (k-dimensionale Reihe von S^λ) enthalten, und ist g' der Träger von p', so ist analog wie oben eine reciproke Verwandtschaft zwischen S'_k und $R_{\lambda k}$ bestimmt, in welcher den gemeinsamen Reihen $r_{\lambda,k-1}$ von $R_{\lambda k}$ mit den Reihen $s_{\lambda,\lambda-1}$ die Gruppen einer Reihe von der Ordnung λ zugeordnet sind. Die Gruppen der Punkte auf g', welche durch die Correspondenz je einem Punkte von g zugeordnet sind, gehören also dem k-Punktesystem von g' an und bilden eine „rationale" Reihe vom Grade λ („Halbkette").

2. Haben*) Punktreihe und Kette, durch welche eine Correspondenz (k, k) bestimmt ist, denselben Träger, so fallen, wenn eine Gruppe der ihr zugeordneten singulären Reihe $s_{k,k-1}$ angehört, in dem Haupte der letzteren im Allgemeinen zwei entsprechende Punkte zusammen (Coincidenz).

Um die Anzahl der möglichen Coincidenzen auszumachen, betrachten wir zunächst das „Bündel zweiter Ordnung $\beta^2_{k,k-1}$" von Reihen $r_{k,k-1}$; dasselbe wird als ein Bündel von $(k-1)$-facher Mannigfaltigkeit in den $r_{k,k-1}$ definirt, welches mit einem Büschel β_{k1} höchstens zwei Reihen $r_{k,k-1}$ und mit einem Bündel $\beta_{k,2}$ einen Büschel zweiter Ordnung (ihm entspricht in der Beziehung von $\beta_{k,2}$ auf eine Ebene, wo Reihe $r_{k,k-1}$ und Punkt zugeordnet sind, ein Kegelschnitt) eine Reihe oder keine gemein hat. Im Falle $k = 3$ entspricht in der Beziehung des Dreipunktesystems auf den Raum ($r_{3,2}$ und Punkt zugeordnet) die Fläche zweiter Ordnung dem Bündel $\beta^2_{3,2}$. Die Reihen, welche $\beta^2_{k,k-1}$ mit einem Bündel $\beta_{k,k-\lambda}$ gemein hat, bilden im Allgemeinen ein Bündel $\beta^2_{k,k-\lambda-1}$ zweiter Ordnung von $(k-\lambda-1)$-facher Mannigfaltigkeit. Seine Reihen haben mit einer $s_{k,k-\lambda}$ Reihen gemein, welche sich auf die Reihen eines Bündels $\beta^2_{k-\lambda,k-\lambda-1}$ gründen. Was von dem Bündel $\beta^2_{k,k-1}$ gilt, lässt sich daher leicht auf das Bündel $\beta^2_{k,k-\lambda-1}$ übertragen.

*) Die allgemeinste Correspondenz, welche überhaupt im Contexte von Operationen, wie sie in dieser Abhandlung definirt sind, auftreten kann, ist die durch projectivische Beziehung von Kette auf Kette, Kette auf Halbkette oder Halbkette auf Halbkette bestimmte. Es lässt sich aber zeigen, dass sich jede solche Correspondenz zugleich durch die projectivische Beziehung von Kette auf Punktreihe bestimmen lässt. (Z. B. Kette $n$ter Ordnung auf Kette $n$ter Ordnung giebt eine Correspondenz, welche auf der Beziehung einer Kette $n \times n$ter Ordnung auf eine Punktreihe beruht.)

Satz: Die Reihen $r_{k,k-1}$ eines Bündels zweiter Ordnung von $(k-1)$-facher Mannigfaltigkeit können durch eine reciproke Verwandtschaft zweier beliebiger von ihnen bestimmt werden.

Beweis: Wir leiten aus der angenommenen Gültigkeit des Satzes für die Werthe von $k < n$ seine Gültigkeit für $k = n$ ab. R und R' seien zwei Reihen des Bündels zweiter Ordnung B^2 von $(k-1)$-fach unendlich vielen Reihen $r_{k,k-1}$. ${}^0B_{k,k-1}$ und ${}^1B_{k,k-1}$ seien zwei beliebige Bündel, welchen R angehört, dieselben mögen von B^2 die Bündel zweiter Ordnung ${}^0B^2$ und ${}^1B^2$ von $(k-2)$-facher Mannigfaltigkeit enthalten — dies ist der Fall, wenn zu ${}^iB_{k,k-1}$ zwei Reihen von B^2 gehören, durch welche ein B^2 nicht ganz angehörender Büschel $\beta_{k,1}$ bestimmt ist. ${}^{01}B_{k,k-2}$ sei das gemeinschaftliche Bündel von ${}^0B_{k,k-1}$ und ${}^1B_{k,k-1}$, welches von B^2 das Bündel zweiter Ordnung ${}^{01}B^2$ von $(k-3)$-facher Mannigfaltigkeit enthält (dies erreicht man, indem man ${}^{01}B_{k,k-2}$ vor ${}^iB_{k,k-1}$ passend wählt). ${}^0R$ bedeute eine beliebig gewählte Reihe von ${}^0B^2$. R habe mit den Reihen von ${}^iB_{k,k-1}$ bezw. ${}^{01}B_{k,k-2}$ die Reihen des Bündels ${}^ib$ bezw. ${}^{01}b$ gemein. Gleicherweise bestimmen ${}^0R$ und ${}^0B_{k,k-1}$ das Bündel ${}^0\beta$. Die Reihen von ${}^0B^2$ sind durch eine reciproke Verwandtschaft von ${}^0b$ und ${}^0\beta$ bestimmt; hierbei werden die Reihen von ${}^{01}B^2$ durch eine Verwandtschaft von ${}^{01}b$ und einem Bündel ${}^{01}\beta$, dessen Reihen der Reihe ${}^{01}R$ von ${}^{01}B^2$ angehören, bestimmt. ${}^0R$, ${}^{01}R$ und R' sind in einem Bündel $\beta_{k,2}$ enthalten, welches im Allgemeinen von ${}^1B^2$ noch eine Reihe (${}^1R$) enthält. Wir machen jetzt die Annahme, dass es unter den die Reihen von ${}^1B^2$ bestimmenden reciproken Verwandtschaften von ${}^1b$ und ${}^1\beta$ (${}^1\beta$ hat analoge Bedeutung wie ${}^0\beta$) eine giebt, welche zur Bestimmung von ${}^{01}B^2$ dieselbe Verwandtschaft zwischen ${}^{01}b$ und ${}^{01}\beta$ ergiebt. Durch die Beziehungen von ${}^0b$ auf ${}^0\beta$ und von ${}^1b$ auf ${}^1\beta$ ist eine reciproke Beziehung von ${}^0b$ bezw. ${}^1b$ auf die gemeinsame Reihe von R' und ${}^0R$ bezw. R' und ${}^1R$ hergestellt. Das gemeinschaftliche Bündel von ${}^0b$ und ${}^1b$, ${}^{01}b$, ist durch beide Beziehungen in gleicher Weise auf die gemeinschaftliche Reihe von R' mit ${}^0R$ und ${}^1R$ bezogen. Hierdurch ist also eine reciproke Beziehung von R auf R' festgelegt, durch welche, wie man leicht erkennt, ein Bündel zweiter Ordnung bestimmt ist. Dieses muss mit B^2 zusammenfallen. Denn irgend eine Reihe von B^2 bestimmt mit R' und zwei Reihen von ${}^{01}B^2$ ein Bündel $\beta_{k,3}$, welches mit ${}^0B^2$ und ${}^1B^2$ je einen Büschel zweiter Ordnung gemein hat. Durch diese Büschel und durch R' ist ein einziges Bündel zweiter Ordnung von $\beta_{k,3}$ bestimmt; ihm gehört jene Reihe von B^2 an.

Dass das zuletzt Angenommene für $k = n$ zutrifft, folgt aus der freien Wahl unter den reciproken Verwandtschaften zwischen ${}^0b$ und ${}^0\beta$, welche zur Bestimmung von ${}^0B^2$ dienen können. Unser Satz gilt also allgemein, da er für $k = 3$ gilt. In allen das Bündel B^2 bestimmenden reciproken Beziehungen von R auf R' ist der gemeinsamen Reihe $r_{k,k-2}$ derselben ein R enthaltendes Bündel $\beta_{k,k-1}$ zugeordnet, welchem alle Büschel β_{k1} mit nur einer Reihe von B^2 (nämlich R) angehören. Man erkennt dies aus dem Verhalten der zu B^2 gehörigen Bündel $\beta^2_{k,2}$, welche R und R' enthalten.

3. ***Anzahl der Coincidenzen einer Correspondenz*** (k, k). Durch die projectivische Beziehung einer Punktreihe auf eine Kette mit gleichem Träger, durch welche eine Correspondenz (k, k) bestimmt ist, wird eine reciproke Beziehung des k-Punktesystems des Trägers auf sich selbst gegeben. Existiren in dieser Beziehung Reihen, welche ihre entsprechenden Gruppen enthalten, so bilden sie im allgemeinen Falle ein Bündel $\beta^2_{k,k-1}$. Die höchste Anzahl der gemeinsamen Reihen dieses Bündels mit dem Band der singulären Reihen $s^{\xi}_{k,k-1}$ ist die höchste Anzahl der Coincidenzen, welche die Correspondenz haben kann (es können auch alle $s_{k,k-1}$ dem Bündel zugehören). Seien $s^0_{k,k-1}$ und $s^1_{k,k-1}$ zwei solcher Reihen, so sind den Reihen $s^{0\xi}_{k,k-2}$ durch eine das Bündel zweiter Ordnung bestimmende reciproke Beziehung von $s^0_{k,k-1}$ auf $s^1_{k,k-1}$ die Gruppen einer Kette $(k-1)$ter Ordnung zugeordnet. Durch die projectivische Beziehung des Bandes der $s^{0\xi}_{k,k-2}$ auf das Band der $s^{1\xi}_{k,k-2}$, in welcher der Reihe $s^{0\nu}_{k,k-2}$ die Reihe $s^{1\nu}_{k,k-2}$ entspricht, ist jene Kette projectivisch auf das Band der $s^{1\xi}_{k,k-1}$ bezogen. Bedeutet μ die höchste Anzahl der Reihen $s^{1\xi}_{k,k-2}$, welche hierbei ihre zugeordneten Gruppen enthalten, so ist $\mu+2$ die höchste Anzahl der Coincidenzen der Correspondenz (k, k). Da μ offenbar auch die höchste Anzahl der Coincidenzen für $(k-1, k-1)$ vorstellt, und da $\mu = 4$ ist, wenn $k = 3$ ist, so beträgt die Anzahl der Coincidenzen für (k, k) im Allgemeinen höchstens $2k$.

Correspondenz (k, λ). Eine Correspondenz (k, λ) sei durch die projectivische Beziehung einer Punktreihe auf eine Kette λter Ordnung mit demselben Träger bestimmt. Die Kette, welche in der Reihe $R_{k\lambda}$ enthalten sei, ist hierdurch projectivisch auf das Band der Reihen $s_{k,k-1}$ bezogen und damit auch auf das Band der Reihen $s_{k,\lambda-1}$ (mit $k-\lambda+1$ Häuptern), welche der Reihe $S_{k,\lambda}$ mit $k-\lambda$ Häuptern angehören ($S_{k\lambda}$ ist beliebig gewählt). Hierdurch ist eine reciproke Verwandtschaft zwischen $R_{k\lambda}$ und $S_{k\lambda}$ festgelegt. Die Reihen $r_{k,k-1}$, welche je eine Gruppe von $R_{k\lambda}$ mit der zuge-

hörigen $s_{k,\lambda-1}$ vereinigen, bilden im Allgemeinen ein Bündel $\beta^2_{k,k-1}$ zweiter Ordnung. Dies folgt daraus, dass die Reihen, welche dasselbe mit einem Bündel $\beta_{k,\lambda+1}$ gemein hat, im Allgemeinen ein Bündel $\beta^2_{k\lambda}$ zweiter Ordnung bilden. Jenes Bündel $\beta^2_{k\lambda}$ enthält im Allgemeinen höchstens $2k$ Reihen $s_{k,k-1}$; hierunter befinden sich, wie man leicht erkennt, die $k-\lambda$ Reihen, welche $S_{k\lambda}$ enthalten. Die Correspondenz (k, λ) besitzt daher höchstens $2k-(k-\lambda) = k+\lambda$ Coincidenzen.

„In einer Correspondenz (k, λ), welche durch die projectivische Beziehung einer Punktreihe auf eine Kette λter Ordnung vom k-Punktesystem auf derselben Geraden bestimmt ist, fallen höchstens $k+\lambda$ entsprechende Punkte zusammen."

4. *Normalketten.* In der reciproken Verwandtschaft des k-Punktesystems S^k auf ein anderes S'_k entspreche dem Band der Reihen $s_{k,k-1}$ die Kette K. Die Reihen, welche hierbei den Unterreihen (§§ 7, 8) der Reihe $s^{\xi}_{k,k-1}$ zugeordnet sind, sollen die „Ueberreihen" der $s^{\xi}_{k,k-1}$ entsprechenden Gruppe in Bezug auf K heissen.

Enthält die Kette K eine Hauptgruppe (P^α), deren Ueberreihen von den Unterreihen der Reihe $s^\alpha_{k,k-1}$ (mit dem Haupte P^α) gebildet werden, so heisse sie eine „Normalkette" $k$ter Ordnung mit dem „Centrum" P^α.

Satz: Durch eine projectivische Beziehung der Normalkette K $k$ter Ordnung auf eine Punktreihe mit demselben Träger, wobei der Hauptgruppe (P^0) das Centrum P^0 von K zugeordnet ist, wird eine Correspondenz bestimmt, in der die höchste Anzahl der Coincidenzen, P^0 abgerechnet, k beträgt.

Beweis: Die Reihen, welche in der durch die Correspondenz bestimmten reciproken Verwandtschaft der k-Punktesysteme S^k und S'_k — dieselben liegen in einander — ihre entsprechenden Gruppen enthalten, bilden das Bündel zweiter Ordnung B^2. Zu B^2 gehöre auch $s^1_{k,k-1}$. Dem Bündel B der Reihen $r_{k,k-2}$, welche (P^0) enthalten und der Reihe $s^0_{k,k-1}$ angehören, ist dasselbe Bündel (B') als zu S'_k gehörig zugeordnet. Die Reihen von B^2, welche (P^0) enthalten, bilden ein specielles Bündel zweiter Ordnung, welches aus Büscheln β_{k1}, denen allen $s^0_{k,k-1}$ angehört, besteht (unter ihnen befindet sich der Büschel der Reihen, welche $s^{00}_{k,k-2}$ gemeinsam haben). Die Reihen dieses Bündels zweiter Ordnung sind durch die reciproke Beziehung zwischen B' und $s^{01}_{k,k-2}$ bestimmt, in welcher jeder Reihe von B' die Reihe entspricht, welche $s^{01}_{k,k-2}$ mit der der ersteren zugeordneten

Dass das zuletzt Angenommene für $k = n$ zutrifft, folgt aus der freien Wahl unter den reciproken Verwandtschaften zwischen ${}^0b$ und ${}^0\beta$, welche zur Bestimmung von ${}^0B^2$ dienen können. Unser Satz gilt also allgemein, da er für $k = 3$ gilt. In allen das Bündel B^2 bestimmenden reciproken Beziehungen von R auf R' ist der gemeinsamen Reihe $r_{k,k-2}$ derselben ein R enthaltendes Bündel $\beta_{k,k-1}$ zugeordnet, welchem alle Büschel β_{k1} mit nur einer Reihe von B^2 (nämlich R) angehören. Man erkennt dies aus dem Verhalten der zu B^2 gehörigen Bündel $\beta^2_{k,2}$, welche R und R' enthalten.

3. ***Anzahl der Coincidenzen einer Correspondenz*** (k, k). Durch die projectivische Beziehung einer Punktreihe auf eine Kette mit gleichem Träger, durch welche eine Correspondenz (k, k) bestimmt ist, wird eine reciproke Beziehung des k-Punktesystems des Trägers auf sich selbst gegeben. Existiren in dieser Beziehung Reihen, welche ihre entsprechenden Gruppen enthalten, so bilden sie im allgemeinen Falle ein Bündel $\beta^2_{k,k-1}$. Die höchste Anzahl der gemeinsamen Reihen dieses Bündels mit dem Band der singulären Reihen $s^{\xi}_{k,k-1}$ ist die höchste Anzahl der Coincidenzen, welche die Correspondenz haben kann (es können auch alle $s_{k,k-1}$ dem Bündel zugehören). Seien $s^0_{k,k-1}$ und $s^1_{k,k-1}$ zwei solcher Reihen, so sind den Reihen $s^{0\xi}_{k,k-2}$ durch eine das Bündel zweiter Ordnung bestimmende reciproke Beziehung von $s^0_{k,k-1}$ auf $s^1_{k,k-1}$ die Gruppen einer Kette $(k-1)$ter Ordnung zugeordnet. Durch die projectivische Beziehung des Bandes der $s^{0\xi}_{k,k-2}$ auf das Band der $s^{1\xi}_{k,k-2}$, in welcher der Reihe $s^{0\nu}_{k,k-2}$ die Reihe $s^{1\nu}_{k,k-2}$ entspricht, ist jene Kette projectivisch auf das Band der $s^{1\xi}_{k,k-1}$ bezogen. Bedeutet μ die höchste Anzahl der Reihen $s^{1\xi}_{k,k-2}$, welche hierbei ihre zugeordneten Gruppen enthalten, so ist $\mu+2$ die höchste Anzahl der Coincidenzen der Correspondenz (k, k). Da μ offenbar auch die höchste Anzahl der Coincidenzen für $(k-1, k-1)$ vorstellt, und da $\mu = 4$ ist, wenn $k = 3$ ist, so beträgt die Anzahl der Coincidenzen für (k, k) im Allgemeinen höchstens $2k$.

Correspondenz (k, λ). Eine Correspondenz (k, λ) sei durch die projectivische Beziehung einer Punktreihe auf eine Kette λter Ordnung mit demselben Träger bestimmt. Die Kette, welche in der Reihe $R_{k\lambda}$ enthalten sei, ist hierdurch projectivisch auf das Band der Reihen $s_{k,k-1}$ bezogen und damit auch auf das Band der Reihen $s_{k,\lambda-1}$ (mit $k-\lambda+1$ Häuptern), welche der Reihe $S_{k,\lambda}$ mit $k-\lambda$ Häuptern angehören ($S_{k\lambda}$ ist beliebig gewählt). Hierdurch ist eine reciproke Verwandtschaft zwischen $R_{k\lambda}$ und $S_{k\lambda}$ festgelegt. Die Reihen $r_{k,k-1}$, welche je eine Gruppe von $R_{k\lambda}$ mit der zuge-

hörigen $s_{k,\lambda-1}$ vereinigen, bilden im Allgemeinen ein Bündel $\beta^2_{k,k-1}$ zweiter Ordnung. Dies folgt daraus, dass die Reihen, welche dasselbe mit einem Bündel $\beta_{k,\lambda+1}$ gemein hat, im Allgemeinen ein Bündel $\beta^2_{k\lambda}$ zweiter Ordnung bilden. Jenes Bündel $\beta^2_{k\lambda}$ enthält im Allgemeinen höchstens $2k$ Reihen $s_{k,k-1}$; hierunter befinden sich, wie man leicht erkennt, die $k-\lambda$ Reihen, welche $S_{k\lambda}$ enthalten. Die Correspondenz (k, λ) besitzt daher höchstens $2k-(k-\lambda) = k+\lambda$ Coincidenzen.

„In einer Correspondenz (k, λ), welche durch die projectivische Beziehung einer Punktreihe auf eine Kette λter Ordnung vom k-Punktesystem auf derselben Geraden bestimmt ist, fallen höchstens $k+\lambda$ entsprechende Punkte zusammen."

4. *Normalketten.* In der reciproken Verwandtschaft des k-Punktesystems S^k auf ein anderes S'_k entspreche dem Band der Reihen $s_{k,k-1}$ die Kette K. Die Reihen, welche hierbei den Unterreihen (§§ 7, 8) der Reihe $s^{\xi}_{k,k-1}$ zugeordnet sind, sollen die „Ueberreihen" der $s^{\xi}_{k,k-1}$ entsprechenden Gruppe in Bezug auf K heissen.

Enthält die Kette K eine Hauptgruppe (P^α), deren Ueberreihen von den Unterreihen der Reihe $s^\alpha_{k,k-1}$ (mit dem Haupte P^α) gebildet werden, so heisse sie eine „Normalkette" $k$ter Ordnung mit dem „Centrum" P^α.

Satz: Durch eine projectivische Beziehung der Normalkette K $k$ter Ordnung auf eine Punktreihe mit demselben Träger, wobei der Hauptgruppe (P^0) das Centrum P^0 von K zugeordnet ist, wird eine Correspondenz bestimmt, in der die höchste Anzahl der Coincidenzen, P^0 abgerechnet, k beträgt.

Beweis: Die Reihen, welche in der durch die Correspondenz bestimmten reciproken Verwandtschaft der k-Punktesysteme S^k und S'_k — dieselben liegen in einander — ihre entsprechenden Gruppen enthalten, bilden das Bündel zweiter Ordnung B^2. Zu B^2 gehöre auch $s^1_{k,k-1}$. Dem Bündel B der Reihen $r_{k,k-2}$, welche (P^0) enthalten und der Reihe $s^0_{k,k-1}$ angehören, ist dasselbe Bündel (B') als zu S'_k gehörig zugeordnet. Die Reihen von B^2, welche (P^0) enthalten, bilden ein specielles Bündel zweiter Ordnung, welches aus Büscheln β_{k1}, denen allen $s^0_{k,k-1}$ angehört, besteht (unter ihnen befindet sich der Büschel der Reihen, welche $s^{(0)}_{k,k-2}$ gemeinsam haben). Die Reihen dieses Bündels zweiter Ordnung sind durch die reciproke Beziehung zwischen B' und $s^{01}_{k,k-2}$ bestimmt, in welcher jeder Reihe von B' die Reihe entspricht, welche $s^{01}_{k,k-2}$ mit der der ersteren zugeordneten

Reihe von B gemein hat. Unter den reciproken Verwandtschaften zwischen $s^{0}_{k,k-1}$ und $s^{1}_{k,k-1}$, welche zur Bestimmung der Reihen von B^2 dienen, befindet sich eine, in welcher $s^{01}_{k,k-2}$ in obiger Art auf das Bündel B' bezogen ist (Nr. 2. — Man kann diesen speciellen Fall auch leicht direct mittelst Anwendung des Schlusses von k auf $k+1$ untersuchen). Dem Band der Reihen $s'^{\xi}_{k,k-1}$ entspricht hierbei eine Kette von $s^{0}_{k,k-1}$, welche sich auf eine Normalkette des $(k-1)$-Punktesystems gründet; dieselbe hat ebenfalls das Centrum P^0. In der Beziehung von $s^{01}_{k,k-2}$ auf B' ist nämlich jeder Reihe von $s^{01}_{k,k-2}$, welche sich auf eine Unterreihe von $s^{0}_{k,k-2}$ gründet, eine Unterreihe von $s^{0}_{k,k-1}$ zugeordnet. Aus dem Bisherigen folgt, dass die höchste Anzahl der Coincidenzen im Falle k nur Eins mehr betragen kann, als im Falle $k-1$. Im Falle $k=2$ beträgt sie Zwei. (Man hat hier in der Beziehung auf die Ebene einen Kegelschnitt, dessen Punkte den Tangenten eines ihn berührenden Kegelschnittes projectivisch zugeordnet sind.)

Bemerkung. Die Normalkette entspricht in der analytischen Geometrie der Gleichung $f(x, y)=0$ $n$ten Grades mit zwei Unbekannten, wobei y einen Parameter darstellt und x die Lage von Punkten auf einer Geraden bestimmt. Das Centrum der hierdurch bestimmten Normalkette ist hier der unendlich ferne Punkt.

(Fortsetzung folgt.)

Ueber lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung, für welche die Umkehrungsfunction von endlicher Vieldeutigkeit ist.

(Von Herrn *Ludwig Schlesinger*.)

In einer Arbeit*) habe ich einige Resultate mitgetheilt, die sich auf lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten und discontinuirlicher Gruppe beziehen. Dieselben liessen eine gewisse Analogie zwischen den Differentialgleichungen der erwähnten Art und jenen mit durchaus algebraischen Integralen erkennen, eine Analogie, die offenbar in noch verstärktem Grade zu Tage treten wird, wenn wir unter den Differentialgleichungen mit discontinuirlicher Gruppe insbesondere diejenigen betrachten, für welche die Anzahl der Werthe der unabhängigen Variabeln ξ, in denen, auf geeigneten Wegen fortgesetzt, der Integralquotient η denselben Werth erreicht, eine endliche ist.

Auf den folgenden Blättern werden die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Eintreten dieses Falles unter der Voraussetzung entwickelt, dass die Gruppe der Differentialgleichung eine *Fuchs*sche sei. Bei dieser Gelegenheit gebe ich auch eine Verallgemeinerung und Anwendung der von mir**) für einen besonderen Fall *Fuchs*scher Functionen mit symmetrischer Gruppe durchgeführten Erzeugungsweise dieser Functionen durch unendlich oft wiederholte Transformation.

I.

Wenn in der Differentialgleichung

$$(A.) \qquad \frac{d^2\mathfrak{y}}{d\xi^2} = \frac{\varphi(\xi)}{\prod_{\varkappa=1}^{r}(\xi-b_\varkappa)^2}\mathfrak{y} = Q(\xi)\mathfrak{y},$$

*) Dieses Journal Bd. 110, S. 130—157.

**) Ebenda Bd. 105, S. 181—232.

wo $\varphi(\xi)$ eine ganze rationale Function vom höchstens $(r-2)$ten Grade in ξ bedeutet, die unabhängige Variable ξ als Function des Integralquotienten η von endlicher Vieldeutigkeit sein soll, so genügt ξ einer Gleichung der Form:

$$\xi^p + A_1(\eta)\xi^{p-1} + \cdots + A_p(\eta) = 0, \tag{1.}$$

wo p eine positive ganze Zahl, $A_1(\eta), \ldots, A_p(\eta)$ eindeutige Functionen von η bedeuten. Bezeichnen wir mit $\xi_1, \ldots, \xi_p$ die p verschiedenen Zweige der durch die Gleichung (1.) definirten Function ξ von η und setzen, nach dem Vorgange von Herrn ***Fuchs****),

$$x = \prod_{\varkappa=1}^{p} (t-\xi_\varkappa) = \psi(\eta), \tag{2.}$$

so ist $\psi(\eta)$ eine eindeutige Function von η, die aber auch eine eindeutige Function von ξ sein muss, da bei einem Umlaufe von ξ die $\xi_1, \ldots, \xi_p$ nur eine Permutation erfahren können. Folglich bleibt $\psi(\eta)$ ungeändert, wenn wir auf η eine Substitution der zur Differentialgleichung (A.) gehörigen Gruppe G anwenden. Eine Gruppe linearer Substitutionen, durch deren Anwendung auf die unabhängige Variable einer eindeutigen Function diese Function ihren Werth nicht verändert, ist nothwendig eine discontinuirliche, d. h. eine *Fuchs*sche oder *Klein*sche Gruppe; wir schliessen demnach, ***dass die Gruppe G eine discontinuirliche sei.*** Es kann aber $\psi(\eta)$ auch nicht an zwei verschiedenen Stellen η, die nicht durch Substitutionen von G aus einander hervorgehen, denselben Werth annehmen, da der Ausdruck $\psi(\eta)$ in jedem der Zweige $\xi_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, p)$ vom ersten Grade ist; ***die Gruppe G ist daher vom Geschlecht Null,*** und jede zu G gehörige *Fuchs*sche oder *Klein*sche Function ist rational durch $x = \psi(\eta)$ darstellbar. Insbesondere folgt, dass die Coefficienten $A_1(\eta), \ldots, A_p(\eta)$ der Gleichung (1.) lineare Functionen von x sein müssen, und da dieselben nur unendlich werden können, wenn eines der $\xi_1, \ldots, \xi_p$ unendlich wird, d. h. nur an ***einer*** Stelle η innerhalb des zur Gruppe G gehörigen Fundamentalpolygons, so haben diese linearen Functionen denselben Nenner, d. h. x ist eine ***rationale*** Function

$$x = \frac{g(\xi)}{h(\xi)} \tag{3.}$$

von ξ, wo g, h ganze Functionen $p$ten Grades von ξ ohne gemeinschaftlichen

*) Acta Mathematica Bd. 1, S. 335.

Theiler bedeuten. Die Differentialgleichung

$$\text{(B.)} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = P(x)y,$$

welcher

$$y_1 = \Big(\frac{d\psi(\eta)}{d\eta}\Big)^{\frac{1}{2}}, \quad y_2 = y_1\eta$$

genügen, geht also durch die rationale Transformation

$$y = \Big(\frac{dx}{d\xi}\Big)^{\frac{1}{2}}\mathfrak{y}, \quad x = \frac{g(\xi)}{h(\xi)}$$

aus (A.) hervor, es ist demnach:

I. *jede aus den Elementen*

$$\mathfrak{y}_1 = \Big(\frac{d\xi}{d\eta}\Big)^{\frac{1}{2}}, \quad \mathfrak{y}_2 = \mathfrak{y}_1\eta$$

eines Fundamentalsystems von (A.) *gebildete invariante eindeutige Form**) *die Wurzel aus einer rationalen Function von* ξ.

Wir schliessen hieraus, dass die Wurzeln der zu den singulären Punkten von (A.) gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen *rationale Zahlen* und die wesentlich singulären Stellen der Gruppe G insgesammt wesentliche singuläre Punkte (Punkte der Unbestimmtheit) für die Function ξ von η sind. Haben also $L_1, L_2, \ldots, L_q$ dieselbe Bedeutung wie in meiner Arbeit**), so existirt, wenn $q > 1$ ist, ξ als Function von η, ebenso wie x, nur in *einem* der Bereiche $L_1, L_2, \ldots, L_q$, und die functionale Beziehung zwischen ξ und η wird durch die eindeutige Gleichung (1.) *vollständig* dargestellt. Es soll nun die Beschaffenheit der rationalen Functionen $Q(\xi)$ und $\frac{g(\xi)}{h(\xi)}$ eingehender discutirt und insbesondere für eine gegebene discontinuirliche Gruppe G oder, was dasselbe ist, für eine bestimmte Differentialgleichung (B.) die Form der Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen der Gleichung (A.) angegeben werden. Wir wollen jedoch der Einfachheit wegen voraussetzen, dass die Gruppe G eine *Fuchs*sche und der Existenzbereich L der Functionen ξ und x von η ein einfach zusammenhängender sei, in dessen Inneren sich keine wesentlich singuläre Stelle der Gruppe befindet. L ist dann im Allgemeinen eine Kreisfläche,

*) Dieses Journal Bd. 110, S. 143.

**) a. a. O. S. 134.

nur in gewissen Grenzfällen (wenn nämlich die in meiner Arbeit*) mit ν bezeichnete Zahl Null oder positiv ist) erfüllt L die ganze Ebene.

II.

Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1} = \infty$ die singulären Punkte der zur Gruppe G gehörigen Differentialgleichung (B.) und $\frac{1}{\beta_\varkappa}$ die Differenzen der Wurzeln der zu $x = a_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, n+1)$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen, wo also die $\beta_\varkappa$ positive ganze Zahlen bedeuten oder auch (für logarithmisch singuläre Punkte) unendlich gross sein können. Bedeutet $\varphi(t)$ eine rationale Function $p$ten Grades von t, d. h. eine rationale Function, deren Zähler oder Nenner von gemeinsamen Factoren befreit, bis zum $p$ten Grade ansteigt, und setzen wir in die Differentialgleichung (B.)

$$(1.) \qquad x = \varphi(t), \quad y = \left(\frac{dx}{dt}\right)^{\frac{1}{2}} \mathfrak{y}$$

ein, so erhalten wir eine Differentialgleichung

$$(C.) \qquad \frac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2} = R(t)\mathfrak{y}$$

für $\mathfrak{y}$, wo $R(t)$ eine rationale Function von t bedeutet, in welcher t als Function des Integralquotienten η im Allgemeinen p-deutig ist, und es sind, wenn wir unter $\varphi(t)$ die allgemeinste rationale Function $p$ten Grades verstehen, nach den Ergebnissen der vorigen Nummer in der Form (C.) auch *alle* Differentialgleichungen enthalten, deren Gruppe G und deren unabhängige Variable eine p-deutige Function des Integralquotienten η ist. Bei besonderer Wahl der rationalen Function $\varphi(t)$ kann es jedoch eintreten, dass die Anzahl r der t-Werthe, für welche η denselben Werth zu erreichen vermag, kleiner ist als p; in diesem Falle muss offenbar durch Anwendung der Transformation (1.) auf die Differentialgleichung (B.) die Gruppe G der letzteren eine Reduction erfahren haben, d. h. es ist die Gruppe der Differentialgleichung (C.) nur eine Untergruppe G' von G, und zwar nach Nr. I eine solche vom Geschlechte Null. Sei alsdann τ jene zur Untergruppe G' gehörige *Fuchs*sche Function, durch welche sich alle anderen rational ausdrücken lassen, so ist:

$$x = \psi(\tau),$$

*) a. a. O. S. 144.

und nach No. I:

$$\tau = \varphi_1(t),$$

wo $\psi(\tau)$, $\varphi_1(t)$ rationale Functionen ihrer Argumente, $\varphi_1(t)$ eine solche vom $r$ten Grade bedeuten. Setzen wir nun in die Differentialgleichung (B.)

$$(2.) \qquad x = \psi(\tau), \quad y = \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^{\frac{1}{2}} u,$$

so erhalten wir eine Differentialgleichung

$$(B'.) \qquad \frac{d^2u}{d\tau^2} = S(\tau)u,$$

mit eindeutig umkehrbarem Integralquotienten, deren Gruppe G' ist, und welche durch die Transformation

$$(3.) \qquad \tau = \varphi_1(t), \quad u = \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^{\frac{1}{2}} \eta$$

in (C.) übergeht. Die beliebige rationale Transformation (1.) lässt sich also stets in zwei hinter einander auszuübende ebenfalls rationale Transformationen (2.) und (3.) spalten, von denen die erstere die Reduction der Gruppe, die letztere die Mehrdeutigkeit der aus dem Integralquotienten entspringenden Umkehrungsfunction bewirkt. Die Natur der die Gruppe reducirenden rationalen Transformationen (2.) ist aus der Theorie der *Fuchs*schen Functionen wohlbekannt, es muss nämlich*) τ als Function von x sich nur allein an den Stellen $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ und zwar daselbst derart verzweigen, dass die um Eins vermehrten Ordnungszahlen der über $x = a_\varkappa$ gelegenen Windungspunkte, wenn $\beta_\varkappa$ eine endliche Zahl ist, Theiler von $\beta_\varkappa$, dagegen, wenn $\beta_\varkappa = \infty$, ganz beliebige sind. Auf Grund dieser Eigenschaft der Transformation (2.) lässt sich, wenn die Differentialgleichung (B.) gegeben ist, für jede rationale Transformation (1.) auf algebraische Weise entscheiden, ob in der Differentialgleichung (C.) die Mehrdeutigkeit von t als Function von η mit dem Grade von $\varphi(t)$ übereinstimmt oder nicht, es lässt sich also in jedem gegebenen Falle die allgemeinste Form einer Differentialgleichung (C.) mit der discontinuirlichen Gruppe G und p-deutig umkehrbarem Integralquotienten angeben.

Betrachten wir nun die zu der Differentialgleichung (B.) gehörige *allgemeine Primform***) als Function der mit x durch die rationale Gleichung

$$(4.) \qquad x = \varphi(t) = \frac{g(t)}{h(t)}$$

---

*) Vergl. *Poincaré*, Acta Mathem. Bd. 4, § 16, S. 285ff.

**) Dieses Journal, Bd. 110, S. 146.

verknüpften Variabeln t. Mögen dem $x = a_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, n+1)$ die Werthe $t = b_i^{(\varkappa)}$ $(i = 1, 2, \ldots, \mu_\varkappa)$ als $\lambda_i^{(\varkappa)}$-fach zu zählende Wurzeln entsprechen, so dass also

$$(4^a.) \qquad \sum_{i=1}^{\mu_\varkappa} \lambda_i^{(\varkappa)} = p,$$

und setzen wir überdies voraus, dass $b_{\mu_{n+1}}^{(n+1)} = \infty$ sei, dann ist

$$(5.) \qquad h(t) = \prod_{i=1}^{\mu_{n+1}-1} (t - b_i^{(n+1)})^{\lambda_i^{(n+1)}},$$

und wenn

$$(6.) \quad hg' - gh' = \prod_{\varkappa=1}^{n} \prod_{i=1}^{\mu_\varkappa} (t - b_i^{(\varkappa)})^{\lambda_i^{(\varkappa)}-1} \prod_{i=1}^{\mu_{n+1}-1} (t - b_i^{(n+1)})^{\lambda_i^{(n+1)}-1} \prod_{i=1}^{\mu} (t - b_i),$$

wo g', h' die Ableitungen von g, h nach t und $b_1, \ldots, b_\mu$ von den $b_i^{(\varkappa)}$ verschiedene Grössen bedeuten: so haben wir die Gleichung

$$(7.) \qquad \mu = 2p - 2 - \sum_{\varkappa=1}^{n+1} \sum_{i=1}^{\mu_\varkappa} (\lambda_i^{(\varkappa)} - 1).$$

Die Differenz der Wurzeln der zu $t = b_i^{(\varkappa)}$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (C.) ist

$$\frac{\lambda_i^{(\varkappa)}}{\beta_\varkappa};$$

diese Punkte sind also wesentlich singuläre, unwesentlich singuläre oder reguläre Stellen, je nachdem $\lambda_i^{(\varkappa)}$ kleiner als $\beta_\varkappa$, ein Vielfaches von $\beta_\varkappa$ oder gleich $\beta_\varkappa$ ist; dagegen sind $t = b_1, \ldots, b_\mu$ im Allgemeinen, d. h. wenn diese Werthe sämmtlich von einander verschieden sind, unwesentlich singuläre Punkte, und die Differenz der Wurzeln der zu denselben gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen ist gleich Zwei.

Wir schreiben die allgemeine Primform in der Gestalt:

$$F(y_1, y_2) = y_1^\nu X(\eta) = (ax+b) \prod_{\varkappa=1}^{n} (x - a_\varkappa)^{\nu\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{\beta_\varkappa}\right)}; \quad -\frac{2}{\nu} = \sum_{\varkappa=1}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{\beta_\varkappa}\right) - 2,$$

und in den Elementen

$$\mathfrak{y}_1 = \left(\frac{dt}{dx}\right)^{\frac{1}{2}} y_1 = \left(\frac{dt}{d\eta}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \mathfrak{y}_2 = \eta \mathfrak{y}_1$$

des zur Differentialgleichung (C.) gehörigen Fundamentalsystems:

$$\Phi(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2) = \left(\frac{dt}{dx}\right)^{\frac{\nu}{2}} F(y_1, y_2) = \mathfrak{y}_1^\nu X(\eta);$$

dann ist den Gleichungen (5.), (6.) zufolge:

$$(8.)\quad \left\{ \begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Phi(\mathfrak{y}_1,\ \mathfrak{y}_2) \\ = f(t) \prod_{\varkappa=1}^{n} \prod_{i=1}^{\mu_\varkappa} (t-b_i^{(\varkappa)})^{\nu\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{\lambda_i^{(\varkappa)}}{\beta_\varkappa}\right)} \prod_{i=1}^{\mu_{n+1}-1} (t-b_i^{(n+1)})^{\nu\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{\lambda_i^{(n+1)}}{\beta_{n+1}}\right)} \prod_{i=1}^{\mu} (t-b_i)^{-\frac{\nu}{2}}, \end{array} \right.$$

wo

$$(9.)\qquad f(t) = ag(t)+bh(t)$$

gesetzt wurde. Bezeichnen wir mit $b_1, b_2, \ldots, b_r, b_{r+1}=\infty$ die sämmtlichen singulären Punkte der Differentialgleichung (C.), mit $\delta_\varkappa$ die nicht negative Differenz der Wurzeln der zu $b_\varkappa$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung, so stellt der Ausdruck

$$(10.)\qquad f(t) \prod_{\varkappa=1}^{r} (t-b_\varkappa)^{Np\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\delta_\varkappa\right)},$$

wo

$$(11.)\qquad -\frac{2}{N} = \sum_{\varkappa=1}^{r+1} (1-\delta_\varkappa)-2$$

ist, eine ganze invariante eindeutige Form von $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2$ dar, welche *innerhalb* des Existenzbereichs L der Function x von η nur an den den Wurzeln von $f(t)=0$ entsprechenden η-Werthen, also nach Gleichung (9.) innerhalb des zur Gruppe G gehörigen Fundamentalbereichs nur an einer Stelle η verschwindet. Dieser Ausdruck ist also eine Primform, welche dieselbe Nullstelle hat wie $\Phi(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2)$; er muss also nach dem Theorem 1), No. II meiner Arbeit*) mit $\Phi(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2)$ übereinstimmen. Wir schliessen hieraus, dass

$$(12.)\qquad N = \frac{\nu}{p}$$

ist, ein Resultat, welches sich auch durch directe Ausrechnung verificiren lässt. Ist keines der $\beta_\varkappa$ unendlich, also auch keines der $\delta_\varkappa$ gleich Null, so liefert die Zahl $-\frac{1}{N}$ die Anzahl der Nullstellen von $\mathfrak{y}_1$ als Function von t, wobei jede Nullstelle mit ihrer zugehörigen Ordnungszahl, die Unendlichkeitsstellen als negative Nullstellen zu zählen sind. Da G eine *Fuchs*sche Gruppe ist, so ist der mit 2π multiplicirte absolute Betrag derselben Zahl gleich dem pseudosphärischen Inhalt (dem *Poincaré*schen S) des zur Differentialgleichung (C.) gehörigen Fundamentalbereichs, und da dieser offenbar aus p neben einander oder über einander oder theils neben, theils über einander gelagerten

*) Dieses Journal Bd. 110, S. 147.

Fundamentalbereichen der Differentialgleichung (B.) besteht, (je nachdem nämlich t eindeutig oder p-deutig oder von geringerer als p-facher Vieldeutigkeit in η ist), ist die Gleichung (12.) auch geometrisch evident.

Da die Differentialgleichung (A.), in welcher ξ eine p-werthige Function von η ist, in der Differentialgleichung (C.) enthalten sein muss, gelten die hergeleiteten Formeln, wenn wir in denselben ξ an die Stelle von t setzen, unmittelbar für die Differentialgleichung (A.). Wir haben also das Theorem:

I. ***Wenn in der Differentialgleichung*** (A.) ***die unabhängige Variable als Function des Integralquotienten von endlicher Vieldeutigkeit sein soll, so muss die Zahl N ein aliquoter Theil der Zahl ν sein; die letztere ist unmittelbar gegeben, sobald die Gruppe der Differentialgleichung*** (A.) ***bekannt ist.***

Bedeutet ϱ_i die kleinere der Wurzeln der zu $\xi = b_i$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung, ist also

$$\varrho_i = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\delta_i,$$

so ist im Allgemeinen jede Primform μten Grades, wo $|\mu| \leqq |\nu|$ ist, in der Umgebung von $\xi = b_i$ in der Gestalt:

$$\Phi = (\xi - b_i)^{\mu\varrho_i} W(\xi) \tag{13.}$$

darstellbar, wo $W(\xi)$ die Wurzel aus einer rationalen Function ist, die für $\xi = b_i$ einen endlichen von Null verschiedenen Werth hat. Nur wenn dem $\xi = b_i$ der Werth $x = a$ entspricht, lautet*) für die zu $x = a$ gehörige Primform $\mu_i$ten Grades Φ_a die Entwickelung in der Umgebung von $\xi = b_i$

$$\Phi_a = (\xi - b_i)^{(\mu_i - 2)\varrho_i + 1} W(\xi), \tag{14.}$$

wo $W(\xi)$ dieselbe Bedeutung hat wie in Gleichung (13.), und wo, wenn a ein singulärer Punkt der Differentialgleichung (B.) und das zugehörige β eine endliche Zahl ist, $\mu_i \beta = \nu$, dagegen wenn $\beta = \infty$ oder a eine nicht singuläre Stelle ist**), $\mu_i = \nu$ zu nehmen ist. Es gilt also das folgende, für die algebraisch integrirbaren Differentialgleichungen von Herrn ***Fuchs******) aufgestellte Theorem:

II. ***Von den zur Differentialgleichung*** (A.) ***gehörigen Primformen hat in der Umgebung des singulären Punktes $\xi = b_i$ eine die Gestalt*** (14.), ***die übrigen die Gestalt*** (13.).

---

*) Vergl. a. a. O. S. 146.

**) a. a. O. No. III S. 152.

***) Dieses Journal Bd. 85, S. 17.

Ferner ergiebt sich aus dem Vorhergehenden unmittelbar:

III. ***Die Nenner der Wurzeln der zu nicht logarithmisch singulären Punkten gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen der Differentialgleichung*** (A.) ***sind Theiler der Zahlen*** $2\beta_\varkappa$ (wo $\varkappa$ diejenigen der Zahlen 1, 2, ..., $n+1$ bedeutet, für welche $\beta_\varkappa$ einen endlichen Werth hat); ***für logarithmisch singuläre Punkte haben die determinirenden Fundamentalgleichungen gleiche Wurzeln.***

Wenn die Differentialgleichung (A.) durchaus algebraische Integrale hat, können bekanntlich*), falls der Grad der Primform niedrigsten Grades grösser als zwei ist, die $\beta_\varkappa$ nur die Werthe 2, 3, 4, 5 annehmen; in diesem Falle stimmt unser Satz III. mit dem Theorem von Herrn *Fuchs***) überein. Der hier gelieferte Beweis desselben beruht auf wesentlich anderen Principien als die vier verschiedenen Beweise, welche Herr *Fuchs****) für sein Theorem gegeben hat; für den auf endliche Werthe der $\beta_\varkappa$ bezüglichen Theil des Satzes III. möge hier noch ein zweiter Beweis folgen.

Seien $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n, \Sigma_{n+1}$ die Substitutionen, welche ein wohlbestimmter Zweig von η erleidet, wenn die unabhängige Variable x der Differentialgleichung (B.) einfache, positive Umläufe um die Punkte a_1, $a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ vollzieht, und seien $a_{e1}, a_{e2}, \ldots, a_{em}, a_{em+1} = \infty$ diejenigen dieser singulären Werthe, für welche $\beta_\varkappa$ einen endlichen Werth hat. Dann sind die Substitutionen $\Sigma_{e\varkappa}$, $(\varkappa = 1, 2, \ldots, m+1)$ elliptische von der Periode $\beta_{e\varkappa}$, d. h. es ist

$$\Sigma_{e\varkappa}^{\beta_{e\varkappa}} = 1, \tag{15.}$$

und wenn wir mit $\alpha_{e\varkappa}$ denjenigen Werth bezeichnen, welchen jener Zweig von η im Punkte $x = a_{e\varkappa}$ annimmt, ist $\alpha_{e\varkappa}$ der innerhalb des Existenzbereichs L der Function x von η gelegene Doppelpunkt von $\Sigma_{e\varkappa}$. Da $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$ ein System von Fundamentalsubstitutionen der Gruppe G constituiren und

$$\Sigma_{n+1} = (\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n)^{-1}$$

ist, werden durch die Formel

$$\Sigma_{e\varkappa}^{\lambda_\varkappa}, \qquad (\lambda_\varkappa = 1, 2, \ldots, \beta_{e\varkappa}-1) \tag{16.}$$

die sämmtlichen elliptischen Substitutionen der Gruppe G dargestellt, welche

---

*) Vgl. z. B. *Schwarz,* dieses Journal Bd. 75, S. 323.

**) Dieses Journal Bd. 81, S. 135; Bd. 85, S. 18, 21.

***) Ebenda.

$\eta = \alpha_{e\varkappa}$ zum Doppelpunkt haben. Da ferner als Doppelpunkte von elliptischen Substitutionen der Gruppe G nur solche innerhalb L gelegenen η-Werthe fungiren können, die den Punkten $\alpha_{e\varkappa}$ congruent sind, d. h. aus diesen durch Substitutionen der Gruppe hervorgehen, werden wir die Gesammtheit der in der Gruppe G enthaltenen elliptischen Substitutionen erhalten, indem wir die Substitutionen (16.) für $\varkappa = 1, 2, \ldots, m+1$ mit allen Substitutionen von G transformiren; insbesondere werden also alle elliptischen Substitutionen, welche dem $\alpha_{e\varkappa}$ congruente Punkte zu Doppelpunkten haben, in der Form

$$S\Sigma_{e\varkappa}^{\lambda_\varkappa}S^{-1}, \qquad (\lambda_\varkappa = 1, 2, \ldots, \beta_{e\varkappa}-1)$$

enthalten sein, wo S eine beliebige Substitution von G bedeutet. Nun sind die Substitutionen $U_i^{(e\varkappa)}$, welche jener Zweig von η erfährt, wenn die unabhängige Variable ξ der Differentialgleichung (A.) einfache positive Umläufe um die Punkte $\xi = b_i^{(e\varkappa)}$ vollzieht, offenbar elliptische Substitutionen von G, deren innerhalb L gelegene Doppelpunkte dem Punkte $\eta = \alpha_{e\varkappa}$ congruent sind, folglich ist

$$U_i^{(e\varkappa)} = S_i^{(e\varkappa)}\Sigma_{e\varkappa}^{\lambda_i^{(e\varkappa)}}(S_i^{(e\varkappa)})^{-1},$$

wenn

$$S_i^{(e\varkappa)}(\alpha_{e\varkappa})$$

den innerhalb L gelegenen Doppelpunkt von $U_i^{(e\varkappa)}$ bedeutet. Sei nun $\beta_i^{(e\varkappa)}$ der Nenner der positiven Differenz $\delta_i^{(e\varkappa)}$ der Wurzeln der zu $\xi = b_i^{(e\varkappa)}$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung, so ist $\beta_i^{(e\varkappa)}$ die *kleinste* Zahl, für welche

$$(U_i^{(e\varkappa)})^{\beta_i^{(e\varkappa)}} = 1,$$

und folglich ist nach Gleichung (15.)

$$\lambda_i^{(e\varkappa)}\beta_i^{(e\varkappa)} = \varrho\beta_{e\varkappa},$$

wo ϱ eine ganze Zahl ist, die mit $\beta_i^{(e\varkappa)}$ keinen Theiler gemein hat. Hieraus ergiebt sich:

$$\beta_{e\varkappa} \equiv 0 \pmod{\beta_i^{(e\varkappa)}},$$

d. h. der Satz III.

Wenn die Differentialgleichung (B.) bekannt ist, so lässt sich auf Grund der vorhergehenden Entwickelungen stets durch einen endlichen Process entscheiden, ob ξ als Function von η von endlicher Vieldeutigkeit

ist oder nicht. Dies ist also z. B. stets möglich, wenn $\xi = x$ und

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{\psi(x)}}\left(\theta(x)y + \frac{dy}{dx}\right),$$

wo

$$\psi = \theta^2 - \frac{d\theta}{dx} - P(x)$$

und θ eine beliebige rationale Function von x bedeutet, d. h. wenn*) die Differentialgleichungen (A.) und (B.) nach der Bezeichnungsweise von *Riemann***) zu derselben Klasse oder nach der von Herrn *Poincaré****) zu derselben Art (espèce) gehören. In vielen Fällen lässt sich jedoch diese Frage für eine gegebene Differentialgleichung (A.) auch ohne Kenntniss der Differentialgleichung (B.), wenigstens im negativen Sinne, entscheiden. Ergiebt sich z. B. für die Zahl N ein positiver Werth, so muss, damit ξ von endlicher Vieldeutigkeit in η sei, die Differentialgleichung algebraisch integrirbar sein, es bedarf also nur der Anwendung der von Herrn *Fuchs* angegebenen Kriterien. Wenn für einen singulären Punkt die Differenz der Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung eine ganze Zahl, dieser Punkt aber kein unwesentlich singulärer ist, so ist ξ jedenfalls unendlich vieldeutig in η, wie aus dem Theorem III., aber auch schon daraus folgt, dass ξ in der Umgebung eines diesem Punkte entsprechenden η-Werthes selbst von unendlicher Vieldeutigkeit ist; als Beispiel für diesen Fall kann etwa die Differentialgleichung dienen, welcher die Periodicitätsmoduln des elliptischen Integrals zweiter Gattung als Functionen des Moduls genügen. Im allgemeinen Falle leitet die Analogie mit den auf die algebraisch integrirbaren Differentialgleichungen bezüglichen Resultaten von Herrn *Fuchs* auf eine Methode, welche eine Beantwortung der angeregten Frage auch ohne Kenntniss der Differentialgleichung (B.) gestattet, und die überdies einige Gesichtspunkte zu Tage treten lässt, die vielleicht der Mittheilung nicht unwerth erscheinen.

III.

Der in Nr. I aufgestellte Satz I. lässt sich in folgender Weise umkehren:

---

*) Vgl. *Poincaré,* Acta Mathematica Bd. 5, S. 220.

**) Gesammelte Werke, Nachlass, S. 361.

***) a. a. O. S. 212.

I. ***Wenn eine aus den Elementen*** η_1, η_2 ***eines Fundamentalsystems der Differentialgleichung*** (A.) ***gebildete invariante eindeutige Form die Wurzel aus einer rationalen Function von*** ξ ***ist, so ist*** ξ ***als Function von*** η ***von endlicher Vieldeutigkeit.***

Zum Beweise dieser Umkehrung genügt es, auf die Gleichung (10.) Nr. I meiner Arbeit*) zu verweisen, in welcher unter der in unserer Behauptung enthaltenen Annahme das zweite Glied eine algebraische Function von ξ ist. Aus dem analogen Satze für die Differentialgleichungen mit durchaus algebraischen Integralen**) fliessen bei Herrn ***Fuchs*** die Kriterien für die algebraische Integrabilität, weil 1) bekannt ist, dass, wenn der Grad der Primform niedrigsten Grades grösser als 2 ist, die oben mit $\beta_\varkappa$ bezeichneten Zahlen nicht grösser als 5 sein können, und 2) vermöge der Thatsache, dass bei Herrn ***Fuchs*** die ganzen invarianten Formen ganze ***rationale*** Functionen der η_1, η_2 sind, leicht übersehen werden kann, wie sich eine solche Form verhält, wenn man in derselben η_1, η_2 durch ein Fundamentalsystem u_1, u_2 einer ***beliebigen*** linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit in ξ rationalen Coefficienten ersetzt und die unabhängige Variable ξ alle möglichen Umläufe vollziehen lässt. Untersuchen wir, in wie weit diese beiden Umstände in unserem allgemeinen Falle zutreffen.

Was zunächst den ersten Punkt anlangt, so lässt sich, wenn die Differentialgleichung (A.) gegeben ist, auf folgende Weise eine ***stets angebbare*** obere Grenze für die endlich bleibenden $\beta_\varkappa$ bestimmen. Da für $N \geqq 0$ $\beta_\varkappa \leqq 6$ sein muss, können wir $N < 0$, also nach Gleichung (12.), Nr. II, auch $\nu < 0$ voraussetzen. Dann ist, wenn alle $\beta_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, n+1$) unendlich gross sind, $(1-n)\nu = 2$, und wenn die sämmtlichen $\beta_\varkappa$ den Werth 2 haben, $(3-n)\nu = 4$; folglich ist allemale

$$\frac{n-1}{2} \geqq -\frac{1}{\nu} \geqq \frac{n-3}{4}.$$

Es bedeutet n die Anzahl der Fundamentalsubstitutionen der zur Differentialgleichung (A.) gehörigen Gruppe, also $n \leqq r$, ferner ist für $n = 2$, $-\nu \leqq 42$, ($-\nu = 42$ entspricht $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 3$, $\beta_3 = 7$), also

$$\frac{\nu}{N} = p \leqq 42\,\frac{-1}{N},$$

d. h. wir haben für $\nu = Np$ ebenso wie für n nur eine ***endliche*** Anzahl von

*) Dieses Journal Bd. 110, S. 140.

**) Dieses Journal Bd. 81.

Möglichkeiten. Denken wir uns den Zahlen ν, n ein bestimmtes der für dieselben als möglich erkannten Werthsysteme beigelegt, und sei $\sigma\nu = -\varrho$, wo ϱ, σ positive ganze Zahlen ohne gemeinsamen Theiler bedeuten, so ist also:

$$\varrho \sum_{\varkappa=1}^{n+1} \frac{1}{\beta_\varkappa} = \varrho(n-1)-2\sigma,$$

folglich

$$\beta_\varkappa \geqq \frac{\varrho}{\varrho(n-1)-2\sigma},$$

aber jedenfalls $\beta_\varkappa \geqq 2$. Sei μ die sich so ergebende ganzzahlige untere Grenze für $\beta_\varkappa$, so unterliegt die Maximalanzahl $\mathfrak{a}$ derjenigen $\beta_\varkappa$ die unendlich gross sein können, der Beschränkung

$$\mathfrak{a} \leqq n+1-\frac{\varrho(n-1)-2\sigma}{\varrho}\mu.$$

Sei nun $\lambda \leqq \mathfrak{a}$ die Anzahl der unendlich grossen $\beta_\varkappa$, so ist für jedes endliche $\beta_\varkappa$:

$$\frac{1}{\beta_\varkappa} > \frac{\varrho(n-1)-2\sigma}{\varrho} - \sum_{i=1}^{n-\lambda} \frac{1}{\mu_i},$$

wo die μ_i als die möglichst kleinsten, aber nicht unterhalb μ liegenden positiven ganzen Zahlen zu wählen sind, für welche die linke Seite dieser Ungleichung einen positiven Werth erhält, der nicht grösser ist als $\frac{1}{2}$. Also giebt es für jedes Werthsystem ν, n, λ, und da diese nur in beschränkter Anzahl vorhanden sind, überhaupt, eine obere Grenze ω für die endlich bleibenden $\beta_\varkappa$.

Wenn wir holoedrisch isomorphe Gruppen als nicht wesentlich von einander verschieden betrachten, so ist nunmehr leicht einzusehen, dass es nur eine endliche Anzahl wesentlich verschiedener Gruppen geben kann, welche den Anforderungen genügen, die vermöge der postulirten Beschaffenheit der Differentialgleichung (A.) an die Gruppe derselben zu stellen sind. Bezeichnen wir nämlich die Seiten des Fundamentalpolygons der Gruppe G der Reihe nach mit $1, 2, \ldots, 2n$, so können wir in der von Herrn *Poincaré**) benutzten Schreibweise das Fundamentalpolygon durch das Symbol

$$(1.) \qquad (1,\ 2n;\ 2,\ 2n-1;\ \ldots;\ n,\ n+1)$$

darstellen, und es bilden die Ecken $(1, 2n)$ und $(n, n+1)$ jede für sich, dagegen die Ecken $(\varkappa-1, \varkappa)$ und $(2n-\varkappa, 2n-\varkappa+1)$, für $\varkappa = 2, 3, \ldots, (n-1)$, zusammen je einen Cyklus; wir bezeichnen diese Cykeln mit (1), $(n+1)$

*) Acta Mathematica Bd. 1, S. 36.

beziehungsweise $(\varkappa.)$. Bedeutet dann $S_\varkappa$ die Substitution, welche die Seite $\varkappa$ in $2n-\varkappa$ überführt, und setzen wir

$$\Sigma_1 = S_1, \quad \Sigma_\varkappa = S_{\varkappa-1}^{-1} S_\varkappa, \quad \Sigma_{n+1} = S_n^{-1}, \qquad (\varkappa = 2, 3, \ldots, n)$$

so ist $\Sigma_\varkappa$, $(\varkappa = 1, 2, \ldots, n+1)$ eine elliptische Substitution von der Periode $\beta_\varkappa$, wenn die Summe der Winkel des Cyklus $(\varkappa)$ $\frac{2\pi}{\beta_\varkappa}$ beträgt, d. h.

$$\Sigma_\varkappa^{\beta_\varkappa} = 1, \tag{2.}$$

dagegen ist $\Sigma_\varkappa$ eine parabolische Substitution, wenn $\beta_\varkappa = \infty$ ist. Die Relationen (2.) sind die einzigen Fundamentalrelationen der Gruppe*), und folglich sind zwei Gruppen, für welche das Symbol (1.) und die Werthe der Zahlen $\beta_\varkappa$ übereinstimmen, holoedrisch isomorph**), also nicht wesentlich von einander verschieden. Da die Gruppe der Differentialgleichung (A.) eine *Fuchs*sche vom Geschlecht Null sein soll, ist das Symbol (1.) vollkommen determinirt, sobald die Zahl n gegeben ist, und vermöge unserer Forderung muss $n \leqq r$ sein, während die $\beta_\varkappa$ nur die Werthe 2, 3, ..., ω oder ∞ annehmen können. Es ist also eine blosse Aufgabe der Combinatorik, die Anzahl der in Betracht zu ziehenden, wesentlich verschiedenen Gruppen zu bestimmen, und von dieser schon an sich endlichen Anzahl sind alsdann zu Folge des Satzes III. voriger No. nur diejenigen beizubehalten, für welche sich in dem System der endlichen $\beta_\varkappa$ Vielfache von allen Nennern der von Null verschiedenen Differenzen der Wurzeln der zur Differentialgleichung (A.) gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen vorfinden, und für welche die Gleichung (12.) voriger No. sich durch eine ganze Zahl p befriedigen lässt. *Man erhält auf diese Weise ein endliches Schema von wesentlich verschiedenen Gruppen-Typen, unter denen sich nothwendig einer finden muss, der mit der Gruppe unserer Differentialgleichung holoedrisch isomorph ist, wenn ξ als Function von η von endlicher Vieldeutigkeit sein soll.* Greifen wir einen dieser Typen heraus, so wird derselbe gegeben durch eine Gruppe Γ, die noch von einer gewissen Anzahl willkürlicher Constanten abhängt; wir können z. B. die innerhalb beziehungsweise auf der Begrenzung von L gelegenen Doppelpunkte eines Systems von elliptischen beziehungsweise parabolischen Fundamentalsubstitutionen als diese willkürlichen Constanten betrachten. Dann handelt es sich zunächst darum, für diese Gruppe Γ eine in zwei Unbestimmten u_1, u_2 homogene ganze invariante Form, am

*) Vgl. *Poincaré*, a. a. O. S. 47.

**) Vgl. ebenda S. 10.

besten gleich die allgemeine Primform aufzustellen, d. h. also einen in u_1, u_2 homogenen, für endliche Werthe der u_1, u_2 endlich bleibenden Ausdruck $\Phi(u_1, u_2)$ vom Grade ν anzugeben, wo

$$-\frac{2}{\nu} = \sum_{\varkappa=1}^{n+1}\left(1-\frac{1}{\beta_\varkappa}\right)-2,$$

der sich nur mit einer Constanten multiplicirt, wenn $\frac{u_2}{u_1}$ eine Substitution der Gruppe erleidet, und der, mit $u_1^{-\nu}$ multiplicirt, in eine eindeutige Function von $\frac{u_2}{u_1}$ übergeht, die innerhalb des Fundamentalbereichs der Gruppe nur an einer Stelle verschwindet. Wir werden in den Nummern IV. und V. ein Verfahren beschreiben, welches zur Herstellung eines solchen Ausdrucks $\Phi(u_1, u_2)$ führen kann. Setzen wir nun in $\Phi(u_1, u_2)$ für u_1, u_2 ein Fundamentalsystem von Integralen einer *beliebigen* Differentialgleichung zweiter Ordnung mit in ξ rationalen Coefficienten,

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} = R(\xi)u, \tag{3.}$$

und — wir kommen damit auf den zweiten der für die algebraisch integrirbaren Differentialgleichungen hervorgehobenen beiden Punkte — studiren wir das Verhalten von $\Phi(u_1, u_2)$, wenn ξ Umläufe vollzieht. Durch einen geschlossenen Weg von ξ erfahren u_1, u_2 beziehungsweise $\frac{u_2}{u_1}$ eine lineare Substitution T der zur Differentialgleichung (3.) gehörigen Gruppe E, es wird also $\Phi(u_1, u_2)$ übergehen in einen ähnlich beschaffenen Ausdruck $\Phi'(u_1, u_2)$, der aber nicht mehr für die Substitutionen der Gruppe Γ, sondern für die der transformirten Gruppe $T\Gamma T^{-1}$ invariant bleibt. Diese transformirte Gruppe ist aber mit der ursprünglichen holoedrisch isomorph, *also bewirkt ein Umlauf von ξ in $\Phi(u_1, u_2)$ nur eine Abänderung der in diesem Ausdruck auftretenden willkürlichen Constanten, von denen der Typus Γ noch abhing, und durch deren Fixirung eine bestimmte Gruppe dieses Typus charakterisirt wird.* Auf die eingehende Untersuchung der Veränderungen, welche diese willkürlichen Constanten in Φ erleiden, wenn die Gruppe Γ durch die Substitutionen einer anderen Gruppe E transformirt wird, hoffe ich in einer besonderen Arbeit zurückkommen zu können; diese Untersuchung wird uns kennen lehren die Natur der Abhängigkeit des Ausdrucks $\Phi(u_1, u_2)$ von der unabhängigen Variabeln ξ der Differentialgleichung (3.),

d. h. also, wenn

$$\Phi(u_1,\ u_2) = J(\xi)$$

ist, die Eigenschaften von $J(\xi)$ und die Art, wie in diese Function die willkürlichen Constanten von Φ und die constanten Coefficienten der rationalen Function $R(\xi)$ eingehen. Es muss dann entschieden werden, ob sich die willkürlichen Constanten in Φ so wählen lassen, dass, wenn man $u_1 = \mathfrak{y}_1$, $u_2 = \mathfrak{y}_2$, $R(\xi) = Q(\xi)$ setzt,

$$\Phi(u_1,\ u_2) = f(\xi) \prod_{\varkappa=1}^{r} (\xi - b_\varkappa)^{Np\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\delta_\varkappa\right)}$$

wird, wo

$$p = \frac{N}{\nu},$$

und $f(\xi)$ eine ganze rationale Function $p$ten Grades von ξ bedeutet. Diese Entscheidung ist für jeden der in dem aufgestellten endlichen Schema enthaltenen Gruppen-Typen durchzuführen, und wir wissen, dass es für die endliche Vieldeutigkeit der Function ξ von η ***nothwendig*** und ***hinreichend*** ist, dass wenigstens für einen dieser Typen die Entscheidung im bejahenden Sinne erfolge.

IV.

Dasjenige, was einem Typus holoedrisch isomorpher Gruppen gemeinsam ist, habe ich in meiner Arbeit*) als die ***Arithmetik der Gruppe*** bezeichnet; wir wollen uns die Aufgabe stellen, für eine *Fuchs*sche Gruppe Γ, wenn nur die Arithmetik derselben bekannt ist, die allgemeine Primform νten Grades anzugeben. Die Arithmetik von Γ ist bestimmt durch die Anzahl n der Fundamentalsubstitutionen, und durch die Summen $\frac{2\pi}{\beta_\varkappa}$ der Winkel, die zu den von den Ecken des Fundamentalpolygons gebildeten Cykeln gehören. Es soll nun zunächst für die Gruppe Γ ein System immer enger werdender Untergruppen mit endlichem Quotienten aufgestellt werden.

Zu diesem Ende betrachten wir eine Gruppe E, die auch aus n Fundamentalsubstitutionen gebildet ist, für welche aber alle $\beta_\varkappa$ unendlich gross sind; zwischen den Fundamentalsubstitutionen einer solchen Gruppe bestehen keinerlei Fundamentalrelationen, und E ist meroedrisch isomorph mit Γ**). Die Gruppe E geht in die Gruppe Γ über, wenn wir, unter

*) Dieses Journal Bd. 105, S. 213.

**) Vergl. *Poincaré*, Acta Mathematica Bd. 1, S. 47.

Beibehaltung der in der vorigen Nummer für die Fundamentalsubstitutionen eingeführten Bezeichnungen, in den Substitutionen von E setzen:

$$\Sigma_\varkappa^{\beta_\varkappa} = 1, \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n+1); \tag{1.}$$

wir schreiben dies:

$$E \equiv I'(\text{modd.}\,\Sigma_\varkappa^{\beta_\varkappa} - 1). \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n+1)$$

Wir können also die Zerlegung von I' durchführen, indem wir erst E zerlegen und dann alle Substitutionen von E mit Hülfe der Gleichungen (1.) reduciren. Die Zerlegung von E bewirken wir auf folgende Weise. Wir bilden die $n_1 = n(2n-1)$ Substitutionen

$$S_\varkappa^3, \quad S_\varkappa S_\lambda S_\varkappa, \quad S_\varkappa S_\lambda^{-1} S_\varkappa, \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, n, \ \varkappa \gtrless \lambda) \tag{2.}$$

bezeichnen sie in der Aufeinanderfolge:

$$S_1S_1S_1, \quad S_1S_2S_1, \quad \ldots, \quad S_1S_nS_1, \quad S_1S_n^{-1}S_1, \quad \ldots, \quad S_1S_2^{-1}S_1; \quad S_2S_1^{-1}S_2,$$
$$S_2S_1S_2, \quad S_2S_2S_2, \quad \ldots, \quad S_2S_nS_2, \quad S_2S_n^{-1}S_2, \quad \ldots, \quad S_2S_3^{-1}S_2; \quad \ldots;$$
$$S_\varkappa S_{\varkappa-1}^{-1}S_\varkappa, \quad \ldots, \quad S_\varkappa S_1^{-1}S_\varkappa, \quad S_\varkappa S_1 S_\varkappa, \quad \ldots,$$
$$S_\varkappa S_nS_\varkappa, \quad S_\varkappa S_n^{-1}S_\varkappa, \quad \ldots, \quad S_\varkappa S_{\varkappa+1}^{-1}S_\varkappa; \quad \ldots$$

der Reihe nach mit $S_\varkappa^{(1)}$, $(\varkappa = 1, 2, \ldots, n_1)$, und construiren aus denselben als Fundamentalsubstitutionen eine Gruppe E_1. Sei dann

$$U = S_{\varkappa_1}^{\lambda_{\varkappa_1}} S_{\varkappa_2}^{\lambda_{\varkappa_2}} \ldots S_{\varkappa_\mu}^{\lambda_{\varkappa_\mu}}, \qquad (\varkappa_i \gtrless \varkappa_{i-1}, \ i = 2, 3, \ldots, \mu)$$

irgend eine Substitution von E, wo die $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\mu$ irgendwelche der Zahlen 1, 2, …, n, die $\lambda_{\varkappa_i}$ positive oder negative ganze Zahlen bedeuten, und nennen wir*)

$$\sum_{i=1}^{\mu} |\lambda_{\varkappa_i}| = \text{Ind}_0 U$$

den *Index* der Substitution U in Bezug auf die Gruppe E, so lässt sich nach dem in meiner Arbeit**) angegebenen Verfahren leicht zeigen, dass U in die Form

$$U = U^{(1)} S_\varkappa^{\pm 1} \tag{3.}$$

gesetzt werden kann. Hierbei bedeutet $U^{(1)}$ eine Substitution von E_1, $\varkappa$ eine bestimmte der Zahlen 0, 1, 2, …, n, (wobei $S_0 = 1$ zu nehmen ist), und es ist

$$\text{Ind}_1 U^{(1)} < \text{Ind}_0 U,$$

*) Vergl. dieses Journal Bd. 105, S. 203.

**) a. a. O. S. 206, 207.

wenn

$$U^{(1)} = \prod_{i=1,2,\ldots,\mu_1} (S^{(1)}_{\varkappa_i})^{\lambda^{(1)}_{\varkappa_i}}, \qquad (\varkappa_i \gtrless \varkappa_{i-1})$$

und

$$\mathrm{Ind}_1 U^{(1)} = \sum_{i=1}^{\mu_1} |\lambda^{(1)}_{\varkappa_i}|$$

gesetzt wird.

Es ist also

$$(5.) \qquad E = E_1(1, S_1, S_2, \ldots, S_n, S_n^{-1}, S_{n-1}^{-1}, \ldots, S_1^{-1}),$$

d. h. E_1 ist eine Untergruppe von E mit dem *endlichen Quotienten*

$$P_1 = (1, S_1, S_2, \ldots, S_n, S_n^{-1}, S_{n-1}^{-1}, \ldots, S_1^{-1}).$$

Seien nun die Substitutionen $S^{(2)}_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, n_2;\ n_2 = n_1(2n_1-1))$ aus den $S^{(1)}_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, n_1)$ auf ähnliche Weise gebildet, wie diese aus den $S_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, n)$, und bezeichnen wir die aus den $S^{(2)}_\varkappa$ als Fundamentalsubstitutionen gebildete Gruppe mit E_2, so ist

$$E_1 = E_2(1, S^{(1)}_1, \ldots, S^{(1)}_{n_1}, (S^{(1)}_{n_1})^{-1}, \ldots, (S^{(1)}_1)^{-1}),$$

jede Substitution $U^{(1)}$ von E_1 in der Form

$$U^{(1)} = U^{(2)}(S^{(1)}_{\varkappa_1})^{\pm 1}$$

darstellbar, wo $U^{(2)}$ eine Substitution von E_2, $\varkappa_1$ eine bestimmte der Zahlen $0, 1, \ldots, n_1$, $(S^{(1)}_0 = 1)$ und in leicht verständlicher Bezeichnungsweise

$$\mathrm{Ind}_2 U^{(2)} < \mathrm{Ind}_1 U^{(1)}$$

ist. Fahren wir in dieser Bildungsweise fort, bis wir zu einer aus den Fundamentalsubstitutionen $\Sigma^{(\lambda)}_\varkappa$, $(\varkappa = 1, 2, \ldots, n_\lambda;\ n_\lambda = n_{\lambda-1}(2n_{\lambda-1}-1))$ zusammengesetzten Gruppe E_λ kommen, so ist

$$E_{\lambda-1} = E_\lambda P_\lambda,$$

wo

$$P_\lambda = (1, S^{(\lambda-1)}_1, \ldots, S^{(\lambda-1)}_{n_{\lambda-1}}, (S^{(\lambda-1)}_{n_{\lambda-1}})^{-1}, \ldots, (S^{(\lambda-1)}_1)^{-1})$$

ist. Also haben wir

$$E = E_\lambda . P_\lambda P_{\lambda-1} \ldots P_1,$$

und es ist jede Substitution U von E in der Form

$$U = U^{(\lambda)} \prod_{i=\lambda-1,\lambda,\ldots,2,1,0} (S^{(i)}_{\varkappa_i})^{\pm 1}$$

darstellbar, wo $\varkappa_i$ eine der Zahlen $0, 1, \ldots, n_{\lambda-1}$, $S^{(0)}_\varkappa = S_\varkappa$ und $S^{(i)}_0 = 1$, hingegen

$$\mathrm{Ind}_\lambda U^{(\lambda)} < \mathrm{Ind}_0 U - \lambda + 1$$

ist. Wir schliessen hieraus, ähnlich wie in meiner Arbeit*), dass

$$\lim_{\lambda=\infty} E_\lambda = \lim_{\lambda=\infty} E_{\lambda+\mu} = 1, \tag{6.}$$

wo μ eine beliebige positive ganze Zahl ist, und wenn

$$Q_\lambda = P_\lambda P_{\lambda-1} \ldots P_1$$

gesetzt wird,

$$\lim_{\lambda=\infty} Q_\lambda = E.$$

Reduciren wir in diesem für die Gruppe E entwickelten Algorithmus alle Substitutionen mit Hülfe der Gleichungen (1.), so erhalten wir einen analogen Algorithmus von Gruppen Γ_1, Γ_2, ... für die Gruppe Γ, und es ist:

$$\Gamma_\lambda \equiv E_\lambda \pmod{\Sigma_\varkappa^{\beta_\varkappa} - 1, \quad \varkappa = 1, 2, \ldots, n+1};$$

bei dieser Reduction werden sich aber im Allgemeinen die Zahlen n_λ auf kleinere Zahlen $\bar{n}_\lambda$ erniedrigen.

V.

Sei nun $x = f(z)$ eine eindeutige Function von z, die bei Anwendung der Substitutionen von E auf z ungeändert bleibt, und durch welche sich jede in demselben z-Bereiche L wie x existirende, zur Gruppe E gehörige *Fuchs*sche Function rational ausdrücken lässt, möge ferner $x_\lambda = f_\lambda(z)$ für die Gruppe E_λ und den Bereich L dieselbe Bedeutung haben wie x für die Gruppe E, dann ist**) x eine rationale Function von x_λ,

$$x = \varphi_\lambda(x_\lambda), \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots)$$

und es ist x sowohl wie jedes x_λ nur bis auf drei willkürliche Constante bestimmt, indem nämlich jede dieser Grössen durch eine beliebige lineare Function ihrer selbst ersetzt werden kann. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, dass der Punkt $z = 0$ innerhalb des Fundamentalbereichs der Gruppe E gelegen sei, und wollen uns dann die Function x_λ ($\lambda = 0, 1, 2, \ldots$; $x_0 = x$) so gewählt denken, dass sie für $z = 0$ verschwindet, in der Ecke $(n_\lambda, n_\lambda + 1)$ des Fundamentalpolygons von E_λ unendlich wird und für einen bestimmten Werth $z = \alpha$ den Werth $x_\lambda = \mathfrak{a}$ annimmt. Untersuchen wir nunmehr das Verhalten der algebraischen Function x_1 von x. Seien $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1} = \infty$ die Werthe von x, welche den Eck-

*) a. a. O. S. 210—213.

**) Vgl. *Poincaré*, Acta Mathematica Bd. 4, S. 287.

punkten $(2n, 1)$, $(1, 2)$, ..., $(n, n+1)$ des Fundamentalpolygons von E entsprechen, so sind dies offenbar die einzigen Verzweigungspunkte der Function x_1 von x. Wenn x einen einfachen positiven Umlauf um $x = a_\varkappa$ $(\varkappa = 2, 3, \ldots, n)$ vollzieht, so erfährt z die Substitution $\Sigma_\varkappa = S_{\varkappa-1}^{-1} S_\varkappa$, folglich geht durch diesen Umlauf der Zweig $x_1^{(0)} = f_1(z)$ über in

$$f_1(S_{\varkappa-1}^{-1} S_\varkappa z) = f_1(S_{\varkappa-1}^{-1} S_\varkappa S_{\varkappa-1}^{-1} . S_{\varkappa-1} z) = f_1(S_{\varkappa-1} z) = x_1^{(\varkappa-1)};$$

ein abermaliger Umlauf um $x = a_\varkappa$ führt $x_1^{(\varkappa-1)}$ über in

$$f_1(S_{\varkappa-1} S_{\varkappa-1}^{-1} S_\varkappa z) = f_1(S_\varkappa z) = x_1^{(\varkappa)},$$

und durch einen dritten Umlauf um denselben Punkt verwandelt sich $x_1^{(\varkappa)}$ wieder in

$$f_1(S_\varkappa S_{\varkappa-1}^{-1} S_\varkappa z) = f_1(z) = x_1^{(0)}.$$

Lassen wir x Umläufe um $x = a_1$ vollziehen, so verwandelt sich beim ersten Umlaufe $x_1^{(0)}$ in $f_1(S_1 z) = x_1^{(1)}$, beim zweiten in $f_1(S_1^{-1} z) = x_1^{(-1)}$, während der dritte Umlauf wieder zu $x_1^{(0)}$ zurückführt. Eine einfache Umkreisung von $x = a_{n+1}$ führt z in $S_n^{-1} z$, also $x_1^{(0)}$ in $f_1(S_n^{-1} z) = x_1^{(-n)}$ über, und dieser Zweig verwandelt sich bei Wiederholung dieses Umlaufs in $f_1(S_n z) = x_1^{(n)}$, und dies nach abermaligem Umlauf um $x = a_{n+1}$ in $x_1^{(0)}$. Der Zweig $x_1^{(\varkappa)}$ $(\varkappa = 2, 3, \ldots, n)$ verwandelt sich bei einmaligem Umlauf von x um a_1 in

$$f_1(S_\varkappa S_1 z) = f_1(S_\varkappa^{-1} z) = x_1^{(-\varkappa)},$$

und kehrt nach einem zweiten Umgang um eben diesen Punkt wieder in

$$f_1(S_\varkappa^{-1} S_1 z) = f_1(S_\varkappa z) = x_1^{(\varkappa)}$$

zurück. Ebenso führt ein einmaliger Umlauf um $x = a_{n+1}$ den Zweig $x_1^{(\varkappa)}$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, n-1)$ in $x_1^{(-\varkappa)}$ und eine Wiederholung dieses Weges wieder in $x_1^{(\varkappa)}$ über. Die Umkreisung eines Punktes a_λ, wo λ von 1, $\varkappa$, $\varkappa+1$, $n+1$ verschieden ist, lässt $x_1^{(\varkappa)}$ ungeändert, wir haben demnach, wenn die Zweige $x_1^{(\pm\varkappa)}$ durch ihre oberen Indices bezeichnet werden, für die Verzweigung der Function x_1 von x die folgenden Cykeln:

$$x = a_1 : (0,\ 1,\ -1),\quad (2,\ -2),\quad (3,\ -3),\quad \ldots,\quad (n,\ -n),$$

$$x = a_\varkappa : (0,\ \varkappa-1,\ \varkappa),\quad (\varkappa = 2,\ 3,\ \ldots,\ n),$$

$$x = a_{n+1} : (0,\ -n,\ n),\quad (1,\ -1),\quad (2,\ -2),\quad \ldots,\quad (n-1,\ -\overline{n-1});$$

die Anzahl der einfachen Verzweigungspunkte ist also gleich $4n$, wie es sein muss, da die rationale Function $\varphi_1(x_1)$ vom Grade $2n+1$ ist. Die Construction der über der x-Ebene auszubreitenden *Riemann*schen Fläche

T_1, die die Verzweigung von x_1 versinnlicht, gestaltet sich hiernach wie folgt. Wir legen längs einer die Verzweigungspunkte $x = a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ in dieser Reihenfolge verbindenden, sich selbst nicht schneidenden Curve, einen die sämmtlichen $2n+1$ Blätter (die wir durch die oberen Indices der entsprechenden Zweige bezeichnen wollen) durchdringenden Schnitt, und heften für $\lambda = 1, 2, \ldots, n$ längs $(a_\lambda, a_{\lambda+1})$ das linke Ufer des Blattes 0 an das rechte von $-\lambda$, das linke von $-\lambda$ an das rechte von λ, das linke von λ an das rechte von 0 und, wenn $\varkappa$ eine von 0 und λ verschiedene der Zahlen $0, 1, \ldots, n$ bedeutet, das linke Ufer des Blattes $-\varkappa$ an das rechte von $\varkappa$, das linke von $\varkappa$ an das rechte von $-\varkappa$. Ein von einem Punkte x ausgehender positiver Umlauf um den Punkt a_λ, $(\lambda = 2, 3, \ldots, n)$ ist dann so zu vollziehen, dass wir in dem jenen Punkt enthaltenden Blatte $\varkappa_1$ bis an das linke Ufer des Schnittes $(a_{\lambda-1}, a_\lambda)$ herangehen, diesen überschreitend nach einem Blatte $\varkappa_2$ gelangen, in diesem verbleibend an das rechte Ufer des Schnittes $(a_\lambda, a_{\lambda+1})$ herangehen, diesen überschreitend ein Blatt $\varkappa_3$ erreichen und in diesem uns dem über x liegenden Punkte annähern*).

Eine auf dieser *Riemann*schen Fläche T_1 eindeutige Function von x, die nur an einer Stelle unendlich wird, ist, abgesehen von drei willkürlichen Constanten eindeutig bestimmt, wenn wir die Werthe $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ der Verzweigungspunkte als gegeben ansehen. Fügen wir noch die Bedingung hinzu, dass der in allen Verzweigungspunkten mehrdeutige Zweig (*Hauptzweig*) dieser Function mit x gleichzeitig verschwinde und für $x = \mathfrak{a}$ eben-

*) Diese Art der Construction der *Riemann*schen Fläche ist zweckmässiger als jene, die ich in meiner Arbeit (dieses Journal Bd. 105, S. 183) für die daselbst zu Grunde gelegte algebraische Function angewandt habe, da die letztere leicht zu Missverständnissen führen kann. Unter Festhaltung der a. a. O. S. 182 benutzten Bezeichnungen wäre dann die dort definirte *Riemann*sche Fläche etwa in folgender Weise zu construiren. Man lege längs der realen Axe einen die sämmtlichen $(n+1)$ Blätter durchdringenden, von A_1 über A_2 u. s. w. bis nach A_n hin sich erstreckenden Schnitt und hefte für $\lambda = 2, 3, \ldots, n$ längs $(A_{\lambda-1}, A_\lambda)$ das linke (obere) Ufer des Blattes 0 an das rechte (untere) von λ, das linke von λ an das rechte von 1, das linke von 1 an das rechte von 0 und, wenn $\varkappa$ eine von 0, 1, λ verschiedene der Zahlen $0, 1, \ldots, n$ bedeutet, das linke Ufer des Blattes $\varkappa$ an das rechte desselben Blattes. Dem entsprechend würden auch die Auseinandersetzungen auf S. 195—197 a. a. O. zu modificiren sein; für das Wesen der daselbst behandelten Aufgabe ist diese Abänderung natürlich von keinerlei Bedeutung. — Es sei mir auch gestattet, hier auf eine andere Stelle meiner in Rede stehenden Arbeit zurückzukommen, an welcher wahrscheinlich eine, mir nun selbst auf-

falls den Werth $\mathfrak{a}$ annehme, so haben wir dadurch eine Definition der Function x_1 von x gewonnen. Die den Punkten $x = a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ entsprechenden Werthe von x_1 lassen sich einzeln den Substitutionen

$$\Sigma_1^{(1)} = S_1^{(1)}, \quad \Sigma_\varkappa^{(1)} = (S_{\varkappa-1}^{(1)})^{-1} S_\varkappa^{(1)}, \quad \Sigma_{n+1}^{(1)} = (S_n^{(1)})^{-1} \qquad (\varkappa = 2, 3, \ldots, n_1)$$

zuordnen, wir bezeichnen dieselben in der durch diese Zuordnung bedingten Reihenfolge mit $a_1^{(1)}, \ldots, a_{n_1+1}^{(1)}$ und vollenden durch die Forderung $a_{n_1+1}^{(1)} = \infty$ die Bestimmung von x_1. Mit den $a_\varkappa^{(1)}$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, n_1+1)$ als Verzweigungspunkten lässt sich dann über der x_1-Ebene eine *Riemann*sche Fläche T_2 von ähnlicher Beschaffenheit wie T_1 aufbauen, die ebenso zur Definition von x_2 dienen kann, wie T_1 zur Definition von x_1, und durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhalten wir successive, entsprechend den Gruppen E_λ, die Functionen x_λ. Es ist nun leicht einzusehen, dass diese Functionen mit wachsendem λ einer bestimmten Grenze zustreben. Wir haben zu dem Ende nur nachzuweisen, dass für jedes positive ganzzahlige μ

$$\lim_{\lambda=\infty} (x_{\lambda+\mu} - x_\lambda) = 0,$$

d. h.

$$\text{(1.)} \qquad \lim_{\lambda=\infty} x_{\lambda+\mu} = \lim_{\lambda=\infty} x_\lambda$$

sei. Aus der Natur der x_λ und aus Gleichung (6.) voriger Nummer folgt aber, dass $\lim_{\lambda=\infty} x_{\lambda+\mu}$ eine lineare Function von $\lim_{\lambda=\infty} x_\lambda$ mit constanten Coefficienten sei, und da x_λ, $x_{\lambda+\mu}$ gleichzeitig gleich 0, ∞ und $\mathfrak{a}$ werden, ergiebt

---

fallende Undeutlichkeit im Ausdruck Herrn *Hurwitz* (Mathematische Annalen Bd. 39) zu der Bemerkung veranlasst hat, die daselbst ausgesprochenen Behauptungen seien nicht richtig. Die a. a. O S. 185 in Bezug auf die Gleichung (1.), Nr. I und S. 194 in Bezug auf die allgemeinere Gleichung (2.) Nr. II aufgestellte Behauptung, die durch diese Gleichungen definirten algebraischen Functionen seien durch Angabe der Discriminante vollkommen bestimmt, ist selbstverständlich nur so gemeint, dass, wenn man in den Gleichungen (2.), Nr. I beziehungsweise (3.) Nr. II die B_ν, C_ν, beziehungsweise $b_\mu^{(\lambda)}$, $c_\mu^{(\lambda)}$ als Unbekannte betrachtet, sich unter den verschiedenen Lösungssystemen (deren Anzahl Herr *Hurwitz* in der erwähnten Arbeit bestimmt), abgesehen von drei willkürlichen Constanten, eines und nur eines findet, für welches die Gleichungen (1.) Nr. I, beziehungsweise (2.) Nr. II die geforderte Art der Verzweigung aufweisen. Dass dies nur so zu verstehen sei, geht, wie mir scheint, z. B. aus der Fussnote auf S. 183, aber überhaupt schon daraus hervor, dass ich zur Definition der betreffenden algebraischen Functionen eben die Art ihrer Verzweigung und nicht etwa bloss die Anzahl und Vertheilung der Verzweigungsstellen benutzt habe.

sich hieraus unmittelbar die Gleichung (1.). Die genauere Discussion der Grenzfunction

$$\eta = \lim x_\lambda \tag{2.}$$

kann nun nach den in meiner Arbeit*) für die daselbst behandelte analoge Frage angewandten Principien erfolgen und ergiebt, dass x_λ eine eindeutige Function von η ist, die ungeändert bleibt, wenn η die Substitutionen der *Fuchs*schen Gruppe E_λ erleidet, und die innerhalb des Fundamentalbereichs jener Gruppe jeden Werth nur einmal annimmt. Die den Punkten $x = a_1$, $a_2, \ldots, a_{n+1}$ entsprechenden η-Werthe sondern in der η-Ebene zwei Gebiete von einander; x_λ als Function von η existirt immer nur innerhalb des einen dieser Gebiete, und zwar liefert uns die Gleichung (2.) ein innerhalb des einen oder des anderen Gebietes gelegenes η, je nachdem x innerhalb des einen oder des anderen derjenigen beiden Gebiete der x-Ebene angenommen wird, in welche diese Ebene durch eine geeignet gewählte, die Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ verbindende, sich selbst nicht überkreuzende Curve zerfällt. Hieraus folgt nun bei geeigneter Wahl von z die Identität von η und z, d. h. die Gleichung

$$z = \lim_{\lambda=\infty} x_\lambda.$$

Denken wir uns nun für die Gruppe Γ, bei der die $\beta_\varkappa$ wohlbestimmte, zum Theil nicht unendlich grosse ganze Zahlen sind, den Algorithmus der Gruppen $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ aufgestellt, und bedeute wieder x_λ eine zur Gruppe Γ_λ $(x_0 = x, \Gamma_0 = \Gamma)$ gehörige *Fuchs*sche Function von z mit den oben für die zu den E_λ gehörigen x_λ getroffenen näheren Bestimmungen, und $a_1^{(\lambda)}$, $a_2^{(\lambda)}, \ldots, a_{\bar{n}_\lambda+1}^{(\lambda)}$ die Reihe der den Eckpunkten $(2\bar{n}_\lambda, 1)$, $(1, 2)$, $\ldots$, $(\bar{n}_\lambda, \bar{n}_\lambda+1)$ des Fundamentalpolygons von Γ_λ entsprechenden x_λ-Werthe, wo $\bar{n}_0 = n$, $a_\varkappa^{(0)} = a_\varkappa$, $(\varkappa = 1, 2, \ldots, n)$ zu nehmen ist.

Dann haben wir:

$$x = \varphi_\lambda(x_\lambda), \quad x_\lambda = \varphi_\mu^{(\lambda)}(x_\mu), \quad \mu > \lambda,$$

wo die φ_λ, $\varphi_\mu^{(\lambda)}$ rationale Functionen ihrer Argumente bedeuten, und es lassen sich nach dem für die zu den Gruppen E_λ gehörigen Functionen dargelegten Verfahren, wenn die Punkte $\varkappa = a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ als gegeben betrachtet werden, die x_λ als algebraische Functionen von x unzweideutig

*) Dieses Journal Bd. 105, Nr. IV, S. 212—222.

determiniren. Auch ergiebt sich wieder

$$z = \lim_{\lambda=\infty} x_\lambda,$$

und wir können nunmehr das Resultat der vorhergehenden Betrachtungen wie folgt zusammenfassen:

Bedeutet Γ einen durch die Anzahl n der Fundamentalsubstitutionen und die Perioden $\beta_1, \ldots, \beta_{n+1}$ eines vollständigen Systems elliptischer, beziehungsweise parabolischer Substitutionen gegebenen Typus holoedrisch isomorpher Fuchsscher Gruppen vom Geschlecht Null, so bestimmt derselbe einen Algorithmus, vermöge dessen sich aus einer Variabeln x und $n+1$ willkürlichen Grössen $a_1, \ldots, a_{n+1}$, von denen nicht zwei einander gleich sind, eine unendliche Reihe algebraischer Functionen $x_1, x_2, \ldots$ herstellen lässt, deren Grenzwerth z so beschaffen ist, dass x eine zur Gruppe Γ gehörige Fuchssche Function wird, die jeden Werth nur an einer Stelle des Fundamentalbereichs annimmt. Durch Angabe der $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ allein ist die Function z und somit auch die Gruppe vollkommen bestimmt, d. h. diese $n+1$ Grössen können geradezu als die willkürlich bleibenden Constanten des Typus holoedrisch isomorpher Fuchsscher Gruppen angesehen werden.

Sei

$$u_1 = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad u_2 = z u_1,$$

so hat die zum Punkte $x = v$ gehörige allgemeine Primform νten Grades die Gestalt:

$$\Phi_0(u_1, u_2) = (x-v) \prod_{\varkappa=1}^{n} (x-a_\varkappa)^{\nu\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{\beta_\varkappa}\right)},$$

und, nach den Gleichungen (8.), (10.) Nr. II, als Function von x_λ geschrieben:

$$\Phi_0(u_1, u_2) = \left(\frac{dx}{dx_\lambda}\right)^{\frac{\nu}{2}} c_\lambda \prod_{i=1}^{g_\lambda} (x_\lambda - v_i) \prod_{\varkappa=1}^{\gamma_\lambda} (x_\lambda - a_\varkappa^{(\lambda)})^{\nu\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{\beta_\varkappa^{(\lambda)}}\right)},$$

wo c_λ eine Constante, g_λ den Grad von $\varphi_\lambda(x_\lambda)$, γ_λ die Anzahl der Substitutionen $S_\varkappa^{(\lambda)}$, also

$$g_\lambda \leqq \prod_{i=0}^{\lambda-1} (2n_i+1), \quad n_0 = n,$$

$$\gamma_\lambda \leqq n_\lambda, \quad n_\lambda = n_{\lambda-1}(2n_{\lambda-1}-1),$$

$\beta_1^{(\lambda)}, \ldots, \beta_{n_\lambda}^{(\lambda)}$ die Perioden der Substitutionen

$$\Sigma_1^{(\lambda)} = S_1^{(\lambda)}, \quad \Sigma_\varkappa^{(\lambda)} = (S_{\varkappa-1}^{(\lambda)})^{-1} S_\varkappa^{(\lambda)} \qquad (\varkappa = 2, 3, \ldots, n_\lambda)$$

und $v_1, v_2, \ldots, v_{g_\lambda}$ die dem $x = v$ entsprechenden Werthe der Function x_λ bedeuten. Setzen wir also

$$\lim_{\lambda=\infty} c_\lambda \prod_{i=1}^{g_\lambda}(x_\lambda - v_\lambda) \prod_{\varkappa=1}^{\gamma_\lambda}(x_\lambda - a_\varkappa^{(\lambda)})^{\nu\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{\beta_\varkappa^{(\lambda)}}\right)} = P(z),$$

so erhalten wir, da

$$\lim_{\lambda=\infty}\frac{dx}{dx_\lambda} = \frac{dx}{dz} = u_1^2,$$

für die zum Typus *I Fuchs*scher Gruppen gehörige allgemeine Primform die Darstellung

$$\Phi_0(u_1, u_2) = u_1^\nu . P(z),$$

d. h. eine Darstellung als unendliches Product.

Fragen wir noch, unter welchen Bedingungen sich diese Primform auf eine ganze rationale Function reducirt. Hierzu ist offenbar erforderlich, dass x_λ schon für ein endliches λ gleich z ist; dann ist also x eine rationale Function von z. Damit dies eintritt, muss für $x = \varphi_\lambda(x_\lambda)$ in der in No. II für $x = \varphi(t)$ benutzten Bezeichnungsweise

$$\lambda_i^{(\varkappa)} = \beta_\varkappa, \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n+1)$$

also nach Gleichung (4ª.), No. II

$$\sum_{i=1}^{\mu_\varkappa}\lambda_i^{(\varkappa)} = g_\lambda = \mu_\varkappa\beta_\varkappa,$$

und folglich nach Gleichung (7.) No. II

$$2g_\lambda - 2 = (n+1)g_\lambda - g_\lambda\sum_{\varkappa=1}^{n+1}\frac{1}{\beta_\varkappa} = g_\lambda\sum_{\varkappa=1}^{n+1}\left(1-\frac{1}{\beta_\varkappa}\right)$$

oder

$$-\frac{2}{g_\lambda} = \sum_{\varkappa=1}^{n+1}\left(1-\frac{1}{\beta_\varkappa}\right)-2,$$

also $g_\lambda = \nu$ sein; d. h. in diesem Falle muss, wie schon anderweitig genugsam bekannt, ν eine positive ganze Zahl sein.

Sur les fonctions génératrices d'*Abel.*

(Lettre adressée à M. *L. Kronecker.*)

(Par M. *Vilfredo Pareto* à Fiesole.)

Il me semble que la formule de sommation que vous avez donnée dans les Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, en 1885, peut se déduire de la théorie des fonctions génératrices d'*Abel.* Je trouve votre démonstration plus simple et plus élégante, et c'est seulement comme un lien, qui réunit ensemble d'innombrables formules que la théorie d'*Abel* me semble devoir être prise en considération. Je vais indiquer brièvement les résultats auxquels je suis parvenu.

I.

La théorie établie par *Abel* (Oeuvres complètes tome II pag. 67 à 81) manque absolument de précision. Néanmoins elle paraît être très féconde, surtout pour les développements en série des fonctions synectiques dans une aire. Il pourrait donc être utile de la compléter en lui donnant la précision qui est justement exigée dans les mathématiques modernes.

Comme on sait, *Abel* pose

$$\varphi(x) = \int e^{\nu x} f(\nu) d\nu,$$

et il appelle φ la *fonction génératrice de* f, et f la *déterminante* de φ. Nous écrirons*)

$$\varphi(x) = \mathrm{Fg}.f(\nu),$$
$$f(\nu) = \mathrm{Det}.\varphi(x).$$

Occupons-nous d'abord de l'existence des déterminantes, et considérons un polynôme d'un nombre fini de termes

$$\varphi(x) = A_\alpha x^\alpha + A_\beta x^\beta + \cdots + A_\mu x^\mu.$$

---

*) Pour la déterminante *Abel* emploie le signe *D*, qu'il nous semble plus convenable de conserver pour la dérivée.

Les exposants α, β, ... sont tous réels, et tous positifs, ou tous négatifs.

S'ils sont tous positifs, entiers ou fractionnaires, on prendra la formule de M. ***Heine***

$$\frac{1}{\Gamma(\theta)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{(A)} e^{y} y^{-\theta} dy,$$

l'intégrale étant prise suivant le chemin

En substituant νx à y, et supposant x réel et positif, le chemin d'intégration ne change pas, et l'on a

$$x^{\theta-1} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{(A)} e^{\nu x} \frac{\Gamma(\theta)}{\nu^{\theta}} d\nu,$$

d'où

$$(1.) \qquad \varphi(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{(A)} e^{\nu x} \chi\left(\frac{1}{\nu}\right) d\nu,$$

$$\chi\left(\frac{1}{\nu}\right) = A_{\alpha} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\nu^{\alpha+1}} + A_{\beta} \frac{\Gamma(\beta+1)}{\nu^{\beta+1}} + \cdots + A_{\mu} \frac{\Gamma(\mu+1)}{\nu^{\mu+1}}.$$

On aura donc, suivant la notation d'*Abel*,

$$\text{Det.}\varphi(x) = \chi\left(\frac{1}{\nu}\right).$$

Si tous les exposants sont entiers, on peut, suivant une formule très connue, réduire le chemin d'intégration à un cercle tracé autour de l'origine avec un rayon qui, pour le moment, demeure arbitraire. Et l'on sait que x peut alors avoir une valeur imaginaire.

Pour plus de simplicité, nous substituerons la notation de *Cauchy* $E_{(0)}$, ou simplement E à $\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int$, l'intégrale étant prise autour de l'origine. Dans tout ce qui suivra, nous désignerons toujours par $f(x)$ un polynôme d'un nombre fini de termes de degré entier, et l'on aura, quel que soit x,

$$(2.) \qquad f(x) = E e^{\nu x} \chi\left(\frac{1}{\nu}\right) d\nu = E e^{\nu x} d\nu \int_{0}^{x} f\left(\frac{u}{\nu}\right) \frac{du}{\nu} e^{-u}.$$

Si les exposants sont tous négatifs, entiers ou fractionnaires, on posera, x étant réel et positif,

$$\varphi(x) = A_{\alpha} x^{-\alpha} + A_{\beta} x^{-\beta} + \cdots + A_{\mu} x^{-\mu},$$

et l'on aura

$$(3.) \qquad \varphi(x) = \int_0^\infty e^{-\nu x}\psi(\nu)d\nu = \int_0^\infty e^{-\nu x}d\nu\, E e^{\nu u}\varphi(u)du,$$

$$\psi(\nu) = \frac{A_\alpha}{\Gamma(\alpha)}\nu^{\alpha-1} + \frac{A_\beta}{\Gamma(\beta)}\nu^{\beta-1} + \cdots + \frac{A_\mu}{\Gamma(\mu)}\nu^{\mu-1}.$$

Cette formule reproduit la règle qu'avait donnée ***Murphy*** (citée dans le traité de Calcul intégral de M. ***Bertrand,*** tome II pag. 509), pour trouver la déterminante. On voit dans quel cas cette règle est applicable.

Il faut observer que c'est principalement la formule (2.) qui se prête à établir les formules que ***Abel*** déduit de sa théorie, et d'autres formules analogues. La formule (3.), ou celle (1.), sont dans la plupart des cas impropres à cet usage.

Si nous supposons maintenant que le nombre des termes d'un des polynômes, dont nous avons obtenu la déterminante, aille en croissant indéfiniment, et que ce polynôme converge vers une limite finie $F(x)$, on obtiendra, dans le cas de la formule (3.), la déterminante sous la forme d'une série absolument convergente, si la série qui donne $F(x)$ est telle.

Dans le cas de la formule (1.), et de celle (2.), les exposants $\alpha, \beta, \ldots$ étant supposés croissants, la déterminante peut avoir une limite seulement, si la fonction est holomorphe sur tout le plan; autrement la série qui donnerait $\chi\left(\frac{1}{\nu}\right)$ est toujours divergente. Alors il est bon de remarquer que même dans ce cas les équations (1.) et (2.) peuvent encore servir à trouver des équations où entre $F(x)$, limite de $f(x)$. C'est, à proprement parler, la proposition fondamentale qu'il faut ajouter à la théorie d'***Abel*** pour la rendre exacte, comme nous allons le voir.

Laplace emploie pour les fonctions génératrices deux expressions qui, en somme, reviennent à poser

$$f(x) = \int \nu^x \varphi(\nu)dx, \quad f(x) = \int e^{-\nu x}\varphi(\nu)dx,$$

et les résultats qu'il obtient sont reproduits par la théorie d'***Abel:***

Si $f(x)$ est, comme nous l'avons supposé, un polynôme entier, de degré m, on a

$$\chi\left(\frac{1}{\nu}\right) = \frac{f(0)}{\nu} + \frac{f'(0)}{\nu^2} + \cdots + \frac{f^m(0)}{\nu^{m+1}}.$$

Le module de ν ayant une valeur finie, la condition nécessaire et suffisante pour que la déterminante de $F(x)$ existe, est qu'on puisse trouver

un nombre fini α tel que, pour $m = \infty$, la limite du module de

$$\alpha^m f^{(m)}(0)$$

soit finie. On le voit facilement en mettant le terme général sous la forme

$$\alpha^\theta f^\theta(0)\left(\frac{1}{\alpha\nu}\right)^\theta \frac{1}{\nu}.$$

Si α est différent de zéro, on pourra trouver un module fini de ν tel que

$$|\alpha\nu| > 1,$$

et alors les modules de la série qui donne la déterminante de $F(x)$ seront moindres que les modules d'une progression géométrique. La série sera donc convergente, et la déterminante existera.

La condition que nous avons posée, est nécessaire; car si α était infiniment petit, nul module fini de ν ne pourrait rendre la série convergente.

Les fonctions pour lesquelles α est fini, sont holomorphes sur tout le plan. Mais on sait que l'inverse n'a pas lieu, et qu'il y a des fonctions holomorphes sur tout le plan, par exemple e^{x^2}, pour lesquelles il n'existe pas de valeur finie de α. Ces fonctions n'ont pas de déterminantes finies.

Quand, pour une fonction, on a

$$\alpha^\theta f^\theta(0)$$

fini, quel que soit θ, on aura aussi

$$\alpha^\theta f^{(\theta)}(x)$$

fini pour x quelconque, mais fini. En effet, la fonction étant holomorphe sur tout le plan, on a

$$\alpha^\theta f^{(\theta)}(x) = \alpha^\theta f^\theta(0) + \frac{\alpha^{\theta+1} f^{\theta+1}(0)}{1}\frac{x}{\alpha} + \cdots,$$

et le second membre est évidemment fini.

Il y a lieu d'observer que même quand la déterminante existe sous forme finie, il peut convenir de ne pas l'adopter. Aussi e^x a pour déterminante

$$\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu^2} + \frac{1}{\nu^3} + \cdots,$$

c'est-à-dire, si

$$|\nu| > 1,$$

cette déterminante est

$$\frac{1}{\nu - 1},$$

mais la nature de la question que l'on traite portera souvent à prendre l'intégrale le long d'une circonférence d'un rayon moindre que 1, et alors e^x n'a pas de déterminante finie. Malgré cela la somme

$$E\frac{e^{\nu x}}{\nu}d\nu+E\frac{e^{\nu x}}{\nu^2}d\nu+\cdots+E\frac{e^{\nu x}}{\nu^n}d\nu,$$

a une limite pour $n=\infty$, et cette limite est égale à e^x.

Il est souvent utile de trouver la fonction génératrice d'un produit de déterminantes, ou la déterminante d'un produit de fonctions. Soit pour cela

$$\text{Det.}f_1(x)=\chi_1\left(\frac{1}{\nu}\right),\quad \text{Det.}f_2(x)=\chi_2\left(\frac{1}{\nu}\right),$$

$$F(x) = Ee^{\nu x}\chi_1\left(\frac{1}{\nu}\right)\chi_2\left(\frac{1}{\nu}\right)d\nu.$$

On a

$$\int_0^x f(x)dx = E\frac{e^{\nu x}}{\nu}\chi\left(\frac{1}{\nu}\right)d\nu,$$

donc

$$(4.)\quad\begin{cases} F(x) = f_1(0)\int_0^x f_2(z)dz+f_1'(0)\int_0^x\int_0^x f_2(z)dz^2+\cdots \\ \qquad = \int_0^x f_2(z)\left[f_1(0)+\frac{x-z}{1}f_1'(0)+\frac{(x-z)^2}{1.2}f_1''(0)+\cdots\right]dz \\ \qquad = \int_0^x f_2(z)f_1(x-z)dz. \end{cases}$$

Substituons à z

$$\frac{xz}{q},$$

nous aurons

$$F(x) = \int_0^q f_2\left(\frac{xz}{q}\right)f_1\left(\frac{x(q-z)}{q}\right)\frac{x}{q}dz.$$

On peut étendre cette formule à un nombre quelconque de fonctions. On a par exemple

$$\text{Fg.}[\text{Det.}f_3(x).\text{Det.}f_2(x).\text{Det.}f_1(x)]$$
$$= \int_0^q f_3\left(\frac{xz_2}{q}\right)dz_2\frac{x}{q}\int_0^q f_2\left(\frac{x(q-z_2)z_1}{q^2}\right)f_1\left(\frac{x(q-z_2)(q-z_1)}{q^2}\right)\frac{x(q-z_2)}{q^2}dz_1.$$

Dans le cas de la formule (3.) posons

$$\text{Det.}\varphi_1(y)=\psi_1(\nu),\quad \text{Det.}\varphi_2(y)=\psi_2(\nu),$$
$$y=\frac{1}{x},\quad \left(\frac{d^n\varphi(y)}{dy^n}\right)_{y=0}=\varphi^{(n)}(0),$$

φ_1 et φ_2 étant des polynômes entiers en y, qui ne contiennent pas de termes constants, ce qui est nécessaire pour appliquer la formule (3.). Et suivant cette formule soit

$$M(y) = \int_0^\infty e^{-\nu x}\psi_1(\nu)\psi_2(\nu)d\nu$$

$$= \varphi_1'(0)\int_0^\infty e^{-\nu x}\psi_2(\nu)d\nu + \cdots + \frac{\varphi_1^n(0)}{1.2\ldots(n-1)^2 n}\int_0^\infty e^{-\nu x}\nu^{n-1}\psi_2(\nu)d\nu + \cdots.$$

Mais

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\nu x}\nu^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\psi_2(\nu)d\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int \varphi_2\left(\frac{1}{z}\right)\frac{dz}{(x-z)^n},$$

la seconde intégrale étant prise autour de l'origine. Donc, enfin

$$(5.) \qquad M(y) = E\varphi_2\left(\frac{1}{z}\right)\varphi_1\left(\frac{1}{x-z}\right)dz.$$

Dans le système de la formule (2.) la déterminante de $\psi_1(x).\psi_2(x)$ est précisément

$$\frac{1}{\nu}M\left(\frac{1}{\nu}\right);$$

on en conclut que, toujours dans ce système

$$(6.) \qquad \text{Det.}(\psi_1(x).\psi_2(x)) = \frac{1}{\nu}E\varphi_2\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\varphi_1\left(\frac{1}{\nu-z}\right)dz.$$

Observons que les fonctions génératrices nous donnent, en certains cas, une solution du problème: étant donnée l'équation

$$F(x) = \int_0^x f_2(z)f_1(x-z)dz$$

et connaissant $F(x)$ et une des deux fonctions $f_2(x)$, $f_1(x)$, déterminer l'autre.

II.

Nous passons maintenant à l'examen des cas dans lesquels sont valables les déductions de la théorie des fonctions génératrices.

D'abord il faut observer qu'une classe des formules obtenues par l'application des formules (1.) ou (2.) est constituée par des relations linéaires entre $f(x)$, $f'(x)$, ..., $\Delta f(x)$, ..., $\Sigma f(x)$, ... lesquelles développées se réduisent à des identités d'un nombre fini de termes. Ces identités sont encore vraies à la limite, c'est-à-dire pour $F(x)$. En ce cas, la théorie d'*Abel* ne donne qu'un cas particulier du calcul des symboles, et

l'application des formules (1.) et (2.) sert seulement à déterminer les coefficients par la considération d'un cas particulier: celui des polynômes $f(x)$.

Soit par la considération directe des polynômes $f(x)$, soit en observant qu'on peut différentier sous le signe intégral, on tire de (1.) et de (2.)

$$\text{Det.}\boldsymbol{D}_x^\theta\varphi(x) = \nu^\theta\,\text{Det.}\varphi(x).$$

L'intégration donne

$$\int_a^x \varphi(x)dx = \boldsymbol{E}\frac{e^{\nu x}-e^{\nu a}}{\nu}\chi\left(\frac{1}{\nu}\right)d\nu, \quad \text{(formules (1.) et (2.))}$$

$$\int_a^x \varphi(x)dx = -\int_0^\infty \frac{e^{-\nu x}-e^{-\nu a}}{\nu}\psi(\nu)d\nu. \quad \text{(formule (3.))}$$

Abel supprime le terme $e^{\nu a}$, ou $e^{-\nu a}$, ce qui n'est permis que sous certaines conditions.

Pour ne pas trop nous étendre, nous considérerons dans ce qui suit seulement le cas de la formule (2.), sauf expresse mention du contraire.

Pour les polynômes $f(x)$, en observant que $\chi\left(\frac{1}{\nu}\right)$ contient seulement des termes ayant $\frac{1}{\nu}$ comme facteur, on pourra poser avec *Abel*

$$\text{Det.}\int_0^x \varphi(x)dx = \frac{1}{\nu}\,\text{Det.}\varphi(x)$$

et aussi

$$\text{Det.}\int_0^x\int_0^x \ldots \varphi(x)dx^\theta = \frac{1}{\nu^\theta}\,\text{Det.}\varphi(x).$$

On obtiendra aussi

$$\text{Det.}\boldsymbol{\Delta}^\theta\varphi(x) = (e^{h\nu}-1)^\theta\,\text{Det.}\varphi(x),$$

$$\text{Det.}\boldsymbol{\Sigma}^{(\theta)}\varphi(x) = \left(\frac{e^{nh\nu}-1}{e^h-1}\right)^\theta\,\text{Det.}\varphi(x),$$

$$\boldsymbol{\Sigma}\varphi(x) = \varphi(x)+\varphi(x+h)+\cdots+\varphi(x+(n-1)h).$$

Nommons, en généralisant une notation d'*Abel*, $\delta_1\varphi(x)$ une opération linéaire, à coefficients constants, sur

$$\varphi(x), \quad \varphi(x+a), \quad \varphi(x+b), \quad \ldots$$

leurs dérivées, leurs intégrales (avec les restrictions ci-dessus), leurs différences etc. Les formules précédentes permettent de calculer la déterminante de $\delta_1\varphi(x)$ quand on connaît celle de $\varphi(x)$, et l'on aura

$$\text{Det.}\delta_1\varphi(x) = \boldsymbol{\Phi}_1(\nu)\,\text{Det.}\varphi(x).$$

Pour simplifier nous nommerons $\Phi_1(\nu)$ la déterminante de l'opération δ_1, et nous écrirons

$$\text{Det.}\delta_1 = \Phi_1(\nu).$$

Soient $\delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_s$ des opérations du même genre de la précédente, δ_2 étant formée de δ_1, δ_3 de δ_2 etc. Nous obtenons

$$\text{Det.}\delta_s\delta_{s-1} \ldots \delta_1 = \Phi_s(\nu)\Phi_{s-1}(\nu) \ldots \Phi_1(\nu) = \Omega.$$

Cette formule, qui correspond à celle d'*Abel*, se trouve rigoureusement démontrée pour tout polynôme entier.

En développant le second membre de l'équation précédente, et repassant des déterminantes aux fonctions génératrices, quand cela est permis, comme nous le verrons tout à l'heure, on obtiendra une équation que nous indiquerons par

$$[\varphi(x)] = 0. \tag{7.}$$

Deux cas peuvent se présenter.

Le premier est celui où le développement de Ω se compose d'un nombre fini de termes, qui sont tous des déterminantes d'opérations du genre des opérations δ. Alors le passage des déterminantes aux fonctions génératrices ne souffre nulle difficulté, et l'équation (7.) se compose d'un nombre fini de termes, et est rigoureusement démontrée pour tout polynôme d'un nombre fini de termes. En outre on voit qu'en développant les opérations dont (7.) se compose, on doit avoir une identité. L'application de la formule (7.) aux polynômes a donc seulement pour but de déterminer les coefficients de cette équation qui subsiste pour toute fonction à laquelle on peut faire subir les opérations indiquées. Ce calcul est le même que celui des symboles, appliqué aux opérations distributives et commutatives δ. Inutile donc d'en parler, et nous nous bornerons à un très petit nombre d'exemples.

Abel applique sa formule en posant

$$\delta\varphi(x) = \varphi(x+a)+a\varphi(x),$$

il trouve ainsi

$$\text{Det.}\delta^n = (a+e^{\nu a})^n,$$

d'où

$$\delta^n\varphi(x) = a^n\varphi(x)+n_1a^{n-1}\varphi(x+a)+n_2a^{n-2}\varphi(x+2a)+\cdots+\varphi(x+na),$$

n_1, n_2... étant les coefficients du binôme. Des équations de ce genre sont

évidemment vraies pour tous les *objets* auxquels on donne les indices x, $x+a$, ..., $x+na$.

Mais *Abel* se propose ensuite de calculer l'opération

$$\delta\varphi(x) = \varphi(x+\alpha)+a\varphi(x)$$

par l'autre

$$\delta_1\varphi(x) = \varphi(x+\beta)+b\varphi(x).$$

Ce problème conduirait à un développement en série, dont il faut démontrer la légitimité, mais si l'on se borne au cas particulier, considéré aussi par *Abel,* où $\alpha=\beta$, on obtient une expression d'un nombre fini de termes. On a en effet

$$\text{Det.}\delta^m = (a+e^{\nu\alpha})^m, \quad \text{Det.}\delta_1^n = (b+e^{\nu\beta})^n,$$

puis

$$y = b+e^{\nu\beta}, \quad a+e^{\nu\alpha} = a+(y-b)^{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

Pour $\frac{\alpha}{\beta}$ entier on a donc un développement d'un nombre fini de termes, et une formule qui n'est qu'un cas du calcul des symboles.

Donnons un exemple emprunté à la formule (3.) Soit

$$X = \frac{1}{(x+a_1)^{k_1}(x+a_2)^{k_2}\ldots(x+a_n)^{k_n}},$$

on aura

$$X = \frac{1}{\Gamma(k_1)\ldots\Gamma(k_n)}\int_0^x d\nu_1\int_0^x d\nu_2\ldots\int_0^x d\nu_n e^{-(\nu_1+\cdots+\nu_n)x-a_1\nu_1-\cdots-a_n\nu_n}\nu_1^{k_1-1}\ldots\nu^{k_n-1},$$

$$\text{Det.}D_x^\theta X = \frac{(-1)^\theta}{\Gamma(k_1)\ldots\Gamma(k_n)}\sum_{i_1,i_2,\ldots}\nu_1^{i_1+k_1-1}\nu_2^{i_2+k_2-1}\ldots\frac{1.2\ldots\theta}{1.2\ldots i_1\,1.2\ldots i_2\ldots},$$

et repassant aux fonctions génératrices:

$$D^\theta X = \frac{(-1)^\theta\Gamma(\theta+1)}{\Gamma(k_1)\ldots\Gamma(k_n)}\Sigma A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_n}\left(\frac{1}{x+a_1}\right)^{i_1+k_1}\ldots\left(\frac{1}{x+a_n}\right)^{i_n+k_n},$$

$$A_{i_1} = (i_1+1)(i_1+2)\ldots(i_1+k_1-1) \qquad (i_1+i_2+\cdots=\theta)$$

. . . . . .

Dans le cas particulier de deux facteurs, on retrouve la formule donnée par M. ***Drussel***

$$D^\theta\frac{1}{(x+a_1)(x+a_2)} = (-1)^\theta\frac{\Gamma(\theta+1)}{(x+a_1)(x+a_2)}\frac{\left(\frac{1}{x+a_1}\right)^{\theta+1}-\left(\frac{1}{x+a_2}\right)^{\theta+1}}{\frac{1}{x+a_1}-\frac{1}{x+a_2}}.$$

III.

Le second cas dont nous avons à nous occuper est de beaucoup le plus important. C'est celui où la formule (7.) ne se réduit plus à une identité d'un nombre fini de termes, quand on développe les opérations δ. Elle provient d'une expression de la forme

$$\delta_s \delta_{s-1} \ldots \delta_1 \varphi(x) - E\Omega e^{\nu x} \chi\left(\frac{1}{\nu}\right) d\nu = 0, \tag{8.}$$

dans laquelle autant le nombre m de termes de Ω, comme celui n de termes de $\chi\left(\frac{1}{\nu}\right)$, peuvent croître indéfiniment.

Commençons par supposer que n seul croisse indéfiniment, pendant que m conserve constamment la même valeur finie.

Pour une valeur initiale finie n_0 de n, la formule (8.) se développera en un nombre fini de termes

$$\psi_1(x) + \psi_2(x) + \cdots + \psi_\mu(x) = 0.$$

Faisons croître n d'une unité, et soient

$$\alpha_{11}, \quad \alpha_{21}, \quad \alpha_{31}, \quad \ldots, \quad \alpha_{\mu 1}$$

les accroissement respectifs que reçoivent

$$\psi_1(x), \quad \psi_2(x), \quad \psi_3(x), \quad \ldots, \quad \psi_\mu(x).$$

On aura, en vertu de l'équation (8.),

$$\psi(x) + \alpha_{11} + \psi_2(x) + \alpha_{21} + \cdots + \psi_\mu(x) + \alpha_{\mu 1} + \psi_{\mu+1}(x) = 0$$

et ensuite

$$\alpha_{11} + \alpha_{21} + \cdots + \alpha_{\mu 1} + \psi_{\mu+1} = 0,$$

et d'une manière semblable, continuant à faire croître n,

$$\alpha_{12} + \alpha_{22} + \cdots + \alpha_{\mu+1,2} + \psi_{\mu+2} = 0,$$
$$\alpha_{13} + \alpha_{23} + \cdots + \alpha_{\mu+2,3} + \psi_{\mu+3} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On forme ainsi la série double

$$\begin{array}{llllll}
\psi_1(x) & \psi_2(x) & \ldots & \psi_\mu(x), & & \\
\alpha_{11} & \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{\mu 1} & \psi_{\mu+1}(x), & \\
\alpha_{12} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{\mu 2} & \alpha_{\mu+1,2} & \psi_{\mu+2}(x), \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Cette série sommée par lignes horizontales, donne zéro, en vertu des équations précédentes. Si elle est absolument convergente, elle donnera encore zéro par un autre mode de sommation, par exemple par séries verticales. Or on sait que cette condition est remplie, si: 1° les séries verticales de la série double sont absolument convergentes. 2° Si les sommes de ces séries, dans lesquelles on a substitué son module à chaque terme, forment aussi une série convergente.

Posons donc

$$\begin{aligned} \Psi_1(x) &= \psi_1(x)+\alpha_{11}+\alpha_{12}+\alpha_{13}+\cdots \\ \Psi_2(x) &= \psi_2(x)+\alpha_{21}+\alpha_{22}+\alpha_{23}+\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

et

$$(9.) \qquad \begin{cases} P_1(x) = |\psi_1(x)|+|\alpha_{11}|+|\alpha_{12}|+|\alpha_{13}|+\cdots \\ P_2(x) = |\psi_2(x)|+|\alpha_{21}|+|\alpha_{22}|+|\alpha_{23}|+\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Si les séries qui forment les seconds membres des équations (9.) sont convergentes, et si la série

$$P_1(x)+P_2(x)+\cdots$$

est convergente, on aura

$$\Psi_1(x)+\Psi_2(x)+\Psi_3(x)+\cdots = 0.$$

Observons que $\Psi_1(x)$, $\Psi_2(x)$, ... sont les limites, vers lesquelles convergent respectivement $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ..., quand n augmente indéfiniment, c'est-à-dire quand $f(x)$ converge vers $F(x)$.

Le raisonnement qui nous a conduit à résultat, est au reste général, et il s'appliquerait aussi bien aux formules (1.) et (3.) qu'à celle (2.). Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

Théorème I. *Si par l'application des formules* (1.), (2.) *ou* (3.) *à un polynôme d'un nombre n fini de termes, on a obtenu une relation d'un nombre fini de termes*

$$\psi_1(x)+\psi_2(x)+\cdots+\psi_\mu(x) = 0$$

et si: 1° *en faisant croître indéfiniment le nombre de termes de* $f(x)$, *chacune des expressions de la suite, qui peut se prolonger indéfiniment avec n,*

$$\psi_1(x), \quad \psi_2(x), \quad \ldots$$

converge, au moyen d'accroissement, formant une série absolument convergente, respectivement vers les limites

$$\Psi_1(x), \quad \Psi_2(x), \quad \ldots,$$

on aura encore

$$\Psi_1(x)+\Psi_2(x)+\cdots = 0$$

pourvu que: 2^0 ***la série dans laquelle se change celle-ci, quand on substitue leurs modules aux termes dont se composent les sommes*** $\Psi_1(x)$, $\Psi_2(x)$, ... ***soit encore convergente.***

Supposons maintenant que ce soit le nombre m de termes de Ω qui augmente indéfiniment, tandis que n demeure constant.

Pour pouvoir substituer à Ω un développement en série, il faut d'abord que celui-ci représente la fonction le long de tout le chemin d'intégration. C'est-là la raison principale pour laquelle les formules (1.) et (3.) sont d'un usage beaucoup moins général que la formule (2.). Tandis que le chemin d'intégration des premières s'étend depuis zéro jusqu'à l'infini, celui de la seconde peut être une circonférence de cercle d'un rayon très petit autour de l'origine.

Revenons donc à la formule (2.), et supposons que la déterminante Ω des opérations soit développée en une série uniformément convergente dans une aire, dans laquelle le chemin d'intégration de la formule (2.) est entièrement compris. Le plus souvent les termes de la série qui donne Ω seront des fonctions de ν, holomorphes dans un cercle de rayon plus grand que celui le long duquel on prend l'intégrale de (2.). Posons, en général:

$$\Omega = u_0+u_1+\cdots+u_\theta+R_\theta(\nu), \tag{10.}$$

les fonctions u_0, u_1, ... étant finies et intégrables dans l'aire qui contient le chemin d'intégration de (2.). Puisque la série est uniformément convergente dans cette aire, à tout nombre positif ε, aussi petit qu'on veut, correspondra un indice λ tel que pour toutes les valeurs de l'indice θ, supérieur à λ, et pour toutes les valeurs de ν appartenant à l'aire considérée on aura, pour le reste de la série,

$$|R_\theta(\nu)| < \varepsilon.$$

D'un autre côté, $\chi\left(\frac{1}{\nu}\right)$ ne contenant que les puissances de $\frac{1}{\nu}$, et un nombre de termes fini, le chemin d'intégration ne passant pas par le point

Cette série sommée par lignes horizontales, donne zéro, en vertu des équations précédentes. Si elle est absolument convergente, elle donnera encore zéro par un autre mode de sommation, par exemple par séries verticales. Or on sait que cette condition est remplie, si: 1^0 les séries verticales de la série double sont absolument convergentes. 2^0 Si les sommes de ces séries, dans lesquelles on a substitué son module à chaque terme, forment aussi une série convergente.

Posons donc

$$\begin{aligned} \Psi_1(x) &= \psi_1(x)+\alpha_{11}+\alpha_{12}+\alpha_{13}+\cdots \\ \Psi_2(x) &= \psi_2(x)+\alpha_{21}+\alpha_{22}+\alpha_{23}+\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

et

$$(9.) \qquad \begin{cases} P_1(x) = |\psi_1(x)|+|\alpha_{11}|+|\alpha_{12}|+|\alpha_{13}|+\cdots \\ P_2(x) = |\psi_2(x)|+|\alpha_{21}|+|\alpha_{22}|+|\alpha_{23}|+\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Si les séries qui forment les seconds membres des équations (9.) sont convergentes, et si la série

$$P_1(x)+P_2(x)+\cdots$$

est convergente, on aura

$$\Psi_1(x)+\Psi_2(x)+\Psi_3(x)+\cdots = 0.$$

Observons que $\Psi_1(x)$, $\Psi_2(x)$, ... sont les limites, vers lesquelles convergent respectivement $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ..., quand n augmente indéfiniment, c'est-à-dire quand $f(x)$ converge vers $F(x)$.

Le raisonnement qui nous a conduit à résultat, est au reste général, et il s'appliquerait aussi bien aux formules (1.) et (3.) qu'à celle (2.). Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

Théorème I. *Si par l'application des formules* (1.), (2.) *ou* (3.) *à un polynôme d'un nombre n fini de termes, on a obtenu une relation d'un nombre fini de termes*

$$\psi_1(x)+\psi_2(x)+\cdots+\psi_\mu(x) = 0$$

et si: 1^0 *en faisant croître indéfiniment le nombre de termes de* $f(x)$, *chacune des expressions de la suite, qui peut se prolonger indéfiniment avec n,*

$$\psi_1(x), \quad \psi_2(x), \quad \ldots$$

converge, au moyen d'accroissement, formant une série absolument convergente, respectivement vers les limites

$$\Psi_1(x), \quad \Psi_2(x), \quad \ldots,$$

on aura encore

$$\Psi_1(x)+\Psi_2(x)+\cdots = 0$$

pourvu que: 2^0 ***la série dans laquelle se change celle-ci, quand on substitue leurs modules aux termes dont se composent les sommes*** $\Psi_1(x)$, $\Psi_2(x)$, ... ***soit encore convergente.***

Supposons maintenant que ce soit le nombre m de termes de Ω qui augmente indéfiniment, tandis que n demeure constant.

Pour pouvoir substituer à Ω un développement en série, il faut d'abord que celui-ci représente la fonction le long de tout le chemin d'intégration. C'est-là la raison principale pour laquelle les formules (1.) et (3.) sont d'un usage beaucoup moins général que la formule (2.). Tandis que le chemin d'intégration des premières s'étend depuis zéro jusqu'à l'infini, celui de la seconde peut être une circonférence de cercle d'un rayon très petit autour de l'origine.

Revenons donc à la formule (2.), et supposons que la déterminante Ω des opérations soit développée en une série uniformément convergente dans une aire, dans laquelle le chemin d'intégration de la formule (2.) est entièrement compris. Le plus souvent les termes de la série qui donne Ω seront des fonctions de ν, holomorphes dans un cercle de rayon plus grand que celui le long duquel on prend l'intégrale de (2.). Posons, en général:

$$(10.) \qquad \Omega = u_0+u_1+\cdots+u_\theta+R_\theta(\nu),$$

les fonctions u_0, u_1, ... étant finies et intégrables dans l'aire qui contient le chemin d'intégration de (2.). Puisque la série est uniformément convergente dans cette aire, à tout nombre positif ε, aussi petit qu'on veut, correspondra un indice λ tel que pour toutes les valeurs de l'indice θ, supérieur à λ, et pour toutes les valeurs de ν appartenant à l'aire considérée on aura, pour le reste de la série,

$$|R_\theta(\nu)| < \varepsilon.$$

D'un autre côté, $\chi\left(\frac{1}{\nu}\right)$ ne contenant que les puissances de $\frac{1}{\nu}$, et un nombre de termes fini, le chemin d'intégration ne passant pas par le point

zéro, on pourra toujours trouver un nombre positif fini N tel que

$$\left|\chi\left(\frac{1}{\nu}\right)\right| < N$$

le long de tout le chemin d'intégration.

Multiplions par

$$\chi\left(\frac{1}{\nu}\right)e^{\nu x}d\nu$$

les deux membres de l'équation (10.), et intégrons le long d'une circonférence de rayon ϱ. Nous aurons en vertu de l'équation (8.)

$$\delta_s\delta_{s-1}\ldots\delta_1\varphi(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int(u_0+u_1+\cdots+u_\theta)\chi\left(\frac{1}{\nu}\right)e^{\nu x}d\nu + \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int R_\theta(\nu)\chi\left(\frac{1}{\nu}\right)e^{\nu x}d\nu.$$

Posant

$$\nu = \varrho e^{\omega\sqrt{-1}}$$

le reste de la série ci-dessus prend la forme

$$T_\theta = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int R_\theta(\varrho e^{\omega\sqrt{-1}})\chi\left(\frac{1}{\varrho}e^{-\omega\sqrt{-1}}\right)e^{\varrho x e^{\omega\sqrt{-1}}}\varrho e^{\omega\sqrt{-1}}d\omega\sqrt{-1}.$$

Or on a

$$\text{mod.}\left[R_\theta(\varrho e^{\omega\sqrt{-1}})\chi\left(\frac{1}{\varrho}e^{-\omega\sqrt{-1}}\right)e^{\varrho x\cos\omega}e^{(\varrho x\sin\cos\omega+\omega)\sqrt{-1}}\varrho\right] < \varepsilon N e^{\varrho x'}\varrho,$$

x' étant le module de x, donc

$$|T_\theta| < \varepsilon N e^{\varrho x'}\varrho^2,$$

et puisque ε peut être aussi petit qu'on veut, la série qui forme le second membre de (9.) est convergente, et sa somme est égale au premier membre. Il suit de là que, si l'on a

$$Eu_0\chi\left(\frac{1}{\nu}\right)e^{\nu x}d\nu = \Phi_0(x),$$

$$Eu_1\chi\left(\frac{1}{\nu}\right)e^{\nu x}d\nu = \Phi_1(x),$$

. . . . . .

on aura encore

$$\delta_s\delta_{s-1}\ldots\delta_1\varphi(x) = \Phi_0(x)+\Phi_1(x)+\cdots.$$

Si quelquesunes des fonctions u_0, u_1, ..., ou même toutes ces fonctions, devenaient des séries, il faudrait qu'elles fussent uniformément con-

vergentes dans l'aire considérée, et composées de termes finis et intégrables, pour pouvoir en déduire les fonctions génératrices $\Phi_0(x)$, $\Phi_1(x)$, ... Sous cette restriction nous énoncerons le théorème suivant.

Théorème* II.** ***Si l'on développe la déterminante Ω de l'opération $\delta_s \delta_{s-1} \dots \delta_1$ en une série

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

formée de fonctions finies, intégrables, et qui soit uniformément convergente dans une aire qui contient entièrement le contour d'intégration de la formule* (2.), *et si les déterminantes

$$u_0 \chi\left(\frac{1}{\nu}\right), \quad u_1 \chi\left(\frac{1}{\nu}\right), \quad \dots$$

ont pour fonctions génératrices

$$\Phi_0(x), \quad \Phi_1(x), \quad \dots$$

on aura pour tout polynôme $f(x)$ d'un nombre fini de termes

$$\delta_s \delta_{s-1} \dots \delta_1 \varphi(x) = \Phi_0(x) + \Phi_1(x) + \cdots.$$

Supposons enfin que, non seulement m, mais aussi n croisse indéfiniment. Il faut d'abord que les conditions dans lesquelles le théorème précédent a été établi soient vérifiées. Alors, en faisant croître n, on obtiendra encore une série double, comme celle que nous avons eue pour établir le théorème I, sauf que les séries horizontales pourront avoir un nombre infini de termes. Ces séries horizontales auront toutes pour sommes zéro, en vertu du théorème précédent. La série double, sommée par lignes horizontales, donne donc zéro, mais si cette série double est absolument convergente, on peut la sommer par lignes verticales sans que sa somme change. On est ainsi conduit à la proposition suivante:

Théorème* III.** ***Si, par l'application de la formule* (2.), *on est conduit pour un polynôme $f(x)$, entier en x et d'un nombre fini de termes, à une équation de la forme

$$0 = \psi_1(x) + \psi_2(x) + \cdots,$$

dans laquelle le second membre peut être une série; et si:* 1° *en faisant croître indéfiniment le nombre n de termes de $f(x)$, chacune des expressions

$$\psi_1(x), \quad \psi_2(x), \quad \dots$$

converge au moyen d'accroissements formant une série absolument convergente, respectivement vers les limites

$$\Psi_1(x), \quad \Psi_2(x), \quad \dots,$$

on aura encore

$$0 = \Psi_1(x)+\Psi_2(x)+\cdots,$$

pourvu que: 2^0 ***la série dans laquelle se change celle-ci, quand on substitue leurs modules aux termes dont se composent les sommes*** $\Psi_1(x)$, $\Psi_2(x)$, ..., ***soit encore convergente.***

Ces théorèmes donnent une grande généralité à la théorie des fonctions génératrices que nous n'avions établie que pour des polynômes d'un nombre fini de termes.

IV.

Abel pose

$$\delta\varphi(x) = \varphi(x+\alpha)-a\varphi(x),$$

$$\delta_1\varphi(x) = c\varphi(x)+k\frac{d\varphi(x)}{dx},$$

et il se propose de déterminer δ_1^m par δ. On a

$$\text{Det.}\delta = e^{\nu\alpha}-a, \quad \text{Det.}\delta_1^m = (c+k\nu)^m.$$

Posons

$$e^{\nu\alpha}-a = z,$$

nous aurons

$$(11.) \qquad (c+k\nu)^m = \left(c+\frac{k}{\alpha}\log(a+z)\right)^m.$$

Abel développe le second membre en série ordonnée suivant les puissances de z. Pour que cela soit permis, il faut, m étant entier, et a un nombre positif, que

$$|z| < a.$$

Or on peut prendre $\nu\alpha$ assez petit pour que $e^{\nu\alpha}$ soit aussi proche de l'unité que l'on veut, et z de $1-a$. Donc pour de très petites valeurs de $\alpha\nu$, il suffira que

$$(1-a)^2 < a^2, \quad a > \tfrac{1}{2}.$$

Cette condition étant remplie, la série est uniformément convergente pour une valeur assez petite de $\alpha\nu$, et le second membre de (11.) peut se représenter par

$$A_0+A_1z+A_2z^2+\cdots.$$

En appliquant à cette série le théorème II, on aura

$$\delta_1^m f(x) = A_0f(x)+A_1\delta f(x)+A_2\delta^2 f(x)+\cdots.$$

Un cas particulier de cette formule donne les dérivées en fonctions des différences. On pose pour cela

$$a=1, \quad c=0, \quad k=1,$$

et il vient

$$v^m = \frac{1}{\alpha^m}(\log(1+z))^m = \frac{1}{\alpha^m}\left[z^m - \frac{P^1_m z^{m+1}}{m+1} + \frac{P^2_{m+1} z^{m+2}}{(m+1)(m+2)} + \cdots + R\right],$$

$$\alpha^m \frac{d^m f(x)}{dx^m} = \Delta^m f(x) - \frac{P^1_m}{m+1}\Delta^{m+1} f(x) + \frac{P^2_{m+1}}{(m+1)(m+2)}\Delta^{m+2} f(x) + \cdots$$

$$\cdots + ERe^{vx}\chi\left(\frac{1}{v}\right)dv,$$

où, comme on sait, P^k_{m+k-1} représente la somme des produits des $m+k-1$ premiers nombres pris k à k.

Cette série pourra s'étendre à des fonctions $F(x)$, soit par la considération du reste, soit par l'application du théorème I.

Mais pour avoir un exemple de l'application de ce théorème, nous examinerons la solution d'un autre problème d'*Abel*.

Ce problème, qui est célèbre, consiste à développer $\varphi(x+a)$ en une série de la forme

$$\sum_\theta A_\theta \varphi^{(\theta)}(x+\theta b).$$

Halphen s'en est aussi occupé*), en suivant une toute autre voie que celle d'*Abel*, et il a donné les conditions sous lesquelles la série converge et représente la fonction. Nous allons les tirer de notre théorie.

On a

$$\text{Det.} f(x+a) = e^{va}\,\text{Det.} f(x).$$

Prenons la formule bien connue

$$e^{va} = 1 + ave^{bv} + \frac{a(a-2b)}{1.2}v^2 e^{2bv} + \frac{a(a-3b)^2}{1.2.3}v^3 e^{3bv} + \cdots.$$

Cette série satisfait aux conditions requises par le théorème II, et l'on a ainsi

$$(12.) \quad f(x+a) = f(x) + af'(x+b) + \frac{a(a-2b)}{1.2}f''(x+2b) + \cdots + \frac{a(a-\lambda b)^{\lambda-1}}{1.2\ldots\lambda}f^{(\lambda)}_{(x+\lambda b)}.$$

λ est supposé être le plus grand exposant de x dans $f(x)$, et il est facile de voir que tous les termes de la série qui donne e^{va}, contenant v à une puissance supérieure à λ, donnent par l'intégration dans la formule (2.) un

*) Bulletin de la Société Mathématique de France, tome X, 1882, pag. 67—87.

résultat nul. Le nombre de termes de (12.) est donc fini, et nous retombons dans le cas du théorème I.

Supposons que le nombre de termes de $f(x)$ aille en augmentant indéfiniment, et que $f(x)$ converge vers $F(x)$.

Les séries verticales que l'on a considérées pour établir le théorème I sont formées par les développements suivant les puissances de x de

$$f^{(\theta)}(x+\theta b).$$

Pour que ces développements soient absolument convergents, quel que soit θ, et pour qu'ils convergent respectivement vers

$$F^{(\theta)}(x+\theta b),$$

il faut et il suffit que $F(x)$ soit holomorphe sur tout le plan.

C'est-là la première condition pour l'application du théorème I; passons à la seconde.

Supposons que la fonction $F(x)$ soit telle que α et M étant des nombres finis positifs, on puisse poser, quel que soit n,

$$|\alpha^n F^{(n)}_{(0)}| < M,$$

on aura alors

$$\alpha^\theta F^{(\theta)}_{(x+\theta b)} = \alpha^\theta F^{(\theta)}_{(0)} + \frac{x+\theta b}{1.\alpha}\,\alpha^{\theta+1} F^{(\theta+1)}_{(0)} + \cdots.$$

Si nous substituons à chaque terme son module, en appelant x' le module de x, et b' celui de b, on aura

$$|\alpha^\theta F^{(\theta)}_{(0)}| + \left|\frac{x+\theta b}{1.\alpha}\,\alpha^{\theta+1} F^{(\theta+1)}_{(0)}\right| + \cdots < M e^{\frac{x'+\theta b'}{\alpha}}.$$

Le développement du terme général de la série (12.), dans lequel on a substitué à chaque terme son module, nous donnera la fonction que nous avons appelée P_θ, et nous aurons

$$P_\theta < \left|\frac{a(a-\theta b)^{\theta-1}}{1.2\ldots\theta}\right| \frac{M}{\alpha^\theta}\, e^{\frac{x'+\theta b'}{\alpha}}.$$

Substituons à la factorielle son expression approchée; soit k un nombre positif qui a pour limite 1 pour $\theta = \infty$, on aura

$$P_\theta < \frac{a' k M e^{\frac{x'}{\alpha}}}{b' e^{\frac{a'}{b'}} \sqrt{2\pi}} \frac{1}{\theta^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{b'e}{\alpha}\right)^\theta e^{\frac{\theta b'}{\alpha}},$$

a' étant le module de a, et b' celui de b.

Il suit de cette formule que la série des P_θ sera uniformément convergente, si

$$\left(\frac{b'e}{a}\right)^\theta e^{\frac{\theta b'}{a}} < c,$$

c étant une constante réelle, positive, et finie. Mais si θ peut croître au-delà de toute limite, $\sqrt[\theta]{c}$ aura pour limite 1, et l'on pourra poser

$$\frac{b'}{a} e^{1+\frac{b'}{a}} = 1.$$

C'est la même condition trouvée par ***Halphen*** pour que la série d'***Abel*** converge et qu'elle représente la fonction. Cette condition est suffisante, mais non nécessaire. Si elle est remplie on pourra appliquer le théorème I à la formule (12.) et écrire

$$F(x+a) = F(x)+aF'(x+b)+\frac{a(a-2b)}{1.2}F''(x+2b)+\frac{a(a-3b)^2}{1.2.3}F'''(x+3b)+\cdots.$$

Halphen a aussi observé que la série du second membre peut converger sans représenter la fonction, et cet illustre géomètre cite plusieurs exemples. Notre analyse fait voir que ce fait pourra se produire quand la série formée par la substitution de $F(x)$ à $f(x)$ dans l'expression (12.), indéfiniment prolongée, sera convergente, en même temps que les séries verticales seront divergentes, c'est-à-dire que pour une valeur de θ suffisamment grande

$$F^{(\theta)}(x+\theta b)$$

ne sera pas développable suivant les puissances de $(x+\theta b)$.

Discuter tous les développements qui s'obtiennent au moyen des fonctions génératrices, ce serait faire la théorie de presque tous les développements connus des fonctions holomorphes dans une aire. Nous sommes donc obligé de nous borner à quelques indications très sommaires pour donner une idée de la variété des résultats qu'on obtient.

A chaque nouvelle forme donnée au développement de l'exponentielle correspond une nouvelle série pour le développement des fonctions.

Une formule déjà obtenue par le développement en fraction continue de l'exponentielle, et que M. ***Hermite*** donne avec de nouveaux éclaircissements dans son beau mémoire sur la fonction exponentielle (Paris 1874,

pag. 5), donne

$$e^{a\nu}\,\Pi(a\nu)-\Pi(-a\nu) = R_m,$$

$$\Pi(a\nu) = 2m(2m-1)\dots(m+1)-(2m-1)\dots(m+1)\frac{m}{1}a\nu$$

$$+(2m-2)\dots(m+1)\frac{m(m-1)}{1.2}a^2\nu^2-\dots+(-1)^m a^m\nu^m,$$

$$R_m = (-1)^m\frac{(a\nu)^{2m+1}}{1.2\dots m}\int_0^1 e^{a\nu(1-t)}t^m(1-t)^m dt.$$

Nous en tirons

$$e^{a\nu}-1 = A_1 a\nu-A_2a^2\nu^2+\dots+(-1)^{m-1}A_m a^m\nu^m+\frac{R_m}{2m\dots(m+1)},$$

$$A_i = \frac{m(m-1)\dots(m-i+1)}{2m(2m-1)\dots(2m-i+1)}\frac{1}{1.2\dots i},$$

et ensuite

$$f(x+a)-f(x) = \frac{a}{2}(f'(x+a)+f'(x))-A_2a^2(f''(x+a)-f''(a))+\dots$$

$$\dots+(-1)^{m-1}A_m a^m(f^m(x+a)+(-1)^{m-1}f^m(x))+R_m,$$

$$R_m = E\,e^{x\nu}\chi\left(\frac{1}{\nu}\right)\frac{R_m}{2m\dots(m+1)}d\nu.$$

Dans l'expression de R_m nous pouvons changer l'ordre des intégrations; et nous avons

$$R_m = \frac{(-1)^m a^{2m+1}}{1.2\dots 2m}\int_0^1 t^m(1-t)^m f^{2m+1}(x+a(1-t))dt.$$

Ce développement a été obtenu par une autre voie par M. ***Darboux****). Et il donne la même forme pour le reste.

Posons

$$e^{a\nu} = (e^{\nu r}-1+1)^{\frac{a}{r}} = 1+\frac{a}{r}(e^{\nu r}-1)+\frac{a(a-r)}{1.2r^2}(e^{\nu r}-1)^2+\dots.$$

Cette série est uniformément convergente, quand

$$|e^{\nu r}-1|<1,$$

on en tire

$$f(x+a) = f(x)+\frac{a}{1}\frac{\Delta f(x)}{r}+\frac{a(a-r)}{1.2}\frac{\Delta^2 f(x)}{r^2}+\dots.$$

Cette formule a été donnée par M. ***Schlömilch****). Elle s'étendra

*) Sur les développements en série des fonctions d'une variable. Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1876, pag. 291—312.

**) Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1879, pag. 48 und 53.

aux fonctions holomorphes par le moyen du théorème III, qui donnera les conditions pour la convergence.

L'identité

$$e^{x\nu}-e^{x_0\nu} = e^{x_0\nu}(e^{x\nu}-1)-e^{x\nu}(e^{x_0\nu}-1)$$

conduit à la formule de M. ***Marchand****)

$$f(a+x)-f(a+x_0) = \frac{x}{1}f'(a+x_0)-\frac{x_0}{1}f'(a+x)+\frac{x^2}{1.2}f''(a+x_0) - \frac{x_0^2}{1.2}f''(a+x)+\cdots.$$

Posons

$$X = A_1e^{\alpha_1\nu}+A_2e^{\alpha_2\nu}+\cdots+A_ne^{\alpha_n\nu},$$

et déterminons A_1, A_2, ... de manière que le développement de X coïncide avec celui de $e^{x\nu}$ jusqu'au terme inclusivement

$$\frac{(x\nu)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}.$$

Soit pour cela

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \ldots \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \alpha_4^2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}, \quad P_i = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & x & \alpha_{i+1} & \ldots \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \ldots & x^2 & \alpha_{i+1}^2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

on aura

$$A_i = \frac{P_i}{\Delta}.$$

Or si $\chi\left(\frac{1}{\nu}\right)$ est la déterminante d'un polynôme de degré $n-1$, le plus haut exposant de $\frac{1}{\nu}$ dans $\chi\left(\frac{1}{\nu}\right)$ sera n et tous les termes du développement de $e^{\nu x}$ contenant un exposant de ν égal ou supérieur à n, donnerons zéro en intégrant. Donc

$$Ee^{\nu x}\chi\left(\frac{1}{\nu}\right)d\nu = E(A_1e^{\alpha_1\nu}+\cdots+A_ne^{\alpha_n\nu})\chi\left(\frac{1}{\nu}\right)d\nu,$$

et substituant les valeurs trouvées pour A_i, on aura la formule d'interpolation de ***Lagrange***.

Toute la théorie de l'interpolation devient remarquablement facile et élégante par l'usage des fonctions génératrices.

---

*) Nouvelles Annales de Mathématiques, 1882, pag. 450—458.

On a

$$e^{hv}-1 = (e^{\frac{hv}{n}}-1)[1+e^{\frac{hv}{n}}+\cdots+e^{\frac{(n-1)hv}{n}}],$$

d'où, posant

$$\lambda_i = 1^i+2^i+\cdots+(n-1)^i,$$

$$\delta f(x) = f\left(x+\frac{h}{n}\right)-f(x),$$

on a

$$f(x+h)-f(x) = n\delta f(x)+\frac{h\lambda_1}{1.n}\delta f'(x)+\frac{h^2\lambda_2}{1.2.n^2}\delta f''(x)+\cdots$$

$$\cdots+\frac{h^\theta\lambda_\theta}{1.2\ldots\theta n^\theta}\delta f^{(\theta)}(x)+Ee^{xv}\chi\left(\frac{1}{v}\right)(e^{\frac{hv}{n}}-1)\int_0^v Z dz,$$

$$Z = \sum_{k=1}^{k=n-1}\frac{e^{\frac{khz}{n}}\left(\frac{kh}{n}\right)^{\theta+1}}{1.2\ldots\theta}(v-z)^\theta dz,$$

et ensuite

$$Ee^{xv}\chi\left(\frac{1}{v}\right)(e^{\frac{hv}{n}}-1)\int_0^v Z dz = \int_0^1\sum_{k=1}^{k=n-1}\frac{\left(\frac{kh}{n}\right)^{\theta+1}\delta f^{(\theta+1)}\left(x+\frac{khz}{n}\right)(1-z)^\theta dz}{1.2\ldots\theta}$$

pour l'expression du reste.

V.

Venons aux formules de sommation, parmis lesquelles sont comprises celles de M. ***Kronecker.***

Nous avons

$$f(0)+f(1)+\cdots+f(r-1) = E\frac{e^{vr}-1}{e^v-1}\chi\left(\frac{1}{v}\right)dv,$$

ou bien en général

$$(13.)\quad f(x)+f(x+1)+\cdots+f(x+r-1) = E\frac{e^{vr}-1}{e^v-1}e^{vx}\chi\left(\frac{1}{v}\right)dv.$$

En employant le développement

$$\frac{v}{e^v-1} = 1-\tfrac{1}{2}v+\frac{B_1}{1.2}v^2-\frac{B_2}{1.2.3.4}v^4+\cdots,$$

on retrouve la formule d'***Euler.***

Le développement

$$\left(\frac{v}{e^v-1}\right)^\theta = 1+\frac{\varphi_1(\theta)}{1}v+\frac{\varphi_2(\theta)}{1.2}v^2+\cdots$$

donne

$$\Sigma^{(\theta)}f(x) = \int_0^x \delta f(x).dx^\theta + \frac{\varphi_1(\theta)}{1}\int_0^x \delta f(x)dx^{\theta-1}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{\varphi_\theta(\theta)}{1.2\ldots\theta}\delta f(x)+\frac{\varphi_{\theta+1}(\theta)}{1.2\ldots(\theta+1)}\delta f'(x)+\cdots,$$

$$\delta f(x)=f(x+\theta r)-\theta f(x+(\theta-1)r)+\frac{\theta(\theta-1)}{1.2}f(x+(\theta-2)r)-\cdots=\Delta^\theta_{(r)}f(x).$$

Mais on peut employer d'autres développements. On a

$$(14.)\qquad \frac{1}{e^\nu-1} = \frac{1}{\nu}-\frac{1}{2}+\frac{2\nu}{\nu^2+(2\pi)^2}+\frac{2\nu}{\nu^2+(4\pi)^2}+\cdots$$

et en outre

$$\frac{2\nu}{\nu^2+(2k\pi)^2} = \frac{2\nu}{(2k\pi)^2}\left[1-\left(\frac{\nu}{2k\pi}\right)^2+\cdots+(-1)^{m-1}\left(\frac{\nu}{2k\pi}\right)^{2m-2}\right]$$

$$+(-1)^m\left(\frac{\nu}{2k\pi}\right)^{2m}\frac{2\nu}{\nu^2+(2k\pi)^2}.$$

En prenant l'intégrale le long d'une circonférence de rayon $>2k\pi$, on obtient

$$(15.)\qquad E\frac{e^{\nu x}(e^{\nu r}-1)}{\nu^2+(2k\pi)^2}2\nu\left(\frac{\nu}{2k\pi}\right)^{2m}\chi\left(\frac{1}{\nu}\right)d\nu = 2\int_x^{x+r} f^{2m}(z)\frac{\cos 2k\pi(z-x)}{(2k\pi)^{2m}}dz.$$

Substituant ces développements dans la formule (13.), nommant s un entier positif quelconque, on obtient la formule de M. ***Kronecker***

$$(16.)\qquad \begin{cases} \frac{1}{2}f(x)+f(x+1)+\cdots+f(x+r-1)+\frac{1}{2}f(x+r) \\ = \int_x^{x+r} f(z)\frac{\sin(2s-1)\pi(z-x)}{\sin\pi(z-x)}dz \\ +\sum_{h=1}^{h=m}\left[f^{(2h-1)}(x)-f^{(2h-1)}(x+r)\right]\sum_{k=s}^{k=\infty}\frac{2(-1)^h}{(2k\pi)^{2h}} \\ +(-1)^m\int_x^{x+r} f^{(2m)}(z)\sum_{k=s}^{k=\infty}\frac{2\cos 2k\pi(z-x)}{(2k\pi)^{2m}}dz. \end{cases}$$

Cette formule n'est ainsi démontrée que pour un polynôme entier, mais la formule (14.) étant valable pour tout le plan, on peut introduire ce développement dans la formule (3.) et étendre ainsi la démonstration aux fonctions uniformes ayant des points de discontinuité polaires. Il est facile de voir comment on peut encore étendre la démonstration, mais cette voie est bien plus laborieuse que celle suivie par M. ***Kronecker,*** et comme nous le disions en commençant, les fonctions génératrices en ce cas n'ont

d'importance que pour relier ensemble des formules obtenues par les moyens les plus différents.

La formule (15.) subsiste seulement tant que $f^{2m}(z)$ n'est pas zéro; si $f^{(\theta)}(x)$ est la première dérivée qui s'annule, c'est-à-dire, si $f(x)$ est de degré $\theta-1$, on ne doit pas prendre $2m$ plus grand que $\theta-1$. Cette restriction est inutile à introduire dans la formule de sommation, parce que les termes qu'on devrait effacer s'annulent d'eux-mêmes.

On peut calculer d'autres sommes avec la forme donnée par M. *Kronecker* à sa série. Par exemple, on a

$$\begin{aligned}
&f(x)-f(x+1)+f(x+2)-\cdots-f(x+2r-1)\\
&= E\frac{1-e^{2r\nu}}{1+e^{\nu}}e^{\nu x}\chi\left(\frac{1}{\nu}\right)d\nu\\
&= E(1-e^{2r\nu})e^{\nu x}\chi\left(\frac{1}{\nu}\right)d\nu\left[\tfrac{1}{2}-\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{2\nu}{\nu^2+(2k+1)^2\pi^2}\right]\\
&= \tfrac{1}{2}(f(x)-f(x+2r))+\int_x^{x+2r}f(z)\frac{\sin 2s\pi(x-z)}{\sin\pi(x-z)}\,dz\\
&\quad+\sum_{h=1}^{h=m}[f^{(2h-1)}(x)-f^{(2h-1)}(x+2r)]\sum_{k=s}^{k=\infty}\frac{2(-1)^h}{((2k+1)\pi)^{2h}}\\
&\quad+(-1)^m\int_x^{x+2r}f^{(2m)}(z)\sum_{k=s}^{k=\infty}\frac{2\cos(2k+1)\pi(z-x)}{((2k+1)\pi)^{2m}}\,dz.
\end{aligned}$$

En général, si l'on sait sommer

$$A_1e^{\alpha_1\nu}+A_2e^{\alpha_2\nu}+\cdots,$$

on saura sommer

$$A_1f(x+\alpha_1)+A_2f(x+\alpha_2)+\cdots.$$

Par exemple, la série d'*Euler*

$$\frac{1}{(1+ay)(1+a^2y)\ldots(1+a^ny)}=1-\frac{1-a^n}{1-a}ay+\frac{(1-a^n)(1-a^{n+1})}{(1-a)(1-a^2)}a^2y^2-\cdots$$

donne le moyen de sommer

$$S=f(x)-\frac{1-a^n}{1-a}af(x+1)+\frac{(1-a^n)(1-a^{n+1})}{(1-a)(1-a^2)}a^2f(x+2)+\cdots.$$

Pour cela on posera

$$\frac{1}{(1+ay)\ldots(1+a^ny)}=\frac{A_1}{1+ay}+\frac{A_2}{1+a^2y}+\cdots+\frac{A_n}{1+a^ny},$$

$$y=e^{\nu}.$$

On développera en série de fractions simples

$$\frac{1}{1+a^k e^{\nu}},$$

et le calcul s'achèvera comme précédemment.

Une petite difficulté se présente ici. La série d'*Euler* n'est valable que dans un cercle de rayon moindre du plus petit module de y qui annule le dénominateur, et précédemment on a pris l'intégrale le long d'une circonférence où ν a un très grand module. Mais il est facile de voir qu'on obtiendra le même resultat en prenant cette intégrale le long d'une circonférence d'un très petit rayon. En effet, nous aurons

$$\frac{\nu}{\nu^2+\omega^2} = \frac{1}{\nu} - \frac{\omega^2}{\nu^3} + \cdots + (-1)^{m-1}\frac{\omega^{2m-2}}{\nu^{2m-1}} + (-1)^m \frac{\omega^{2m}}{\nu^{2m-1}(\nu^2+\omega^2)}.$$

Multiplions les deux membres par

$$e^{\nu x}\chi\left(\frac{1}{\nu}\right)d\nu$$

et intégrons le long d'une circonférence d'un très petit rayon autour de l'origine. Il viendra

$$E\frac{e^{\nu x}\nu}{\nu^2+\omega^2}\chi\left(\frac{1}{\nu}\right)d\nu = \int_0^x f(z)\,dz\Big[1-\frac{\omega^2(x-z)^2}{1.2}+\cdots$$

$$\cdots+(-1)^m\frac{\omega^{2m-2}(x-z)^{2m-2}}{1.2\ldots(2m-2)}+\int_0^{x-z}\int_0^{x-z}\cdots\frac{d^{2m}(\cos(\omega t))}{dt^{2m}}\,dt^{2m}\Big];$$

mais le dernier terme est précisément le reste de la série du cosinus, donc

$$E\frac{e^{\nu x}\nu}{\nu^2+\omega^2}\chi\left(\frac{1}{\nu}\right)d\nu = \int_0^x f(z)\cos\omega(x-z)\,dz,$$

et nous retrouvons ainsi la même équation qui nous a servi à établir la formule (16).

Soit

$$S = u_1 + A_2u_2 + \cdots + A_\theta u_\theta + \cdots + A_n u_n$$

la somme des n premiers termes d'une série convergente, et supposons u_θ fonction de $\frac{1}{\theta}$, on devra alors le représenter par la formule (3.) et l'on écrira

$$u_\theta = \int_0^\infty e^{-\nu\theta}\psi(\nu)\,d\nu.$$

Supposons encore que les coefficients A_2, A_3, ... soient ceux de la série

récurrente

$$\frac{e^{-\nu}}{1+Q(\nu)} = e^{-\nu}+A_2e^{-2\nu}+\cdots+A_ne^{-\nu n}-R$$

$$Q(\nu) = \lambda_1e^{-\nu}+\lambda_2e^{-2\nu}+\cdots+\lambda_\mu e^{-\mu\nu}.$$

Nous aurons

$$S = \int_0^\infty \frac{e^{-\nu}}{1+Q(\nu)}\psi(\nu)d\nu+\int_0^\infty R\psi(\nu)d\nu.$$

Mais en posant

$$\beta = 1+\alpha, \quad t = Q(\nu)-\alpha,$$

$$\text{Det.}\delta_i u_1 = e^{-\nu}(Q(\nu)-\alpha)^i\psi(\nu),$$

on obtient

$$\frac{1}{1+Q(\nu)} = \frac{1}{\beta}-\frac{t}{\beta^2}+\cdots+(-1)^m\frac{t^m}{\beta^{m+1}}-(-1)^m\frac{t^{m+1}}{\beta^{m+1}(1+t)},$$

$$S = \frac{u_1}{\beta}-\frac{\delta_1u_1}{\beta^2}+\cdots+(-1)^m\frac{\delta_mu_1}{\beta^{m+1}}$$

$$+\int_0^\infty R\psi(\nu)d\nu-(-1)^m\int_0^\infty\frac{e^{-\nu}t^{m+1}}{\beta^{m+1}(\beta+t)}\psi(\nu)d\nu.$$

Si l'on fait

$$Q(\nu) = e^\nu, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 2,$$

il vient

$$A_{2\theta} = -1, \quad A_{2\theta+1} = 1, \quad \delta u_1 = \Delta u_1,$$

et l'on retrouve la série bien connue d'*Euler*. Il est clair d'ailleurs qu'on peut substituer une autre fraction rationelle à celle que nous avons considérée.

VI.

Supposons que dans une science d'observation on ait obtenu les valeurs de

$$f(a_1), \quad f(a_2), \quad \ldots, \quad f(a_r)$$

ainsi que de leurs différences finies. On demande de développer $f(x)$ suivant ces valeurs. On peut même donner les poids $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ aux différentes séries d'observations.

Multiplions l'expression sous le signe intégral de la formule (2) par l'expression identiquement égale à 1:

$$\frac{\alpha_1e^{\nu a_1}+\alpha_2e^{\nu a_2}+\cdots+\alpha_re^{\nu a_r}}{\alpha_1e^{\nu a_1}+\alpha_2e^{\nu a_2}+\cdots+\alpha_re^{\nu a_r}}.$$

Posons

$$t = e^{\nu h}-1,$$

$$T = \frac{e^{\nu x}}{\alpha_1 e^{\nu a_1}+\cdots+\alpha_r e^{\nu a_r}} = \frac{(1+t)^{\frac{x}{h}}}{\alpha_1(1+t)^{\frac{a_1}{h}}+\cdots+\alpha_r(1+t)^{\frac{a_r}{h}}}$$

$$= P_0+tP_1(x)+t^2P_2(x)+\cdots.$$

Cette série étant uniformément convergente dans un cercle de rayon moindre que le module de ν qui rend nul ou infini T, on aura suivant le théorème II:

$$\begin{aligned} f(x) = {} & P_0(\alpha_1 f(a_1)+\alpha_2 f(a_2)+\cdots+\alpha_r f(a_r)) \\ & +P_1(x)(\alpha_1 \Delta f(a_1)+\alpha_2 \Delta f(a_2)+\cdots+\alpha_r \Delta f(a_r)) \\ & +P_2(x)(\alpha_1 \Delta^2 f(a_1)+\alpha_2 \Delta^2 f(a_2)+\cdots+\alpha_r \Delta^2 f(a_r)) \\ & +\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot, \end{aligned}$$

$$P_0 = \frac{1}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r},$$

$$P_1(x) = \frac{x}{h(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r)} - \frac{a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_r\alpha_r}{h(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r)^2},$$

. . . . . .

Si l'on voulait que la série procédât suivant les moyennes des dérivées il faudrait développer suivant les puissances de ν

$$\frac{e^{\nu x}}{1+e^{\nu}+e^{2\nu}+\cdots+e^{(r-1)\nu}} = \frac{e^{\nu x}(e^{\nu}-1)}{e^{r\nu}-1} = e^{\nu x}Q(\nu).$$

Si l'on développe $Q(\nu)$ suivant les puissances ascendantes de ν, et $e^{\nu x}$ suivant celles de νx, on obtient pour $f(x)$ une série dont les coefficients sont des polynômes en x. La différentiation par rapport à x fait voir que chaque polynôme est la dérivée du suivant.

Ce genre de série a été étudié par *Halphen**). L'analogie que présente cette théorie avec celle des fonctions génératrices ne pouvait échapper à la sagacité de ce savant géomètre, et il dit lui-même**) qu'on pourrait s'en servir pour vérifier la convergence d'une de ses séries. Mais ayant surtout en vue des développements holomorphes dans une aire, il a préféré de suivre une autre voie. La théorie des fonctions génératrices permet de pénétrer plus avant dans la matière; elle nous donne des déve-

*) Sur quelques séries pour le développement des fonctions à une seule variable. Bulletin des sciences mathématiques, 1881, II, pag. 462—488.

**) loc. cit. pag. 475.

loppements mixtes, comme celui de la formule de M. *Kronecker,* composés d'une partie holomorphe et de séries trigonométriques.

Ainsi on peut développer $Q(\nu)$ par la formule

$$Q(\nu) = \frac{1}{r} + \frac{2}{r}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\sin\omega}{\omega} + \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{k=h}\frac{2\nu(\cos\omega-1)}{\nu^2+\omega^2} - \frac{1}{r}\Sigma\frac{2\omega\sin\omega}{\nu^2+\omega^2},$$

$$\omega = \frac{2k\pi}{r}.$$

Ensuite on intègre sous cette forme les premiers termes jusqu'à l'indice θ. Ils donnent des expressions trigonométriques, par les formules générales

$$E\frac{\nu}{\nu^2+\omega^2}e^{\beta\nu}\chi\left(\frac{1}{\nu}\right)d\nu = \int_0^\beta f(z)\cos\omega(\beta-z)\,dz,$$

$$E\frac{\omega}{\nu^2+\omega^2}e^{\beta\nu}\chi\left(\frac{1}{\nu}\right)d\nu = \int_0^\beta f(z)\sin\omega(\beta-z)\,dz.$$

Les termes au-delà de l'indice θ sont développés en séries suivant les puissances de ν, et donnent des séries suivant les puissances de x. Le reste enfin peut se calculer facilement comme celui de la série de M. *Kronecker.*

L'avantage de cette manière de procéder est que ce sont précisément les premiers termes qui, par leurs développements, rendent peu convergente la série holomorphe. Il peut donc convenir de les sommer par un autre moyen.

La série de M. *Léauté*

$$f(x) = \frac{1}{a-b}\int_b^a f(x)dx + P_1(x)[f(a)-f(b)] + P_2(x)[f'(a)-f'(b)] + \cdots,$$

s'obtiendra en développant

$$\frac{e^{\nu x}}{e^{\nu a}-e^{\nu b}}$$

suivant les puissances de ν. En employant au contraire le développement

$$\frac{e^{\nu x}}{e^{\nu a}-e^{\nu b}} = e^{\nu\left(x-\frac{a+b}{2}\right)}\left[\frac{1}{(a-b)\nu} + \sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{(-1)^k 2}{(a-b)^2\nu^2+(2k\pi)^2}\right],$$

on obtiendra une série mixte, avec des termes trigonométriques.

Halphen, en employant une analyse semblable à celle des fonctions génératrices, résout le problème de développer une fonction $f(x+y)$ suivant les dérivées successives d'une fonction $Q(y)$.

Avec nos notations nous obtiendrons très simplement ce résultat en posant

$$\text{Det.}\, Q(y) = \psi\left(\frac{1}{\nu}\right),$$

et nous aurons

$$f(x+y) = E e^{\nu y} \psi\left(\frac{1}{\nu}\right) \frac{e^{\nu x} \chi\left(\frac{1}{\nu}\right)}{\psi\left(\frac{1}{\nu}\right)} d\nu.$$

Soit

$$(18.) \quad U = \frac{e^{\nu x} \chi\left(\frac{1}{\nu}\right)}{\psi\left(\frac{1}{\nu}\right)} = P_0 + \nu P_1(x) + \cdots + \nu^n P_n(x) + \frac{\Omega\left(\frac{1}{\nu}\right) e^{\nu x}}{\psi\left(\frac{1}{\nu}\right)},$$

on obtiendra

$$(19.) \quad f(x+y) = P_0 Q(y) + P_1(x) \frac{dQ(y)}{dy} + \cdots + P_n(x) \frac{d^n Q(y)}{dx^n} + E e^{\nu(x+y)} \Omega\left(\frac{1}{\nu}\right) d\nu.$$

Pour que cette série indéfiniment prolongée soit convergente, il faut d'abord que la même condition soit remplie pour (18.). Or, si p est le plus haut exposant de $\frac{1}{\nu}$ dans $\chi\left(\frac{1}{\nu}\right)$, et si U est développable suivant les puissances positives de ν, il faut que

$$\frac{1}{\nu^p \psi\left(\frac{1}{\nu}\right)}$$

le soit aussi. Nous pouvons donc poser

$$\frac{1}{\psi\left(\frac{1}{\nu}\right)} = A_p \nu^p + A_{p+1} \nu^{p+1} + \cdots.$$

La déterminante $\psi\left(\frac{1}{\nu}\right)$ est donc de celles qui ne deviennent pas infinies. D'un autre côté, la série (18.) étant uniformément convergente, on se trouve dans le cas du théorème II, et l'on en déduit la convergence de la série (19.). Mais ces séries se réduisent généralement à des identités, et ne présentent guère d'intérêt.

Il en est autrement, si l'on ne s'astreint pas à la condition que ψ représente la déterminante d'une fonction.

Posons

$$f(x) = E \chi\left(\frac{1}{\nu}\right) \psi(\nu) \frac{e^{\nu x}}{\psi(\nu)} d\nu,$$

$$(20.) \quad \frac{e^{\nu x}}{\psi(\nu)} = P_0 + \nu P_1(x) + \nu^2 P_2(x) + \cdots.$$

Cette série étant supposée uniformément convergente dans un cercle de rayon fini autour de l'origine, on aura

$$(21.) \qquad f(x) = \sum_{i=0}^{i=\infty} P_i(x) E\chi\left(\frac{1}{\nu}\right)\psi(\nu)\nu^i d\nu.$$

En particulier, si l'on pose

$$\psi(\nu) = e^{a\nu^2},$$

on retrouve la série donnée par M. *Hermite**) pour une classe beaucoup plus étendue de fonctions, sa démonstration étant plus générale que celle à laquelle conduit notre théorie. Nous avons

$$1.2\ldots i P_i(x) = \left(\frac{d^i e^{\nu x - a\nu^2}}{d\nu^i}\right)_{\nu=0},$$

$$(22.) \qquad E\nu^i \chi\left(\frac{1}{\nu}\right) e^{a\nu^2} d\nu = \sum_{\theta=0} \frac{f_{(0)}^{(k)} a^\theta}{1.2\ldots\theta},$$

$\theta = \frac{k-i}{2}$ = un nombre entier.

Les modules de cette dernière série formeront une suite convergente, si, β étant un nombre positif fini, on a

$$(23.) \qquad |f^{(k)}(0)| < \beta^k,$$

et la somme de ces modules sera moindre que

$$\beta^i e^{\beta^2 a}.$$

Mais la fonction représentée par (20.) étant dans notre cas holomorphe, quelque grand que soit le nombre $M > \beta$, on peut trouver un indice m à partir duquel

$$M^m |P_m(x)| < 1.$$

A partir de cet indice, la série formée de celle (20.), en sommant les modules des séries qui donnent les coefficients de $P_i(x)$, a les modules de ses termes moindres que ceux de

$$e^{\beta^2 a}\left(\frac{\beta}{M}\right)^i.$$

Les conditions du théorème III sont donc remplies, et la série (21.) converge avec $f(x)$ vers la fonction holomorphe $F(x)$, qui satisfait à (23.).

La forme donnée par M. *Hermite* pour le terme général de la série étant un peu différente de la nôtre, il convient de faire voir qu'elles coïncident dans le cas que nous traitons.

---

*) Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, tome LVIII.

M. ***Hermite*** donne pour terme général

$$\frac{1.2\ldots i}{2(2a)^i\sqrt{a\pi}}P_i(x)\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{4a}}P_i(z)f(z)dz,$$

$$1.2\ldots iP_i(x)=(-1)^i\frac{d^ie^{-\frac{x^2}{4a}}}{dx^i}(2a)^i.$$

D'abord pour ce qui concerne les polynômes $P_i(x)$, il suffit d'observer que l'on a

$$e^{\nu x-a\nu^2}=e^{-\frac{x^2}{4a}}e^{-a\left(\nu-\frac{x}{2a}\right)^2},$$

pour les mettre sous leur nouvelle forme. Ensuite, substituant cette valeur dans leurs coefficients, et intégrant par parties

$$\frac{1.2\ldots i}{2(2a)^i\sqrt{a\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{4a}}P_i(z)f(z)dz=\frac{1}{2\sqrt{a\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f^{(i)}(z)e^{-\frac{z^2}{4a}}dz.$$

Cette formule subsisterait encore, si au lieu de $f(x)$ on mettait $F(x)$, car en vertu de (23.)

$$e^{-\frac{z^2}{4a}}F^{(i)}(z)$$

a pour limite zéro, quand $z=\pm\infty$. La fonction $F(z)$, étant holomorphe sur tout le plan, peut être développée sous le signe intégral, et en observant que

$$\frac{1}{2\sqrt{a\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f^{(k)}(0)\frac{z^{k-i}}{1.2\ldots(k-i)}e^{-\frac{z^2}{4a}}dz=\frac{f^{(k)}(0)a^\theta}{1.2\ldots\theta},\qquad(k=i+2\theta)$$

on obtient précisément le second membre de l'équation (22.), et l'on voit que notre formule coïncide, dans le cas que nous considérons, avec celle de M. ***Hermite.***

Faisons

$$\psi(\nu)=(\nu-a_1)(\nu-a_2)\ldots(\nu-a_r)=A_0+A_1\nu+A_2\nu^2+\cdots,$$

$$\frac{1}{(\nu-a_1)(\nu-a_2)\ldots(\nu-a_r)}=\frac{B_1}{\nu-a_1}+\frac{B_2}{\nu-a_2}+\cdots+\frac{B_r}{\nu-a_r}.$$

En vertu de la formule (4.)

$$E\frac{e^{\nu x}\chi\left(\frac{1}{\nu}\right)}{\nu-a}\nu^\theta d\nu=\int_0^x f^{(\theta)}(z)e^{a(x-z)}dz,$$

donc

$$f(x) = \int_0^x [A_0 f(z) + A_1 f'(z) + \cdots + A_r f^{(r)}(z)][B_1 e^{a_1(x-z)} + B_2 e^{a_2(x-z)} + \cdots \cdots + B_r e^{a_r(x-z)}]\,dz.$$

Dans le cas de racines égales on observera d'abord que

$$\text{Fg.}\ \frac{1}{(\nu-\alpha)^\theta} = \frac{x^{\theta-1}}{1.2\ldots(\theta-1)} e^{\alpha x},$$

et l'on verra alors que cette racine donnera dans le développement de $f(x)$ les termes

$$\int_0^x [A_0 f(z) + \cdots + A_r f^{(r)}(z)] \frac{B(x-z)^{\theta-1}}{1.2\ldots(\theta-1)} e^{a(x-z)}\,dz.$$

Les racines imaginaires donneront des termes trigonométriques.

On obtiendra des développements analogues en substituant à la déterminante d'une opération les réduites de la fraction continue qui la représentent. Et aussi en appliquant cette méthode à la déterminante d'une fonction.

Pour en donner un exemple soit:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots \pm \frac{x^m}{m} + R_m,$$

$$\text{Det.}\left(x - \frac{x^2}{2} + \cdots \pm \frac{x^m}{m}\right) = \frac{1}{\nu}\left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu^2} + \frac{1.2}{\nu^3} - \cdots \pm \frac{1.2\ldots(m-1)}{\nu^m}\right),$$

$$\frac{\nu+3}{\nu^2+4\nu+2} = \frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu^2} + \frac{2}{\nu^3} - \frac{6}{\nu^4} + \Re,$$

$$\Re = \frac{\frac{20}{\nu^3} + \frac{12}{\nu^4}}{\nu^4+4\nu+2}.$$

Il suit de là que

$$\log(1+x) = E\frac{e^{\nu x}}{\nu}\frac{\nu+3}{\nu^2+4\nu+2}\,d\nu - E\frac{e^{\nu x}}{\nu}\Re\,d\nu + R_4.$$

Mais

$$\frac{\nu+3}{\nu^2+4\nu+2} = \frac{A_0}{\nu+2+\sqrt{2}} + \frac{A_1}{\nu+2-\sqrt{2}},$$

$$A_0 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}, \quad A_1 = \frac{2+\sqrt{2}}{4},$$

donc

$$\log(1+x) = \int_0^x dx[A_0 e^{-4A_1 x} + A_1 e^{-4A_0 x}] + R_4 - E\frac{e^{\nu x}}{\nu}\Re\,d\nu.$$

Pour avoir un autre exemple prenons

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = P+R, \quad P = 1+\tfrac{1}{2}x+\cdots+\frac{1.3\ldots9}{2.4\ldots10}x^5,$$

$$\text{Det.}P = \frac{1}{\nu}+\frac{1}{2\nu^2}+\frac{3}{4\nu^3}+\frac{15}{8\nu^4}+\frac{105}{16\nu^5}+\frac{945}{32\nu^6},$$

$$\frac{\nu^2-7\nu+\frac{33}{4}}{\nu^3-\frac{15}{2}\nu^2+\frac{45}{4}\nu-\frac{15}{8}} = \text{Det.}P+\Re.$$

Or l'équation

$$\nu^3-\frac{15}{2}\nu+\frac{45}{4}\nu^2-\frac{15}{8} = 0$$

a trois racines réelles

$$\alpha_1 = 1{,}7845\ldots, \quad \alpha_2 = 0{,}19017\ldots, \quad \alpha_3 = 5{,}5253\ldots.$$

On aura donc

$$\frac{\nu^2-7\nu+\frac{33}{4}}{\nu^3-\frac{15}{2}\nu^2+\frac{45}{4}\nu-\frac{15}{8}} = \frac{A_1}{\nu-\alpha_1}+\frac{A_2}{\nu-\alpha_2}+\frac{A_3}{\nu-\alpha_3},$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = A_1e^{\alpha_1 x}+A_2e^{\alpha_2 x}+A_3e^{\alpha_3 x}+R-E\int e^{\nu x}\Re\, d\nu.$$

En général soit

$$F(x) = F(0)+\frac{x}{1}F'(0)+\cdots+\frac{x^{2i}}{1.2\ldots2i}F^{(2i)}(0)+R,$$

et soient

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_i$$

les racines de l'équation

$$\begin{vmatrix} F(0) & F'(0) & \ldots & F^{(i)}(0) \\ F'(0) & F''(0) & \ldots & F^{(i+1)}(0) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F^{(i-1)}(0) & F^{i}(0) & \ldots & F^{(2i-1)}(0) \\ 1 & \nu & \ldots & \nu^i \end{vmatrix} = 0.$$

Le premier membre de cette équation représente, à une constante près, le dénominateur D_i de la réduite du développement de la déterminante en

fraction continue. Soit N_i le numérateur, et posons

$$\frac{N_i}{D_i} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{x-\alpha_2} + \cdots + \frac{A_i}{x-\alpha_i},$$

on aura

$$F(x) = A_1 e^{\alpha_1 x} + \cdots + A_i e^{\alpha_i x} + P.$$

Le reste P peut s'évaluer facilement, on obtient

$$P = R - \frac{x^{2i+1}}{1.2\ldots(2i+1)} [A_1 \alpha_1^{2i+1} e^{\theta_1 \alpha_1 x} + \cdots + A_i \alpha_i^{2i+1} e^{\theta_i \alpha_i x}],$$

θ_1, $\theta_2 \ldots \theta_i$ étant, comme on sait, des nombres plus petits que l'unité.

Passons à une autre transformation. Soit

$$t = A_1 \nu + A_2 \nu^2 + \cdots + A_r \nu^r \tag{24.}$$

la déterminante d'une certaine opération

$$\delta f(x) = A_1 f'(x) + A_2 f''(x) + \cdots + A_r f^{(r)}(x).$$

Si A_1 n'est pas nul, l'équation (24.) a pour t très petit une racine ν simple et développable en série convergente au moins dans un petit cercle autour de l'origine. Soit dans ce cercle

$$\nu = \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + \cdots.$$

Cette série étant absolument convergente, $e^{\nu y}$ est développable en série suivant les puissances de t, et l'on aura

$$e^{\nu y} = 1 + P_1(y) t + P_2(y) t^2 + \cdots.$$

On en conclut

$$f(x+y) = f(x) + P_1(y) \delta f(x) + P_2(y) \delta^2 f(x) + \cdots,$$

$f(x)$ étant un polynôme, le second membre a un nombre fini de termes. Il devient une série, quand $f(x)$ converge vers $F(x)$, et alors les conditions de convergence seront données par le théorème III.

Prenons un exemple très simple. Soit

$$t = p\nu + \nu^2.$$

On a pour la racine proche de zéro, t étant très petit,

$$\nu = \frac{t}{p} - \frac{t^2}{p^3} + 2\frac{t^3}{p^5} - 5\frac{t^4}{p^7} + 14\frac{t^5}{p^9} - \cdots,$$

qui est convergente pourvu que

$$\left|\frac{4t}{p^2}\right| < 1.$$

On a ensuite

$$P_1(y)=\frac{y}{p},\quad P_2(y)=\frac{y^2}{2p^2}-\frac{y}{p^3},\quad P_3(y)=\frac{y^3}{6p^3}-\frac{y^2}{p^4}+\frac{2y}{p^5},$$

$$f(x+y)=f(x)+P_1(y)(pf'(x)+f''(x))+P_2(y)(p^2f''(x)+2pf'''(x)+f^{IV}(x))+\cdots.$$

Prenons encore

$$t=\sin\nu,$$

on aura, pour $|t|<1$,

$$\nu=t+\tfrac{1}{2}\frac{t^3}{3}+\frac{1.3.t^5}{2.4.5}+\cdots,$$

$$e^{\nu y}=1+P_1(y)t+P_2(y)t^2+\cdots,$$

$$P_1(y)=y,\quad P_2(y)=\frac{y^2}{1.2},\quad P_3(y)=\frac{y}{2.3}+\frac{y^3}{1.2.3},\quad \ldots,$$

$$\delta f(x)=\frac{1}{2\sqrt{-1}}(f(x+\sqrt{-1})-f(x-\sqrt{-1})),$$

$$f(x+y)=f(x)+P_1(y)\delta f(x)+P_2(y)\delta^2 f(x)+\cdots.$$

Ueber das Additionstheorem der Cotangente und der Function $\zeta(u) = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}$.

(Von Herrn *F. Schottky* in Marburg.)

Für die Formel, welche die Partialbruch-Zerlegung der Cotangente darstellt, existirt eine Anzahl verschiedener Beweise. Das Problem, um das es sich dabei handelt, lässt sich folgendermassen auffassen. Die Cotangente ist zunächst definirt als diejenige Function, die der Differentialgleichung $\frac{dx}{du} = -1-x^2$ genügt und für $u = 0$ unendlich gross wird; sie ist periodisch, und ihre kleinste Periode heisst π. Es ist nun zu zeigen, dass $\operatorname{ctg}(u)$ dargestellt wird durch den Ausdruck

$$\frac{1}{u} + \Sigma\left(\frac{1}{u-m\pi} + \frac{1}{m\pi}\right),$$

wo die Summation sich erstreckt über alle ganzen Zahlen m mit Ausschluss von Null.

Eine Gruppe von Beweisen beruht auf folgendem Gedankengang. Man zeigt, dass $\operatorname{ctg} u$ nur ∞ wird für $u = 0$ und die Vielfachen von $\pm\pi$, an jeder solchen Stelle $m\pi$ wie $\frac{1}{u-m\pi}$. Dann kann die Differenz

$$\pi\operatorname{ctg}(\pi u) - \frac{1}{u} - \Sigma\left(\frac{1}{u-m} + \frac{1}{m}\right)$$

nur eine Function $\psi(u)$ sein, die für endliche Werthe von u niemals unendlich wird, oder eine Constante, und man bringt functionentheoretische Gründe dafür, dass das erstere nicht der Fall ist. Zum Beispiel folgenden. $\pi\operatorname{ctg}(\pi u)$ ist das arithmetische Mittel zwischen $\pi\operatorname{ctg}\left(\pi\frac{u}{2}\right)$ und $\pi\operatorname{ctg}\left(\pi\frac{1+u}{2}\right)$. Dieselbe Eigenschaft weist die Reihe auf; daher müsste auch $\psi(u)$ diese Eigenschaft haben:

$$\psi(u) = \frac{\psi\left(\frac{u}{2}\right)+\psi\left(\frac{1+u}{2}\right)}{2}.$$

Es fragt sich nun: Kann eine Function existiren, die in der ganzen Ebene regulär, aber keine Constante ist, und die dieser Functionalgleichung genügt? Diese Frage muss verneint werden. Denn denken wir uns um den Nullpunkt einen Kreis beschrieben mit einem Radius, der grösser als Eins ist, so müsste sich nach einem Satz der Functionentheorie auf der Peripherie ein Punkt u angeben lassen, wo der absolute Betrag von $\psi(u)$ grösser ist als in jedem Punkt innerhalb des Kreises. Innerhalb des Kreises liegen aber jedenfalls die beiden Punkte $\frac{1}{2}u$ und $\frac{1+u}{2}$. Daher wäre für dieses u:

$$|\psi(u)| > \left|\psi\left(\frac{u}{2}\right)\right| \quad \text{und} \quad > \left|\psi\left(\frac{1+u}{2}\right)\right|.$$

Folglich:

$$|\psi(u)| > \frac{\left|\psi\left(\frac{u}{2}\right)\right| + \left|\psi\left(\frac{1+u}{2}\right)\right|}{2}$$

und um so mehr:

$$|\psi(u)| > \left|\frac{\psi\left(\frac{u}{2}\right)+\psi\left(\frac{1+u}{2}\right)}{2}\right|.$$

Dies widerspricht der obigen Functionalgleichung. Mithin ist die Differenz eine Constante, die offenbar den Werth Null haben muss.

Dieser Beweis ist aber ein indirecter, insofern ein functionentheoretisches Princip zu Hülfe genommen wird. Der directe Weg ist der, dass man von den Definitionen

$$f(u) = \frac{1}{u} + \Sigma\left(\frac{1}{u-m}+\frac{1}{m}\right),$$

$$\pi = f\left(\tfrac{1}{4}\right) = 4 + \Sigma\left(\frac{1}{\frac{1}{4}-m}+\frac{1}{m}\right)$$

ausgeht und durch wirkliche Ausführung der Multiplicationen die Gleichung

$$f^2(u)+\pi^2+f'(u) = 0$$

herleitet. Dies durchzuführen schien mir deshalb von Interesse, weil eine Schwierigkeit überwunden werden muss. Wenn zwei Functionen gegeben sind als convergente Summen rationaler Functionen, deren jede nur an einer Stelle unendlich wird, so entsteht durch die Multiplication beider auch wieder eine

Summe rationaler Functionen. In dieser aber besitzen die einzelnen Glieder im Allgemeinen zwei Unendlichkeitspunkte, und es ist nicht immer leicht, sie in je zwei Functionen mit nur einer singulären Stelle so zu zerlegen, dass die Summe unbedingt convergent bleibt.

Statt der Differentialgleichung wollen wir das Additionstheorem beweisen, und zwar in der Form, dass für drei Argumente u, v, w, deren Summe gleich Null ist, die Gleichung

$$f(u)f(v)+f(u)f(w)+f(v)f(w) = \pi^2$$

besteht. Wir schreiben den Ausdruck für $f(u)$ so:

$$f(u) = \sum_p f(u;\ p),$$

$$f(u;\ p) = \frac{1}{u-p}+c_p.$$

Hier ist über alle ganzen Zahlen p, Null eingeschlossen, zu summiren; c_p bedeutet eine Constante, die gleich $\frac{1}{p}$ ist, wenn p von Null verschieden, gleich Null, wenn $p = 0$ ist. Danach ist:

$$f(u)f(v) = \sum_{p,q} f(u;\ p)\ f(v;\ q),$$

$$f(u)f(w) = \sum_{p,r} f(u;\ p)f(w;\ r),$$

$$f(v)f(w) = \sum_{q,r} f(v;\ q)f(w;\ r).$$

Wir denken uns in der ersten Summe in jedem Gliede zu p, q eine Zahl r, in der zweiten zu p, r eine Zahl q, in der dritten zu q, r eine Zahl p so hinzubestimmt, dass jedesmal $p+q+r = 0$ ist. Dann sind die Glieder der drei Reihen in völlig bestimmter Weise einander zugeordnet, und wir erhalten, wenn wir

$$f(u)f(v)+f(u)f(w)+f(v)f(w) = S$$

setzen, durch gliedweise Addition:

$$S = \sum_{p,q,r} R(u,\ v,\ w;\ p,\ q,\ r),$$

$$R(u,\ v,\ w;\ p,\ q,\ r) = f(u;\ p)f(v;\ q)+f(u;\ p)f(w;\ r)+f(v;\ q)f(w;\ r).$$

Diesen rationalen Ausdruck, in dem

$$u+v+w = 0,\quad p+q+r = 0$$

ist, haben wir umzuformen. Da

$$\frac{1}{u-p} = f(u;\ p)-c_p$$

ist, so ist:

$$\frac{1}{(u-p)(v-q)} = f(u;\ p)f(v;\ q)-c_q f(u;\ p)-c_p f(u;\ q)+c_p c_q.$$

Ebenso stellen wir:

$$\frac{1}{(u-p)(w-r)}, \quad \frac{1}{(v-q)(w-r)}$$

dar. Die Summe dieser drei Ausdrücke ist Null. Daher erhalten wir:

$$R(u,\ v,\ w;\ p,\ q,\ r) = (c_q+c_r)f(u;\ p)+(c_r+c_p)f(v;\ q) \\ +(c_p+c_q)f(w;\ r)-(c_p c_q+c_p c_r+c_q c_r).$$

Demnach zerlegen wir S in vier Theile:

$$S = S_1+S_2+S_3+S_0,$$

wobei

$$S_1 = \Sigma(c_q+c_r)f(u;\ p),$$

S_2 die entsprechende Function von v, S_3 von w ist, und wo:

$$S_0 = \Sigma-(c_p c_q+c_p c_r+c_q c_r)$$

ist. Allerdings beruht diese Zerlegung von S auf der Annahme, dass die vier Summen unbedingt convergent sind, ein Punkt, auf den wir sofort zurückkommen. Vorläufig nehmen wir die Convergenz an. Dann folgt weiter, dass S_1, S_2, S_3 gleich Null sind. Denn es lässt sich z. B. S_1 so schreiben:

$$S_1 = \sum_p k_p f(u;\ p), \quad k_p = \Sigma(c_q+c_r),$$

wo zu summiren ist über alle Zahlenpaare q, r, deren Summe gleich $-p$ ist, und es ist leicht zu sehen, dass jeder dieser Coefficienten k_p den Werth Null hat. Somit ist:

$$S = S_0 = \Sigma-(c_p c_q+c_p c_r+c_q c_r).$$

Betrachten wir hier ein Glied, in dem die drei Zahlen p, q, r sämmtlich von Null verschieden sind. Dann ist:

$$-(c_p c_q+c_p c_r+c_q c_r) = -\frac{p+q+r}{pqr} = 0.$$

Nehmen wir aber $p=0$, $q=n$, demnach $r=-n$ an, wo n nicht Null sein soll, so erhalten wir:

$$-(c_p c_q+c_p c_r+c_q c_r) = \frac{1}{n^2}.$$

Dieser Werth $\frac{1}{n^2}$ entspringt aus sechs verschiedenen Gliedern. Demnach ist:

$$S_0 = 6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Wir können aber diese Constante auch dadurch bestimmen, dass wir in der Formel $S = S_0$ für u und v den Werth $\frac{1}{4}$, für w den Werth $-\frac{1}{2}$ setzen. Dann wird $f(w) = 0$, $f(u) = f(v) = \pi$; also ist:

$$S_0 = \pi^2.$$

Aus der jetzt bewiesenen Gleichung

$$f(u)f(v)+f(u)f(w)+f(v)f(w) = \pi^2 \quad \text{für} \quad u+v+w = 0$$

folgt sofort die Differentialgleichung:

$$f^2(u)+\pi^2+f'(u) = 0,$$

indem man $v = 0$ werden lässt. Setzt man nun:

$$\frac{1}{\pi} f\left(\frac{u}{\pi}\right) = \varphi(u),$$

so ergiebt sich:

$$\varphi^2(u)+1+\varphi'(u) = 0.$$

Folglich ist $\varphi(u)$ die Cotangente und π die kleinste Periode derselben.

Aber alle diese Schlüsse setzen voraus, dass die Summen S_1, S_2, S_3, S_0 unbedingt convergiren. S_2 und S_3 haben dieselbe Form wie S_1, und da $S_0 = S-S_1-S_2-S_3$ ist, so genügt es, die Convergenz der einen Summe

$$\Sigma(c_q+c_r)f(u;\ p)$$

festzustellen. Wir lassen die Glieder fort, in denen p, q oder r gleich Null ist, da sie zweifellos convergente Partialsummen bilden. Für die übrigen ist:

$$(c_q+c_r)f(u;\ p) = \frac{u}{1-\frac{u}{p}} \cdot \frac{1}{pqr};$$

und da der erste von diesen beiden Factoren eine endliche obere Grenze hat, so kommt es nur darauf an zu zeigen, dass die Summe

$$\Sigma\left|\frac{1}{pqr}\right|$$

einen endlichen Werth hat. Sie ist zu erstrecken über alle von Null verschiedenen ganzen Zahlen p, q, r, die der Bedingung $p+q+r = 0$ genügen.

In jedem solchen System p, q, r sind entweder zwei Zahlen positiv, die dritte negativ, oder zwei negativ, die dritte positiv. Danach zerfallen die Glieder in sechs Gruppen, und die Summen selbst in sechs Partialsummen, die offenbar einander gleich sind. Es genügt daher, die eine Gruppe:

p und q positiv, $r = -(p+q)$ negativ,

ins Auge zu fassen. Dass nun die Summe

$$\sum_{p,q=1}^{\infty} \frac{1}{pq(p+q)}$$

convergirt, lässt sich so beweisen. Jedenfalls ist

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{(p+q)^2} < \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{(p+q)(p+q-1)}, \quad \text{d. i.} \quad < \frac{1}{p}.$$

Folglich:

$$\sum_{p,q=1}^{\infty} \frac{1}{p(p+q)^2} < \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p^2}\right), \quad \text{d. i.} \quad < \frac{\pi^2}{6}.$$

Ebenso:

$$\sum_{p,q=1}^{\infty} \frac{1}{q(p+q)^2} < \frac{\pi^2}{6}.$$

Da nun:

$$\frac{1}{p(p+q)^2} + \frac{1}{q(p+q)^2} = \frac{1}{pq(p+q)}$$

ist, so folgt:

$$\sum_{p,q=1}^{\infty} \frac{1}{pq(p+q)} < \frac{\pi^2}{3}.$$

Hierdurch ist die Gültigkeit unserer Umformungen nachgewiesen.

Wir wenden uns nun zu den doppelt periodischen Functionen. Die Perioden denken wir uns in der Form $p = ma+nb$ gegeben, wo m, n beliebige ganze Zahlen bedeuten. a, b sind die primitiven Perioden, deren Quotient imaginär sein muss. Es gilt dann der *Weierstrass*sche Convergenzsatz, dass die Summe

$$\Sigma\left(\frac{1}{p^3}\right),$$

erstreckt über sämmtliche Perioden p, unbedingt convergirt, und demnach auch die allgemeinere Reihe $\Sigma R(p)$, sofern $R(p)$ irgend eine rationale Function von p bedeutet, die für $p = \infty$ mindestens von der dritten Ordnung verschwindet. Hiernach ist es möglich, alle beliebigen elliptischen Functionen zu bilden. Man erhält ihre Additionstheoreme, indem man von dem Satz ausgeht, dem Fundament der *Liouville*schen und der *Weierstrass*schen Theorie, dass eine in der ganzen Ebene reguläre Function, die auch bei der Annäherung an den unendlich fernen Punkt nicht über jede Grenze wächst, nothwendig eine Constante sein muss. Die Additionstheoreme sind aber algebraische Beziehungen zwischen gegebenen Summen. Wir können

uns deshalb die Aufgabe stellen, sie ohne jenes functionentheoretische Princip, durch blosse Rechnung herzuleiten.

Man wird allerdings für diesen Zweck nicht jede Additionsformel wählen, z. B. nicht die der Function $\wp(u)$, denn hier würde man drei Summen mit einander zu multipliciren haben. Geeigneter, aber nicht symmetrisch genug, wäre das Additionstheorem der Integrale zweiter Gattung:

$$\zeta(u+v)-\zeta(u)-\zeta(v) = \tfrac{1}{2}\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}.$$

Hier ist $\zeta(u)$ die Function, die Herr ***Weierstrass*** als $\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}$ bezeichnet und durch die Reihe

$$\zeta(u) = \frac{1}{u}+\sum_p\left(\frac{1}{u-p}+\frac{1}{p}+\frac{u}{p^2}\right)$$

darstellt, $\wp(u)$ ihre mit negativem Zeichen genommene Ableitung.

Aus der angegebenen Formel folgt durch Differentiation das Additionstheorem für $\wp(u)$. Sie selbst aber lässt sich als Differential einer anderen Formel ansehen, die von den Herren ***Frobenius*** und ***Stickelberger****) zuerst gegeben ist:

$$(\zeta(u)+\zeta(v)+\zeta(w))^2+\zeta'(u)+\zeta'(v)+\zeta'(w) = 0,$$

wenn

$$u+v+w = 0$$

ist. Diese Gleichung ist symmetrisch in Bezug auf u, v, w; aus ihr entspringt die vorige, indem man sie unter der Voraussetzung $w = \text{Const.}$ differentiirt, und ihre Form entspricht derjenigen, in der wir das Additionstheorem der Cotangente schreiben konnten. Es ist auch leicht zu sehen, dass der Ausdruck links nie unendlich wird, dass er für $u = 0$ verschwindet und dass er jedenfalls periodisch ist. Damit ist die Richtigkeit der Gleichung sofort erkannt, wenn man den vorhin erwähnten Satz zu Hülfe nimmt. Aber eben die Anwendung dieses Satzes wollen wir hier vermeiden.

Der rechnende Beweis entspricht ganz dem vorigen. Sogar der Convergenzsatz, den wir brauchen, beruht auf der schon durchgeführten Betrachtung. Dem *Weierstrass*schen Beweise für die Convergenz von $\Sigma\left(\frac{1}{p^3}\right)$ liegen die beiden folgenden höchst einfachen und unmittelbar einleuchtenden Gedanken zu Grunde:

*) Ueber die Addition und Multiplication elliptischer Functionen. Dieses Journal, Bd. 88, S. 155.

Erstens: wenn ξ, η reelle Variable, a, b dagegen gegebene Grössen mit imaginärem Verhältniss bedeuten, so existirt für den Quotienten

$$\frac{|\xi a+\eta b|}{|\xi|+|\eta|}$$

ein endliches Minimum K.

Zweitens: wenn g eine positive ganze Zahl ist, so existiren genau $4g$ Paare ganzer Zahlen m, n, welche die Bedingung $|m|+|n|=g$ erfüllen.

Bezeichnen wir diesen Werth $|m|+|n|$ als Grad der Periode $ma+nb$, so giebt es genau $4g$ Perioden vom Grade g, und jede ist grösser oder gleich gK. Daraus folgt sofort:

$$\Sigma\left|\frac{1}{p^3}\right| < \sum_{g=1}^{x}\frac{4g}{g^3K^3}, \quad \text{d. i.} \quad < \frac{2\pi^2}{3K^3}.$$

Wir fügen einen Zusatz hinzu, indem wir die Convergenz der folgenden Summe

$$T = \Sigma\left|\frac{1}{p^2q^2(p-q)}\right|$$

beweisen. Hier soll p alle Periodenwerthe durchlaufen, ebenso q; nur $p=0$, $q=0$ und $p=q$ ist natürlich auszuschliessen.

Die Glieder von T zerlegen wir in drei Gruppen, je nachdem der Grad von p gleich, grösser oder kleiner als der von q ist. Die beiden letzteren Partialsummen sind aber identisch. Wir setzen deshalb:

$$T = T_1+2T_2,$$

wo T_1 denjenigen Theil von T bedeutet, in dem p und q von gleichem Grade sind, während T_2 die Glieder umfasst, für die p von höherem Grade als q ist.

Die Glieder von T_1 gruppiren wir nach dem Grade g von p und q. Für ein bestimmtes g giebt es jedenfalls nicht mehr als $(4g)^2$ Glieder, in jedem einzelnen ist:

$$|p| \text{ und } |q| \geqq gK, \quad |p-q| \geqq K.$$

Daher ist die Summe der Glieder von T_1, die zur Zahl g gehören, kleiner als:

$$(4g)^2\cdot\frac{1}{g^4K^5} = \frac{16}{g^2K^5}$$

und T_1 selbst kleiner als:

$$\frac{16}{K^5}\sum_{g=1}^{\infty}\left(\frac{1}{g^2}\right).$$

In T_2 hat jedes p einen bestimmten Grad g, jedes q einen Grad h, und es ist $g>h$. Der Grad von $p-q$ ist dann mindestens gleich $g-h$. Denn es sei

$$p = ma+nb, \quad q = m'a+n'b,$$

so ist:

$$|m-m'|+|n-n'| \geqq |m|-|m'|+|n|-|n'|.$$

Folglich ist:

$$\left|\frac{1}{p^2q^2(p-q)}\right| \leqq \frac{1}{K^5}\,\frac{1}{g^2h^2(g-h)}.$$

Da die Anzahl der Glieder, die zu den Zahlen g, h gehören, keinesfalls grösser als $4g.4h$ ist, so ist ihre Summe:

$$< \frac{16}{K^5}\cdot\frac{1}{gh(g-h)}$$

und T_2 selbst kleiner als:

$$\frac{16}{K^5}\,\Sigma\,\frac{1}{gh(g-h)},$$

oder, indem wir $g=h+k$ setzen, kleiner als:

$$\frac{16}{K^5}\sum_{h,k=1}^{\infty}\frac{1}{hk(h+k)}.$$

Dass diese Summe einen endlichen Werth hat, ist schon bewiesen. Somit ist die ganze Summe T unbedingt convergent.

In dem Summenausdruck T schreiben wir $-q$ statt q, und mit je zwei Perioden p, q verbinden wir eine dritte, r, durch die Gleichung $p+q+r=0$. Dann erhält der bewiesene Satz die Form:

Die über alle Systeme von je drei der Bedingung $p+q+r=0$ genügenden Perioden erstreckte Summe

$$\Sigma\frac{1}{p^2q^2r}$$

ist unbedingt convergent.

Nach dieser Vorbereitung bilden wir den Ausdruck:

$$\zeta(u)\zeta(v)+\zeta(v)\zeta(w)+\zeta(w)\zeta(u) = S;$$

wir setzen voraus, dass u, v, w drei nicht singuläre Argumente sind, deren Summe gleich Null ist:

$$u+v+w = 0,$$

und wir wollen zeigen, dass sich S umformen lässt in eine Summe von

drei Functionen, deren jede nur von einem Argument abhängt. Wir setzen:

$$\zeta(u) = \Sigma f(u;\ p),$$

wo die Summation sich erstreckt über alle Perioden p mit Einschluss von Null; $f(u;\ p)$ aber bedeutet $\frac{1}{u}$ oder

$$\frac{1}{u-p}+\frac{1}{p}+\frac{u}{p^2} = \frac{u^2}{p^2(u-p)},$$

je nachdem $p=0$ oder von Null verschieden ist.

Zunächst können wir wieder, durch Ausführung der Multiplicationen, S in dieser Art als Summe von lauter rationalen Functionen darstellen:

$$S = \Sigma R(u,\ v,\ w;\ p,\ q,\ r).$$

$R(u,\ v,\ w;\ p,\ q,\ r)$ bedeutet den Ausdruck:

$$f(u;\ p)f(v;\ q)+f(v;\ q)f(w;\ r)+f(w;\ r)f(u;\ p);$$

man erhält sämmtliche Glieder, indem man zwei der Grössen $p,\ q,\ r$ unabhängig von einander alle Periodenwerthe durchlaufen lässt, mit Einschluss von Null, während die dritte jedesmal durch die Gleichung $p+q+r=0$ bestimmt ist.

Diese convergente Summe zerlegen wir in zwei Haupttheile

$$S = L+M.$$

L soll alle diejenigen Glieder enthalten, in denen eine der Grössen $p,\ q,\ r$ gleich Null ist, M die übrigen. Diese beiden Summen L und M müssen wir besonders behandeln.

I. L enthält zunächst ein Glied $p=0,\ q=0,\ r=0$. Aber dieses ist:

$$\frac{1}{uv}+\frac{1}{vw}+\frac{1}{wu} = 0$$

und kann somit fortgelassen werden. Bei den übrigen ist entweder p oder q oder r gleich 0, während jedesmal die beiden anderen Grössen von Null verschiedene entgegengesetzte Werthe haben. Demnach zerfällt L weiter in drei Partialsummen:

$$L = L_1+L_2+L_3,$$

von denen L_1 die Glieder enthält, in denen $p=0$ ist, L_2 die, wo $q=0$, L_3 die, wo $r=0$ ist.

Fassen wir L_1 ins Auge; in diesen Gliedern haben wir $p=0$ und $r=-q$ zu setzen; daher haben wir:

$$R(u,\ v,\ w;\ p,\ q,\ r) = \frac{1}{u}(f(v;\ q)+f(w;\ -q))+f(v;\ q)f(w;\ -q).$$

Dies ist eine rationale Function von q, und zwar eine solche, die für $q = v$ und $q = -w$ von der ersten, für $q = 0$ von der vierten Ordnung unendlich wird, und die zugleich für $q = \infty$ von der dritten Ordnung verschwindet. Demnach muss sich R in folgender Weise darstellen lassen:

$$Af(v;\ q)+Bf(w;\ -q)+\frac{C}{q^3}+\frac{D}{q^4}.$$

Die von q unabhängigen Coefficienten A, B, C, D sind leicht nach der Methode der Partialbruch-Zerlegung zu bestimmen:

$$A=\frac{w-v}{v^2},\quad B=\frac{v-w}{w^2},\quad C=w-v,\quad D=vw;$$

man erhält jetzt L_1, indem man über alle von Null verschiedenen Perioden q summirt. Da hierbei

$$\Sigma f(v;\ q) = \zeta(v)-\frac{1}{v},$$

$$\Sigma f(w;\ -q) = \zeta(w)-\frac{1}{w},$$

$$\Sigma\left(\frac{1}{q^3}\right) = 0$$

ist, so ergiebt sich:

$$L_1 = \frac{w-v}{v^2}\left(\zeta(v)-\frac{1}{v}\right)+\frac{v-w}{w^2}\left(\zeta(w)-\frac{1}{w}\right)+s_4vw,$$

wobei s_4 die Constante:

$$s_4 = \Sigma\left(\frac{1}{q^4}\right)$$

ist.

Aehnlich bestimmen sich L_2, L_3:

$$L_2 = \frac{u-w}{w^2}\left(\zeta(w)-\frac{1}{w}\right)+\frac{w-u}{u^2}\left(\zeta(u)-\frac{1}{u}\right)+s_4wu,$$

$$L_3 = \frac{v-u}{u^2}\left(\zeta(u)-\frac{1}{v}\right)+\frac{u-v}{v^2}\left(\zeta(v)-\frac{1}{v}\right)+s_4uv.$$

Da

$$vw+wu+uv = -\tfrac{1}{2}(u^2+v^2+w^2),$$

da ferner:

$$\frac{w-u}{u^2}+\frac{v-u}{u^2} = -\frac{3}{u}$$

ist, so findet sich durch Addition von L_1, L_2, L_3:

$$L = \lambda(u)+\lambda(v)+\lambda(w),$$

wobei $\lambda(u)$ die Function bedeutet:

$$\lambda(u) = -\frac{3}{u}\left(\zeta(u)-\frac{1}{u}\right)-\tfrac{1}{2}s_4u^2.$$

II. M enthält die Glieder von $\Sigma R(u, v, w; p, q, r)$, wo p, q und r von Null verschieden sind. Also ist hier:

$$f(u;\ p)=\frac{u^2}{p^2(u-p)},\quad f(v;\ q)=\frac{v^2}{q^2(v-q)},\quad \text{etc.}$$

Wir nehmen nun folgende Zerlegung vor. Wenn $u+v+w=0$, $p+q+r=0$ ist, so ist:

$$ruv = pqw-qv(u-p)-pu(v-q).$$

Multipliciren wir diese Gleichung mit:

$$\frac{uv}{p^2q^2r(u-p)(v-q)},$$

so erhalten wir:

$$f(u;\ p)f(v;\ q) = \frac{uvw}{pqr}\cdot\frac{1}{(u-p)(v-q)}-\frac{v^2}{pqr(v-q)}\cdot\frac{u}{p}-\frac{u^2}{pqr(u-p)}\cdot\frac{v}{q}.$$

Aehnlich sind die Producte

$$f(v;\ q)f(w;\ r),\quad f(w;\ r)f(u;\ p)$$

darzustellen. Bei der Addition ergänzen sich die drei Anfangsglieder auf der rechten Seite zu Null; diese können also weggelassen werden. Dann wird $R(u, v, w;\ p, q, r)$ eine Summe von sechs Termen:

$$-\frac{u^2}{pqr(u-p)}\frac{v}{q},\quad -\frac{u^2}{pqr(u-p)}\frac{w}{r},\quad -\frac{v^2}{pqr(v-q)}\frac{u}{p},\quad \text{etc.}$$

Diese Terme aber bilden für sich convergente Summen. So ist z. B.:

$$\Sigma\left(\frac{-u^2}{pqr(u-p)}\frac{v}{q}\right) = \Sigma\left(\frac{u^2v}{1-\frac{u}{p}}\cdot\frac{1}{p^2q^2r}\right).$$

Der Factor

$$\frac{u^2v}{1-\frac{u}{p}}$$

hat eine endliche obere Grenze, und $\Sigma\left(\frac{1}{p^2q^2r}\right)$ ist unbedingt convergent, wie wir bewiesen haben.

Demnach ist es erlaubt, M in diese sechs Summen zu zerlegen. Wir fassen sie aber paarweise zusammen und setzen:

$$M_1 = \Sigma\frac{-u^2}{pqr(u-p)}\left(\frac{v}{q}+\frac{w}{r}\right),\quad \text{etc.},$$

so dass $M = M_1 + M_2 + M_3$ wird. M_2 und M_3 sind die Summen, die aus M_1 durch Vertauschung von u mit v und w entstehen.

M_1 ist scheinbar von u, v und w abhängig. Nun kann man aber q und r vertauschen, und da

$$\left(\frac{v}{q} + \frac{w}{r}\right) + \left(\frac{v}{r} + \frac{w}{q}\right) = \frac{pu}{qr}$$

ist, so erhält man:

$$2M_1 = \Sigma \frac{-u^3}{q^2r^2(u-p)}.$$

M_1 ist demnach eine Function von u allein, die wir mit $\mu(u)$ bezeichnen. M_2 ist dann $= \mu(v)$, $M_3 = \mu(w)$; somit:

$$M = \mu(u) + \mu(v) + \mu(w).$$

Wir können für $\mu(u)$ auch die Definition gelten lassen:

$$\mu(u) = \Sigma \frac{-u^2}{pqr(u-p)}\left(\frac{v}{q} + \frac{w}{r}\right).$$

w darf hier einen ganz beliebigen Werth bedeuten, während $v = -u - w$ zu setzen ist. Nehmen wir z. B. $w = 0$, $v = -u$ an, so erhalten wir:

$$\mu(u) = \Sigma \frac{u^3}{pq^2r(u-p)}.$$

In diesem Ausdrucke vertauschen wir, was erlaubt ist, p, q, r mit $-q$, $-p$, $-r$:

$$\mu(u) = \Sigma \frac{u^3}{p^2qr(u+q)},$$

und addiren beide Formen. Da

$$\frac{1}{q(u-p)} + \frac{1}{p(u+q)} = -\frac{ru}{pq(u-p)(u+q)}$$

ist, so ergiebt sich auf diese Weise:

$$2\mu(u) = -\Sigma \frac{u^4}{p^2q^2(u-p)(u+q)},$$

oder

$$-2\mu(u) = \Sigma f(u;\ p) f(u;\ -q).$$

Hier ist die Summation in Bezug auf p und q über alle von Null verschiedenen Perioden zu erstrecken, mit Ausschluss von $q = -p$ (weil dann $r = 0$ würde). Fügen wir diese ausgeschlossenen Glieder noch hinzu, addiren wir also auf beiden Seiten die Summe

$$\Sigma f^2(u;\ p),$$

erstreckt über alle von Null verschiedenen Perioden p, so steht dann auf der rechten Seite das Quadrat von $\zeta(u)-\frac{1}{u}$. Es ist also:

$$-2\mu(u)+\Sigma f^2(u;\ p) = \left(\zeta(u)-\frac{1}{u}\right)^2.$$

Nun ist aber:

$$f^2(u;\ p) = -\frac{d}{du}f(u;\ p)+\frac{4}{u}f(u;\ p)+\frac{2u}{p^3}+\frac{u^2}{p^4};$$

folglich:

$$\Sigma f^2(u;\ p) = -\frac{d}{du}\left(\zeta(u)-\frac{1}{u}\right)+\frac{4}{u}\left(\zeta(u)-\frac{1}{u}\right)+s_4u^2.$$

Setzen wir diesen Werth der Summe ein in den zuletzt gefundenen Ausdruck der Function $\mu(u)$, so ergiebt sich:

$$\mu(u) = -\tfrac{1}{2}(\zeta'(u)+\zeta^2(u))+\frac{3}{u}\left(\zeta(u)-\frac{1}{u}\right)+\tfrac{1}{2}s_4u^2.$$

Vergleicht man dies mit dem vorhin gefundenen Werth von $\lambda(u)$, so folgt:

$$\lambda(u)+\mu(u) = -\tfrac{1}{2}(\zeta'(u)+\zeta^2(u)).$$

Daher ist:

$$\zeta(u)\zeta(v)+\zeta(v)\zeta(w)+\zeta(w)\zeta(u) = -\tfrac{1}{2}(\zeta'(u)+\zeta'(v)+\zeta'(w)+\zeta^2(u)+\zeta^2(v)+\zeta^2(w)),$$

welche Gleichung zu beweisen war.

Ueber die Function $E(x)$ mit complexem Argument.

(Von Herrn *E. Busche* in Bergedorf bei Hamburg.)

Die Function $E(x)$*) kann für reelle positive Werthe des Arguments auf zweierlei Weise definirt werden: Man kann erstens unter $E(x)$ die grösste ganze Zahl verstehen, die $\leqq x$ ist, und man kann zweitens mit $E(x)$ die Anzahl der in dem Bereiche von Null (excl.) bis x (incl.) enthaltenen ganzen Zahlen bezeichnen. Beide Definitionen werden durch die bekannte Gleichung

$$E(-x) = -E(x)-1$$

auch auf negative Werthe des Arguments ausgedehnt. Diese Gleichung ist mit den beiden angegebenen Definitionen aber nur dann in Einklang zu bringen, wenn x nicht ganzzahlig ist. Aus diesem Grunde ist es nothwendig, neben die Function $E(x)$ die mit ihr völlig gleichberechtigte Function $E_1(x)$ zu stellen, die für ein nicht ganzzahliges x mit $E(x)$ übereinstimmt, für ein ganzzahliges x aber mit $E(x)$ durch die Gleichung

$$E_1(x) = E(x)-1$$

verbunden ist. Um $E_1(x)$ unabhängig von $E(x)$ zu erklären, muss in der ersten Definition $< x$ statt $\leqq x$ gesetzt werden, bei der zweiten Definition ist für $E_1(x)$ statt der variablen Grenze x eine unendlich wenig kleinere Zahl zu nehmen bei der Bestimmung der in dem Bereiche von Null bis x liegenden ganzen Zahlen.

Die Gleichung

$$E(-x) = -E_1(x)-1$$

besteht für jeden Werth des Arguments und führt zu keinem Widerspruch mit den Definitionen. Es ist z. B.

$$E(-3) = -E_1(3)-1 = -2-1 = -3,$$

*) Ich benutze hier die ursprüngliche *Legendre*sche Bezeichnung $E(x)$ statt der kürzeren *Gauss*schen $[x]$, weil ich die Einschliessung in eckige Klammern in einer anderen, auch von *Gauss* herrührenden Bedeutung gebrauchen werde.

und zu demselben Werth von $E(-3)$ wird man durch die erste Definition geführt und auch durch die zweite, wenn man bedenkt, dass statt der variablen Grenze -3 bei $E(-3)$ eine unendlich wenig grössere Zahl zu setzen ist, dass also -3 nicht mit zu dem Bereich gehört, dessen ganze Zahlen gezählt werden, während die Zahl Null, die ja von dem Bereiche von Null bis $x > 0$ ausgeschlossen war, jetzt mitgezählt werden muss, weil diese ganze Zahl sonst weder zu einem positiven, noch zu einem negativen Bereiche gehören würde. Für $E_1(-3)$ dagegen ergiebt sich aus der Gleichung der Werth -4, was ebenfalls aus den beiden Definitionen dieser Function mit Nothwendigkeit folgt, denn statt -3 ist bei der Abgrenzung des Bereiches eine unendlich wenig kleinere Zahl zu setzen, und die Zahl Null ist wieder mitzuzählen, da sie auch bei $E_1(x)$ von einem positiven mit Null beginnenden Bereich ausgeschlossen war.

Dass man hiernach bei der Benutzung der zweiten Definition für ein negatives x als Anzahl der in einem gewissen Bereich enthaltenen ganzen Zahlen eine negative Zahl erhält, ist ebenso zulässig wie in der Geometrie der Gebrauch von negativen Strecken.

Mit Hülfe der beiden Functionen $E(x)$ und $E_1(x)$ kann man die Anzahl $[x_1, x_2]$ der in dem Bereiche von x_1 bis x_2 vorhandenen ganzen Zahlen angeben. Es ist

$$[x_1,\ x_2] = E(x_2) - E(x_1) \quad \text{oder} \quad = E(x_2) - E_1(x_1)$$
$$\text{oder} \quad = E_1(x_2) - E(x_1) \quad \text{oder} \quad = E_1(x_2) - E_1(x_1),$$

je nachdem für den Fall, dass eine oder beide Grenzen ganzzahlig werden, entweder sowohl x_1 als x_2 im positiven Sinne unendlich wenig verschoben gedacht werden sollen, oder x_1 im negativen, x_2 im positiven oder x_1 im positiven, x_2 im negativen oder endlich sowohl x_1 als x_2 im negativen Sinne. Es ist $[x_1, x_2] \gtreqless 0$, wenn $x_1 > x_2$ ist.

Diese etwas weitläufige Betrachtung habe ich vorangeschickt, um die Berechtigung und allgemeine Gültigkeit der zweiten Definition ausser Zweifel zu setzen, denn nur wenn man beide Definitionen von $E(x)$ auf complexe Zahlen überträgt, ist eine Behandlung dieser Function mit complexem Argument möglich und bis zu einem gewissen Grade mit den einfachsten Mitteln durchführbar. Die zweite Definition von $E(x)$ für ein reelles x tritt übrigens nicht nur in den hierauf bezüglichen Arbeiten von *L. Kronecker* und Herrn *E. Schering* deutlich — wenn auch in abgeänderter

Form — hervor, sondern sie liegt implicite allen Untersuchungen über diese Function zu Grunde, die ihrer Natur nach eine Anzahlfunction ist.

Die erste Definition der Function $E(x)$ lässt sich unmittelbar auf complexe Werthe des Arguments übertragen. Unter $E(x+yi)$ hat man diejenige ganze Zahl $a+bi$ zu verstehen, die durch die Bedingungen

$$x-1 < a \gtreqless x, \quad y-1 < b \gtreqless y$$

bestimmt ist. Neben $E(x+yi)$ sind jetzt drei andere Functionen $E_1(x+yi)$ $E_2(x+yi)$, $E_3(x+yi)$ zu stellen, die sich nur dann von $E(x+yi)$ unterscheiden, wenn mindestens eine der Zahlen x oder y ganzzahlig ist. Es möge definirt sein: $E_1(x+yi) = a_1+b_1i$ durch die Bedingungen

$$x-1 \gtreqless a_1 < x, \quad y-1 < b_1 \gtreqless y,$$

$E_2(x+yi) = a_2+b_2i$ durch

$$x-1 < a_2 \gtreqless x, \quad y-1 \gtreqless b_2 < y,$$

$E_3(x+yi) = a_3+b_3i$ durch

$$x-1 \gtreqless a_3 < x, \quad y-1 \gtreqless b_3 < y.$$

Die zweite Definition der Function $E(x)$ lässt sich dagegen nicht ohne Weiteres auf complexe Zahlen übertragen, aber es ist, wie gesagt, zur erfolgreichen Behandlung der Function $E(x+yi)$ durchaus nothwendig, auch für complexe Zahlen eine Anzahlfunction aufzustellen, die mit $E(x+yi)$ in einer so engen Beziehung steht, dass sie gleichsam die zweite Definition der reellen Function vertritt. Alle hier in Betracht kommenden Anzahlen sind solche von sämmtlichen ganzen Zahlen in einem gegebenen beliebig begrenzten Bereich, der die $x+yi$-Ebene einfach überdeckt. Bezeichnet man einen solchen Bereich mit $\mathfrak{B}$, so möge der Complex der in $\mathfrak{B}$ liegenden ganzen Zahlen $(\mathfrak{B})$, ihre Anzahl $[\mathfrak{B}]$ genannt werden. (Vgl. *Gauss'* Nachlass zur Theorie der biquadratischen Reste. Werke Bd. 2). Diese Anzahl ist positiv, wenn bei der Bestimmung des Bereiches seine Grenzen im positiven Sinne durchlaufen werden, negativ, wenn dies im entgegengesetzten, negativen Sinne geschieht. Im Folgenden werden übrigens nur positive Anzahlen gebraucht werden. Wenn der Bereich ein von geraden oder gegebenen krummen Linien begrenztes Polygon ist, so soll er durch die in der richtigen Reihenfolge neben einander gesetzten Eckpunkte bezeichnet werden.

Wenn nun bei einer Betrachtung mehrere Bereiche auftreten, die alle

nach demselben Gesetz gebildet werden, so wird im Allgemeinen schon die Angabe eines einzigen charakteristischen Punktes der Begrenzung hinreichen, um den gerade in Frage kommenden Bereich zu kennzeichnen. In diesem Falle soll die Anzahl der in dem Bereiche liegenden ganzen Zahlen kurz durch diesen in eckige Klammern gesetzten Punkt angegeben werden, und diese so durch einen einzigen Punkt bestimmte Anzahlfunction betrachte ich als das Analogon zu der mittelst der zweiten Definition erklärten Function $E(x)$. In der That wird sich zeigen, dass, wenn man die Functionen $E(x+yi)$ und $[x+yi]$ neben einander betrachtet, sich Gleichungen ergeben, die bekannten Formeln aus der Theorie der reellen Function $E(x)$ entsprechen.

Zunächst ist klar, dass die folgende identische Gleichung richtig ist (vergl. meine Arbeit „über grösste Ganze", dieses Journal, Bd. 103, S. 118):

$$(1.)\quad \begin{cases} \Sigma_z F[E(f_{21}(z)),\ z] = \sum\limits_{w}\sum\limits_{\zeta_w} F(w,\ \zeta_w). \\ z = (\mathfrak{B}),\ w = (f_{21}(\mathfrak{B}))',\ \zeta_w = (f_{12}(w),\ f_{12}(w+1),\ f_{12}(w+1+i),\ f_{12}(w+i))'. \end{cases}$$

Hier ist F eine ganz beliebige Function, so dass statt der Summenzeichen auch Productzeichen gesetzt werden dürfen. $f_{21}(z)$ ist eine Function, die in dem Bereich $\mathfrak{B}$ nicht nur selbst endlich, stetig und eindeutig ist, sondern auch eine ebensolche inverse Function $f_{12}(w)$ in dem Bereiche $f_{21}(\mathfrak{B})$ besitzt, der aus $\mathfrak{B}$ durch die mittelst des vorgesetzten Functionszeichens angedeutete conforme Abbildung hervorgeht. z durchläuft alle ganzen Zahlen des Bereiches $\mathfrak{B}$, wobei natürlich festgestellt sein muss, welche etwa auf dem Rande gelegenen ganzen Zahlen mit zu $\mathfrak{B}$ gerechnet werden sollen. Da man, nachdem diese Festsetzung getroffen ist, die Grenzen des Bereiches unendlich wenig so geändert denken darf, dass die ganzen Zahlen, die zu $\mathfrak{B}$ gehören sollen — und nur diese — im Innern des Bereiches liegen, so erfordern solche ursprünglich auf dem Rande von $\mathfrak{B}$ gelegenen Zahlen keine besondere Berücksichtigung. Die Grösse w durchläuft alle ganzen Zahlen des Bereiches $f_{21}(\mathfrak{B})$, ausserdem aber, was in (1.) durch den Accent angedeutet werden soll, alle diejenigen ganzen Zahlen w ausserhalb des Bereiches $f_{21}(\mathfrak{B})$, die so beschaffen sind, dass ein Theil des „Elementarbereiches" w, $w+1$, $w+1+i$, $w+i$ noch innerhalb des Bereiches liegt. ζ_w endlich durchläuft die ganzen Zahlen des Bereiches $f_{12}(w)$, $f_{12}(w+1)$, $f_{12}(w+1+i)$, $f_{12}(w+i)$, wenn dieser Bereich sich ganz innerhalb des Bereiches $\mathfrak{B}$ befindet, sonst nur diejenigen Zahlen des Complexes $(f_{12}(w)$, $f_{12}(w+1)$,

$f_{12}(w+1+i)$, $f_{12}(w+i)$), die noch zu $\mathfrak{B}$ gehören. (Diese Beschränkung soll der hinzugefügte Accent ausdrücken). Während nämlich $f_{21}(z)$ sich in dem geradlinig begrenzten Elementarbereich w, $w+1$, $w+1+i$, $w+i$ befindet, so dass $E(f_{21}(z)) = w$ ist, bleibt $z = \zeta_w$ in dem angegebenen Bereich, der aus dem Elementarbereich durch conforme Abbildung mittelst der Function f_{12} hervorgeht. Da in der Gleichung (1.) die Function E vorkommt, so gehören die Linien $f_{12}(w)$, $f_{12}(w+1)$ und $f_{12}(w)$, $f_{12}(w+i)$ mit Ausnahme der Punkte $f_{12}(w+1)$ und $f_{12}(w+i)$ mit zu dem Bereich für ζ_w, die Linien $f_{12}(w+1)$, $f_{12}(w+1+i)$ und $f_{12}(w+i)$, $f_{12}(w+1+i)$ dagegen nicht. Analoge andere Bestimmungen müssten getroffen werden, wenn statt der Function E eine der Functionen E_1, E_2, E_3 bevorzugt worden wäre.

Die Gleichung (1.) ist eine reine Identität; nur in der Schreibweise unterscheiden sich die linke und die rechte Seite von einander. Bei der wirklichen numerischen Ausrechnung würde jedem Gliede links ein identisches Glied rechts entsprechen; für diejenigen Werthe von w, die $E(f_{21}(z))$ gar nicht annimmt, existiren keine Zahlen ζ_w, so dass diese Glieder der über w erstreckten Summe in der That nicht vorkommen. Die auf der rechten Seite von (1.) erscheinende Form ermöglicht jedoch, wenn die Function F specialisirt wird, eine Umformung der Summe, die in einfachen Fällen zur thatsächlichen Ausführung der Summation führen kann.

Um das zu zeigen, möge $F(\alpha, \beta) = \alpha$ gesetzt werden. Dann geht (1.) über in

$$\sum_z E(f_{21}(z)) = \sum_w w.[f_{12}(w),\ f_{12}(w+1),\ f_{12}(w+1+i),\ f_{12}(w+i)]',$$

$$z = (\mathfrak{B}), \quad w = (f_{21}(\mathfrak{B}))'.$$

Denkt man sich die Grösse z auf einer z-Ebene, w auf einer w-Ebene repräsentirt, so braucht man nicht noch eine dritte Ebene zu Hülfe zu nehmen, um $f_{12}(w)$ zu veranschaulichen, da f_{12} die inverse Function von f_{21}, also $f_{12}(w) = z$ ist. Die durch die ganzen Punkte einer Ebene zu der reellen und der imaginären Axe gezogenen Parallelen mögen Elementarlinien 1., bezw. 2. Art genannt werden; sie begrenzen die Elementarbereiche. Die den Elementarlinien der w-Ebene bei der conformen Abbildung mittelst f_{12} entsprechenden Linien der z-Ebene sollen Fundamentallinien 1., bezw. 2. Art heissen. Die z-Ebene, insbesondere der Bereich $\mathfrak{B}$, wird durch die Fundamentallinien in rechtwinklige, im Allgemeinen krummlinige Vierecke zerlegt. Der Rand von $\mathfrak{B}$ schneidet eine Anzahl dieser Vierecke, und zwar

kann wieder, eventuell nach vorangegangener unendlich kleiner Abänderung von $\mathfrak{B}$, angenommen werden, dass dieses Schneiden nicht in dem Eckpunkt eines Vierecks stattfindet. Die Eckpunkte der Vierecke entsprechen den ganzen Zahlen der w-Ebene, die innerhalb des Bereiches $\mathfrak{B}$ liegenden Eckpunkte den innerhalb des Bereiches $f_{21}(\mathfrak{B})$ liegenden ganzen Zahlen. Mit der Anzahl der ganzen Zahlen innerhalb desjenigen Vierecks, das dem Elementarbereich w, $w+1$, $w+1+i$, $w+i$ entspricht, ist bei der Bestimmung von Σ_w die Zahl w zu multipliciren. Dabei ist nur der zu $\mathfrak{B}$ gehörige Theil des Vierecks zu berücksichtigen, wenn der Rand von $\mathfrak{B}$ das Viereck schneidet.

Nun soll über den Bereich $\mathfrak{B}$ die Voraussetzung gemacht werden, dass er einfach zusammenhängend sei, und dass seine Grenzen von den Fundamentallinien nur an einer Eintrittsstelle und einer Austrittsstelle geschnitten werden. Das ist gleichbedeutend mit der Voraussetzung, dass der Bereich $f_{21}(\mathfrak{B})$ einfach zusammenhängend ist, und dass seine Grenzen von den Elementarlinien nur in je zwei Punkten getroffen werden. In solche einfache Bereiche kann ein beliebiger Bereich bekanntlich durch eine endliche Anzahl von Schnittlinien zerlegt werden.

Durch zwei sich in $f_{12}(w)$ schneidende Fundamentallinien wird $\mathfrak{B}$ in vier Theile zerlegt, von denen derjenige, der rechts von der Fundamentallinie 1. Art und links von der Fundamentallinie 2. Art liegt (d. h. rechts von $f_{12}(w-1)$, $f_{12}(w)$ und links von $f_{12}(w-i)$, $f_{12}(w)$), als der Bereich angesehen werden soll, der durch den Punkt $f_{12}(w)$ bestimmt ist; die Anzahl von ganzen Zahlen, die er enthält, ist nach der früher getroffenen Verabredung mit $[f_{12}(w)]$ zu bezeichnen. Dann ist

$$[f_{12}(w), f_{12}(w+1), f_{12}(w+1+i), f_{12}w+i)] = [f_{12}(w+1+i)]-[f_{12}(w+1)]-[f_{12}(w+i)]+[f_{12}(w)].$$

Denkt man sich in dieser Weise alle in Σ_w vorkommenden Viereckszahlen zerlegt — wobei vorläufig von den Randvierecken abgesehen wird — so sieht man, dass die Anzahl $[f_{12}(w)]$ viermal vorkommt, nämlich einmal positiv und multiplicirt mit w, einmal positiv und multiplicirt mit $w-1-i$, einmal negativ und multiplicirt mit $w-1$ und einmal negativ und multiplicirt mit $w-i$, so dass $[f_{12}(w)]$ im Ganzen mit $w+w-1-i-w+1-w+i$, d. h. mit Null multiplicirt wird. Das gilt für jedes $[f_{12}(w)]$, das zu einem Werth von w gehört von der Beschaffenheit, dass auch $w+1$, $w+1+i$, $w+i$ noch unter den w vorkommen, über welche Σ_w zu erstrecken ist.

Um die am Rande von $\mathfrak{B}$ auftretenden Besonderheiten einer genaueren Betrachtung zu unterziehen, mögen die Eintrittsstellen der Elementarlinien 1. Art in den Bereich $f_{21}(\mathfrak{B})$ mit $p_1, p_2, \ldots p_\nu \ldots$, die der Elementarlinien 2. Art mit $p'_1, p'_2, \ldots p'_\nu \ldots$, die Austrittsstellen entsprechend mit $q_1, q_2, \ldots q_\mu \ldots$, bezw. $q'_1, q'_2, \ldots q'_\mu \ldots$ bezeichnet werden. Die p, p', q, q' sind keine ganzen Zahlen. $f_{12}(p_\nu)$ ist die Eintrittsstelle der ν. Fundamentallinie 1. Art in den Bereich $\mathfrak{B}$, u. s. w. An dem Theil des Randes von $\mathfrak{B}$, wo nur Eintrittsstellen beider Arten von Fundamentallinien vorhanden sind, findet keine Ausnahme von der Regel statt, nach der $[f_{12}(w)]$ mit dem Factor Null versehen in Σ_w vorkommt, auch ist es hier nicht nothwendig, andere Anzahlfunctionen als $[f_{12}(w)]$ einzuführen.

An dem Theil des Randes von $\mathfrak{B}$, wo Eintrittsstellen von Fundamentallinien 2. Art und Austrittsstellen von solchen 1. Art auftreten, ist folgendermassen zu verfahren. Zwischen $f_{12}(w)$ und $f_{12}(w+i)$ liege die Eintrittsstelle $f_{12}(p'_\nu)$, zwischen $f_{12}(w+i)$ und $f_{12}(w+1+i)$ liege die Austrittsstelle $f_{12}(q_\mu)$. Dann kommt in Σ_w das Glied $w.[f_{12}(p'_\nu), f_{12}(q_\mu), f_{12}(w+i)]$ vor. Nun ist

$$[f_{12}(p'_\nu), \quad f_{12}(q_\mu), \quad f_{12}(w+i)] = [f_{12}(q_\mu)] - [f_{12}(w+i)],$$

wenn unter $[f_{12}(q_\mu)]$ die Anzahl der ganzen Zahlen in dem Bereiche verstanden wird, der von der durch $f_{12}(q_\mu)$ gehenden Fundamentallinie 1. Art und dem Rande von $\mathfrak{B}$ begrenzt wird. Dabei ist in Uebereinstimmung mit der Definition von $[f_{12}(w)]$ derjenige der beiden Bereiche, in die $\mathfrak{B}$ durch die Fundamentallinie 1. Art getheilt wird, gemeint, der rechts von ihr liegt. Der Summand von Σ_w, dessen erster Factor $w+i$ ist, besitzt als zweiten Factor eine Anzahlfunction, die bei ihrer Zerlegung das Glied $[f_{12}(q_\mu)]$ subtractiv enthält; bei anderen Gliedern der Summe aber tritt $[f_{12}(q_\mu)]$ nicht auf, so dass dieser Ausdruck im Ganzen mit $w-w-i$, d. h. mit $-i$ multiplicirt wird. Ganz dasselbe Resultat wird in derselben Weise hergeleitet, wenn zwei oder mehrere Austrittsstellen von Fundamentallinien 1. Art unmittelbar auf einander folgen, ohne dass zwischen ihnen auf dem Rande von $\mathfrak{B}$ eine Eintrittsstelle einer Fundamentallinie 2. Art liegt.

Bei den Stellen des Randes, die entweder nur Austrittsstellen von Fundamentallinien 2. Art enthalten oder dazwischen auch Eintrittsstellen von Fundamentallinien 1. Art, ist $[f_{12}(q'_\mu)]$ mit -1 zu multipliciren, wenn die Glieder von Σ_w in entsprechender Weise zusammengefasst werden. Dabei ist $[f_{12}(q'_\mu)]$ die Anzahl von ganzen Zahlen in dem links von der Funda-

mentallinie 2. Art liegenden Bereiche, der ausser von dieser nur von den Begrenzungslinien von $\mathfrak{B}$ begrenzt wird.

Endlich kommen noch die Stellen des Randes von $\mathfrak{B}$ in Betracht, an denen Austrittsstellen beider Arten von Fundamentallinien unmittelbar auf einander folgen. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden. Wenn erstens der Rand von dem Viereck $f_{12}(w)$, $f_{12}(w+1)$, $f_{12}(w+1+i)$, $f_{12}(w+i)$ ein zu $\mathfrak{B}$ gehöriges Dreieck $f_{12}(w)$, $f_{12}(q_\mu)$, $f_{12}(q'_\nu)$ abschneidet, so ist $w.[f_{12}(w), f_{12}(q_\mu), f_{12}(q'_\nu)]$ ein Glied der Summe Σ_w, und es ist

$$[f_{12}(w),\quad f_{12}(q_\mu),\quad f_{12}(q'_\nu)] = [\mathfrak{B}]-[f_{12}(q_\mu)]-[f_{12}(q'_\nu)]+[f_{12}(w)].$$

Berücksichtigt man nun die benachbarten Glieder von Σ_w, so ergiebt sich, dass $[f_{12}(q_\mu)]$ wieder mit $-i$, $[f_{12}(q'_\nu)]$ mit -1, $[f_{12}(w)]$ mit Null multiplicirt wird. Das Glied $[\mathfrak{B}]$ dagegen behält den Factor w, so dass $[\mathfrak{B}]$ mit der Summe aller w zu multipliciren ist, die derartig liegen, dass sowohl $f_{12}(w)$, $f_{12}(w+1)$, als auch $f_{12}(w)$, $f_{12}(w+i)$ von dem Rande von $\mathfrak{B}$ geschnitten werden, oder, was dasselbe ist: $[\mathfrak{B}]$ ist mit der Summe aller w zu multipliciren, die so liegen, dass w, $w+1$ und w, $w+i$ beide von dem Rande von $f_{21}(\mathfrak{B})$ geschnitten werden.

Zweitens kann der Rand von $\mathfrak{B}$ von dem Viereck $f_{12}(w)$, $f_{12}(w+1)$, $f_{12}(w+1+i)$, $f_{12}(w+i)$ ein Fünfeck $f_{12}(w)$, $f_{12}(w+1)$, $f_{12}(q'_\nu)$, $f_{12}(q_\mu)$, $f_{12}(w+i)$ abschneiden, so dass ein Glied von Σ_w sein wird

$$w.[f_{12}(w),\quad f_{12}(w+1),\quad f_{12}(q'_\nu),\quad f_{12}(q_\mu),\quad f_{12}(w+i)].$$

Die Anzahlfunction kann jetzt zerlegt werden in

$$[f_{12}(q_\mu)]+[f_{12}(q'_\nu)]-[\mathfrak{B}]-[f_{12}(w+1)]-[f_{12}(w+i)]+[f_{12}(w)],$$

und hieraus geht bei Berücksichtigung der benachbarten Glieder von Σ_w hervor, dass auch in diesem Falle $[f_{12}(q_\mu)]$ mit $-i$, $[f_{12}(q'_\nu)]$ mit -1, $[f_{12}(w)]$, $[f_{12}(w+1)]$, $[f_{12}(w+i)]$ mit Null zu multipliciren sind. Dagegen ist hiernach $[\mathfrak{B}]$ mit der negativ genommenen Summe aller w zu multipliciren, die am Rande von $f_{21}(\mathfrak{B})$ so liegen, dass die Strecken $w+1$, $w+1+i$ und $w+i$, $w+1+i$ beide von dem Rande durchschnitten werden.

Die ganzen Punkte w, von denen soeben die Rede gewesen ist, sollen durch die Benennung „Factorpunkte“ ausgezeichnet werden, weil sie bei der Berechnung von Σ_w besonders in Betracht kommen als Factoren der Anzahl $[\mathfrak{B}]$ aller Zahlen, über die die Summe Σ_z zu erstrecken ist. Die beiden Arten von Factorpunkten mögen als positive und negative Factorpunkte unterschieden werden. Geht man auf dem Rande des einfachen

Bereiches $f_{21}(\mathfrak{B})$ entlang und beobachtet die auf einander folgenden Factorpunkte, so bemerkt man, dass immer zwei gleichnamige durch einen ungleichnamigen von einander getrennt sind, wodurch die Berechnung der Summe aller mit ihrem Vorzeichen versehenen Factorpunkte bei einfacher Beschaffenheit des Randes sehr erleichtert wird.

Der Lehrsatz, in den diese Ueberlegungen zusammengefasst werden können, lautet folgendermassen:

Sind $z = f_{12}(w)$ *und* $w = f_{21}(z)$ *in den einfachen Bereichen* $\mathfrak{B}$ *und* $f_{21}(\mathfrak{B})$ *eindeutige, stetige und endliche Functionen, so ist*

$$(2.) \qquad \Sigma_z E(f_{21}(z)) = -\Sigma_\nu [f_{12}(q'_\nu)] - i\Sigma_\mu [f_{12}(q_\mu)] + [\mathfrak{B}].\Sigma \pm w_f, \qquad (z=(\mathfrak{B}))$$

wo auf der rechten Seite die erste Summe über alle Austrittspunkte q'_ν *der Elementarlinien zweiter Art aus dem Bereich* $f_{21}(\mathfrak{B})$, *die zweite Summe über alle Austrittspunkte* q_μ *der Elementarlinien erster Art aus* $f_{21}(\mathfrak{B})$, *die dritte Summe über alle mit dem richtigen Vorzeichen versehenen Factorpunkte* w_f *von* $f_{21}(\mathfrak{B})$ *zu erstrecken ist.*

Damit ist die auf einen zweidimensionalen Bereich sich beziehende Summe auf Summen zurückgeführt, in denen nur Randwerthe vorkommen, so dass dieses Theorem gewissermassen an den *Green*schen Satz erinnert. Die Formel (2.) leistet offenbar mehr als die analoge Formel in der Theorie der reellen Function $E(x)$, nämlich

$$\sum_{x=E_1(a)+1}^{x=E_1(b)} E(f_{21}(x)) = -\sum_{y=E(f_{21}(a))+1}^{y=E(f_{21}(b))} E_1(f_{12}(y)) - E(f_{21}(a)).E_1(a) + E(f_{21}(b)).E_1(b),$$

(a. a. O. S. 119), denn durch diese letztere wird eine Summe von grössten Ganzen nur auf eine andere Summe derselben Art zurückgeführt.

Um jetzt die Formel (2.) auf ein einfaches Beispiel anzuwenden, möge

$$f_{21}(z) = \frac{c+di}{a+bi} z, \quad \text{also} \quad f_{12}(w) = \frac{a+bi}{c+di} w$$

sein, wo a, b, c, d positive ganze Zahlen sind, von denen a und c ungerade, b und d gerade sind; a und b, ferner c und d und auch $a+bi$ und $c+di$ sollen keinen gemeinschaftlichen Theiler haben. Der Bereich $\mathfrak{B}$ möge durch das Viereck 0, $a+bi$, $(a+bi)(1+i)$, $(a+bi)i$ gegeben sein, dessen Eckpunkte nicht mit zum Bereich gehören. Der Bereich $f_{21}(\mathfrak{B})$ ist dann das Viereck 0, $c+di$, $(c+di)(1+i)$, $(c+di)i$ ebenfalls mit Ausschluss der Eckpunkte. Auf dem Rande beider Bereiche und auf den, in diesem Falle

geraden, Fundamentallinien von $\mathfrak{B}$ liegen den Voraussetzungen zufolge keine ganzen Zahlen. Bekanntlich ist $[\mathfrak{B}] = a^2+b^2-1$.

Die Summen $\Sigma_\mu[f_{12}(q_\mu)]$ und $\Sigma_\nu[f_{12}(q'_\nu)]$ lassen sich in diesem Falle leicht berechnen. Die Punkte q_μ finden sich nur auf den Linien 0, $c+di$ und $c+di$, $(c+di)(1+i)$, ihre Anzahl ist $c+d-1$. Ebenso gross ist die Anzahl der Punkte q'_ν, die nur auf $(c+di)i$, $(c+di)(1+i)$ und $c+di$, $(c+di)(1+i)$ vorkommen. Nun ist wegen der völligen Symmetrie, die der Bereich $\mathfrak{B}$ sowohl hinsichtlich der Anordnung seiner ganzen Zahlen, als auch der Anordnung seiner Fundamentallinien in Bezug auf seine vier Eckpunkte besitzt,

$$[f_{12}(q_1)]+[f_{12}(q_{c+d-1})] = [\mathfrak{B}],$$
$$[f_{12}(q_2)]+[f_{12}(q_{c+d-2})] = [\mathfrak{B}],$$
u. s. w.
$$[f_{12}(q_{\frac{c+d-1}{2}})]+[f_{12}(q_{\frac{c+d+1}{2}})] = [\mathfrak{B}],$$

so dass man

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=c+d-1}[f_{12}(q_\mu)] = \frac{c+d-1}{2}\cdot[\mathfrak{B}]$$

findet, und genau ebenso ergiebt sich auch

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=c+d-1}[f_{12}(q'_\nu)] = \frac{c+d-1}{2}\cdot[\mathfrak{B}].$$

Die Factorpunkte w_f finden sich in diesem Falle nur an der Linie $(c+di)$, $(c+di)(1+i)$. Bei der Berechnung von $\Sigma\pm w_f$ ist zu unterscheiden zwischen $d<c$ und $d>c$. Ist $d<c$, so ist der zunächst an $c+di$ liegende Punkt von $f_{21}(\mathfrak{B})$, nämlich $c-1+di$ kein Factorpunkt, weil die Linie $c+di$, $(c+di)(1+i)$ die Elementarlinie $c-1+di$, $c-1+(d+1)i$ erst jenseits des Punktes $c-1+(d+1)i$ schneidet. Dagegen ist auf jeder der $d-1$ Elementarlinien zweiter Art, die die Grenzlinie $c+di$, $(c+di)(1+i)$ schneiden, der dem Rande zunächst liegende ganze Punkt ein positiver Factorpunkt, und jede Zahl, die um Eins kleiner ist als ein solcher Punkt, wird durch einen negativen Factorpunkt dargestellt. Der Beitrag, den alle diese Factorpunkte zu der gesuchten Summe liefern, ist also $(d-1).[\mathfrak{B}]$. Ausserdem ist nur noch der dem Punkt $(c+di)(1+i)$ zunächst liegende Punkt des Bereiches $f_{21}(\mathfrak{B})$, nämlich $(c+di)(1+i)-i$ ein positiver Factorpunkt, zu dem kein negativer gehört. Im Ganzen ist also

$$\Sigma\pm w_f = c-1+(c+d-1)i.$$

Ist $d > c$, so ist $c-1+di$ ein alleinstehender positiver Factorpunkt, auf jeder der $c-1$ Elementarlinien erster Art, die den Rand $c+di, (c+di)(1+i)$ schneiden, liegt ein positiver Factorpunkt, und jedesmal ist dann die um i verminderte Zahl ein negativer Factorpunkt, so dass auch in diesem Falle, da weiter keine Factorpunkte vorhanden sind,

$$\Sigma \pm w_f = c-1+di+(c-1)i = c-1+(c+d-1)i$$

ist. Es ergiebt sich demnach

$$\Sigma_z E\Big(\frac{c+di}{a+bi}z\Big) = \Big(-\frac{c+d-1}{2} - \frac{c+d-1}{2}i + c-1+(c+d-1)i\Big).[\mathfrak{B}]$$

$$= \Big(\frac{c-d-1}{2} + \frac{c+d-1}{2}i\Big).[\mathfrak{B}]$$

oder auch

$$(3.) \qquad \Sigma_z E\Big(\frac{c+di}{a+bi}z\Big) = \frac{1+i}{2}\cdot(c+di-1)(a^2+b^2-1).$$

$z = (0,\ a+bi,\ (a+bi)(1+i),\ (a+bi)i)$

Diese Formel entspricht der bekannten Gleichung

$$\sum_{x=1}^{x=a-1} E\Big(\frac{c}{a}x\Big) = \tfrac{1}{2}(c-1)(a-1).$$

Der Kürze wegen wurden a, b, c, d als positiv vorausgesetzt. Die Formel (3.) gilt aber auch für beliebige Vorzeichen dieser Zahlen. Um dies wenigstens an einem Zahlenbeispiel zu zeigen, möge

$$\Sigma_z E\Big(\frac{-5+8i}{3-2i}z\Big) \qquad (z = (0,\ 3-2i,\ 5+i,\ 2+3i))$$

berechnet werden. Die in $\mathfrak{B}$ enthaltenen ganzen Zahlen sind hier

$$z = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 1+i,\ 2+i,\ 3+i,\ 4+i,\ 2+2i,\ 3+2i,\ 2-i,\ 2-2i,$$

und die zu diesen z gehörigen grössten Ganzen sind in derselben Reihenfolge

$$-3+i,\ -5+2i,\ -8+3i,\ -10+4i,\ -4-2i,\ -6-i,\ -9,$$
$$-11+i,\ -7-3i,\ -10-2i,\ -4+4i,\ -7+5i,$$

ihre Summe ist $-84+12i = (-7+i).12$, und dasselbe Resultat findet man nach Gleichung (3.).

Bemerkungen zu dem Aufsatze des Herrn *G. Landsberg*.

(„Zur Theorie der periodischen Kettenbrüche“. Bd. 109, Heft 3 d. Journ.)

(Von Herrn *E. Netto* in Giessen.)

Die interessanten Resultate, welche Herr *G. Landsberg* in seiner Arbeit „Zur Theorie der periodischen Kettenbrüche“ im 109. Bande S. 231ff. abgeleitet hat, lassen sich ohne Weiteres von einem anderen Standpunkte her auch aus den Entwickelungen entnehmen, welche ich in dem Aufsatze „Ueber einen Algorithmus zur Auflösung numerischer algebraischer Gleichungen“ im 29. Bande der Mathematischen Annalen S. 141ff. gegeben habe, sobald man, wie es Herr *Isenkrahe* (Mathematische Annalen Bd. 31 S. 309ff.) gethan hat, die Gleichung in der Form

$$x = f(x)$$

zu Grunde legt.

Es ist hier

$$(1.) \qquad x = f(x) = \frac{ax+b}{\alpha x+\beta}$$

zu setzen, wobei man, ***wenn α von Null verschieden ist,*** diese Constante als positiv voraussetzen kann. Da in unserem Falle $f(x)$ eine rationale Function ist, so folgt (l. c. 143), dass nur an eine der beiden Wurzeln von

$$(2.) \qquad \alpha x^2+(\beta-a)x-b = 0$$

durch Iteration mittels

$$(3.) \qquad x_{k+1} = \frac{ax_k+b}{\alpha x_k+\beta}$$

Annäherung stattfinden kann. Setzt man, unter ξ_1, ξ_2 die Wurzeln von (2.)

verstehend,

$$(4.) \qquad \begin{cases} \alpha\xi_1+\beta = \frac{1}{2}(a+\beta+\sqrt{D}), \\ \alpha\xi_2+\beta = \frac{1}{2}(a+\beta-\sqrt{D}), \end{cases} \quad (D>0)$$

wobei die Quadratwurzel stets als positiv gelten soll, ***wenn D positiv ist,*** dann folgt aus

$$(5.) \qquad f'(\xi_1) = \frac{(\alpha\xi_2+\beta)^2}{a\beta-b\alpha}, \quad f'(\xi_2) = \frac{(\alpha\xi_1+\beta)^2}{a\beta-b\alpha},$$

$$(6.) \qquad f'(\xi_1)f'(\xi_2) = 1,$$

dass für $a+\beta \neq 0$ auch wirklich einer Wurzel asymptotisch zugestrebt wird, und zwar ist dies

für $a+\beta>0$ *die algebraisch grössere* ξ_2,

für $a+\beta<0$ *die algebraisch kleinere* ξ_1.

Dies ergiebt sich aus der *Isenkrahe*schen Abhandlung S. 311.

Für $a+\beta=0$ *wird* $x_{\varkappa+2}=x_\varkappa$; es tritt also der von mir hervorgehobene Fall (S. 144) auf.

Setzt man, wenn ξ diejenige der beiden Wurzeln bedeutet, an welche Annäherung stattfindet,

$$x_\varkappa = \xi+\delta_\varkappa, \quad x_{\varkappa+1} = \xi+\delta_{\varkappa+1},$$

so muss *bei positiven* $a\beta-b\alpha$ das Vorzeichen von $\delta_{\varkappa+1}$ mit dem von $\delta_\varkappa$ bei kleinen Werthen von $\delta_\varkappa$ übereinstimmen; denn für solche Werthe ist

$$\delta_{\varkappa+1} = f'(\xi)\delta_\varkappa.$$

Lässt man nun $\delta_\varkappa$ von Null ab einmal ins Positive, einmal ins Negative zunehmen, bis auf beiden Wegen die andere Wurzel ξ' erreicht ist, so wird $\delta_{\varkappa+1}$ stets näher an ξ liegen, als $\delta_\varkappa$ (auf dem von $\delta_\varkappa$ durchlaufenen Wege gerechnet), ***so dass für jeden Anfangswerth*** x_0 ***Convergenz stattfindet;*** natürlich ist dabei $x_0=\xi'$ ausgenommen.

Dass der gleiche Umstand bei $a\beta-b\alpha<0$ eintritt, wird am einfachsten aus der Betrachtung von $\delta_{\varkappa+2}$, $\delta_{\varkappa+4}$, ... erkannt.

Der Fall $a\beta-b\alpha=0$, der scheinbar eine Ausnahme bildet, kann nicht vorkommen, wenn es sich um Kettenbrüche handelt, da sonst $x=\frac{a}{a}$ wäre.

Für $D<0$ tritt Divergenz ein; denn Convergenz würde eine Wurzel von (2.) liefern.

Im Falle dass $D = 0$ ***ist,*** erhält man als Näherungswerth für δ_{x+1}

$$\delta_{x+1} = \delta_x - \frac{2\alpha}{a+\beta}\delta_x, \quad (\alpha > 0)$$

und daraus ist ersichtlich, dass für kleine $|\delta_x|$ die Annäherung an die Doppelwurzel immer nur von einer Seite her erfolgen kann. Ist $a+\beta > 0$, so wird nur ein positives δ_x ein kleineres δ_{x+1} ergeben; ist $a+\beta > 0$, so findet umgekehrt die Näherung nur von kleinerem x her statt. Dieser Fall steht aber insofern unter dem zuerst behandelten, als hier nur die eine der beiden Strecken von ξ zu ξ' gleich Null wird, während die andere den gesammten Bereich reeller Zahlen umfasst. Für $a+\beta > 0$ führt jedes x_0 von oben her an ξ heran, für $a+\beta < 0$ ein jedes x_0 von unten her.

Da aus (1.) weiter

$$x = \frac{-\beta x+b}{\alpha x-a} = \frac{a'x+b}{\alpha x+\beta'} \tag{7.}$$

folgt, so sieht man, dass die auf (7.) gegründete Iteration, falls $D > 0$ ist, zu der Wurzel ξ' führt, welche durch (3.) nicht zu erreichen war; und, falls $D = 0$ ist, zur gleichen Wurzel mit Annäherung von der anderen Seite her.

Endlich erkennt man sofort, dass *für* $\alpha = 0$ der Algorithmus (1.) oder (7.) zur Wurzel führt, je nachdem $\frac{a}{\beta}$ oder $\frac{\beta}{a}$ kleiner als Eins ist; denn auch hier kommt es wieder auf den Werth von $f'(\xi)$ an.

Alle diese Resultate folgen sofort aus den angeführten Arbeiten. Nimmt man noch hinzu, dass die Kettenbruch-Behandlung wegen der Periodicität nichts anderes ist, als eine Reihe von in einander geschobenen Iterationen mit verschiedenen Anfangswerthen, dann ist die Frage erledigt.

Ich habe in den ersten hier gegebenen Entwickelungen angedeutet, dass bei der Iteration

$$x_{x+1} = f(x_x) \tag{8.}$$

nur die Hälfte der Wurzeln $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ von

$$x = f(x) \tag{9.}$$

als Grenzwerthe auftreten könne, wenn $f(x)$ eine rationale Function ist. Dies folgt aus den (l. c. 143) gegebenen Ueberlegungen. Es verdient bemerkt zu werden, dass diese Maximalanzahl nicht nothwendig erreicht wird, ja dass für keinen Anfangswerth, der von einem der ξ verschieden ist, eine

Grenzstelle vorhanden zu sein braucht. Wenn man in diesem Falle aus

$$y = f(x)$$

berechnet

$$x = g(y),$$

dann wird die Iteration von

$$x_{\varkappa+1} = g(x_\varkappa) \tag{10.}$$

ihrerseits alle Wurzeln von (9.) als Grenzstellen liefern. Dies erklärt sich dann so, dass (10.) nicht einen, sondern n Functions-Zweige umfasst, welche einzeln zu den einzelnen Wurzeln führen. So giebt z. B. die Iteration von

$$x_{\varkappa+1} = x_\varkappa^2 - b$$

nur Divergenz, während die Iterationen

$$x_{\varkappa+1} = +\sqrt{x_\varkappa + b} \quad \text{und} \quad x_{\varkappa+1} = -\sqrt{x_\varkappa + b}$$

zu den beiden Wurzeln von

$$x^2 - x - b = 0$$

hinführen.

Druckfehler.

Seite 282, Zeile 18 ist hinter $(S_0^{(1)} = 1)$ einzuschalten: „bedeutet“.
— — — 20 ist das Wort „ist“ zu streichen.
— — — 31 lese man „während“ statt „hingegen“.

Inhaltsverzeichniss der Bände 101—110.

	Band	Seite
Paul Appell in Paris.		
Sur des transformations de mouvements.	110.	37— 41
F. August in Berlin.		
Ueber die Rotationsfläche kleinsten Widerstandes und über die günstigste Form der Geschossspitzen nach der *Newton*schen Theorie. . . .	103.	1— 24
A. Beck in Riga.		
Ueber die Fundamentalaufgabe der Axonometrie.	106.	121—124
Bigler in Bern.		
Ueber Gammafunctionen mit beliebigem Parameter.	102.	237—254
P. du Bois-Reymond.		
Bemerkungen über $\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.	103.	204—229
Ueber lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung. . .	104.	241—301
E. Busche in Bergedorf bei Hamburg.		
Ueber grösste Ganze.	103.	118—125
Zur Anwendung der Geometrie auf die Zahlentheorie.	104.	32— 37
Ueber die Function $\sum_{x=1}^{x=\frac{q-1}{2}} \left[\frac{px}{q}\right]$.	106.	65— 80
Ueber die Function $E(x)$ mit complexem Argument.	110.	338—348
J. Cardinaal in Tilburg (Holland).		
Ein specieller F^2-Bündel und der dazu gehörige Bündel Raumcurven dritter Ordnung.	101.	142—153
Zur geometrischen Theorie der ebenen Curven vierter Ordnung. . .	102.	160—174
F. Caspary in Berlin.		
Sur quelques formules relatives aux fonctions sphériques. (Extrait d'une lettre adressée à M. *Ch. Hermite* à Paris.)	107.	137—140

	Band	Seite
A. Cayley in Cambridge.		
Note on the Theory of Linear Differential Equations.	101.	209—213
On some problems of orthomorphosis.	107.	262—277
E. Czuber in Brünn.		
Berechnung der krummen Oberfläche und des körperlichen Inhalts eines Kugel-Ausschnitts zwischen zwei beliebigen, die Kugel und einander schneidenden Ebenen.	105.	180
V. Eberhard in Königsberg i. Pr.		
Eine Classification der allgemeinen Ebenensysteme.	106.	89—120
J. Frischauf in Graz.		
Zur Theorie der Kugelfunction.	107.	87— 88
G. Frobenius in Berlin.		
Ueber die Congruenz nach einem aus zwei endlichen Gruppen gebildeten Doppelmodul.	101.	273—299
Ueber die *Jacobi*schen Covarianten der Systeme von Berührungskegelschnitten einer Curve vierter Ordnung.	103.	139—183
Ueber die *Jacobi*schen Functionen dreier Variabeln.	105.	35—100
Theorie der biquadratischen Formen.	106.	125—188
Ueber die in der Theorie der Flächen auftretenden Differentialparameter.	110.	1— 36
L. Fuchs in Berlin.		
Bemerkung zu der Arbeit im Bande 75 Seite 177 dieses Journals. .	106.	1— 4
Bemerkung zur Abhandlung des Herrn *Heffter* zur Theorie der linearen Differentialgleichungen (S. 269—282).	106.	283—284
Ueber eine Abbildung durch eine rationale Function.	108.	181—192
Anzeige wegen Uebernahme der Redaction.	109.	
A. Genocchi in Turin †.		
Première partie du chapitre XIII de la Note sur la théorie des résidus quadratiques.	104.	345—347
Paul Günther in Berlin †.		
Ueber lineare Differentialgleichungen, deren Integrale nur einen singulären Punkt im Endlichen besitzen und im Unendlichen sich regulär verhalten.	105.	1— 34
Ueber eine Methode, die zu einem singulären Punkte einer linearen homogenen Differentialgleichung gehörige Fundamentalgleichung zu bestimmen.	106.	330—336
Ueber die Bestimmung der Fundamentalgleichungen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen.	107.	298—318
Zur Theorie der elliptischen Functionen.	108.	256—265
Zur Theorie der elliptischen Functionen. Fortsetzung aus Band 108 Seite 256.	109.	43— 50
Ueber die eindeutigen Functionen von zwei durch eine algebraische Gleichung verbundenen Veränderlichen.	109.	199—212
Das Additionstheorem der elliptischen Functionen.	109.	213—221

	Band	Seite
August Gutzmer in Berlin.		
Bemerkung über die *Jacobi*sche Thetaformel.	110.	177—179
M. Hamburger in Berlin.		
Ueber eine specielle Klasse linearer Differentialgleichungen.	103.	238—273
Erweiterung eines *Pfaff*schen Satzes auf simultane totale Differentialgleichungen erster Ordnung und Integration einer Klasse von simultanen partiellen Differentialgleichungen.	110.	158—176
Guido Hauck in Berlin.		
Theorie der trilinearen Verwandtschaft ebener Systeme. IV. Artikel. Die trilineare Beziehung zwischen drei einstufigen Grundgebilden.	108.	25— 49
J. N. Hazzidakis in Athen.		
Ueber invariante Differentialausdrücke.	104.	102—115
L. Heffter in Giessen.		
Ueber Recursionsformeln der Integrale linearer homogener Differentialgleichungen.	106.	269—282
Bemerkung über die Integrale linearer Differentialgleichungen. . . .	109.	222—224
K. Hensel in Berlin.		
Untersuchung der ganzen algebraischen Zahlen eines gegebenen Gattungsbereiches für einen beliebigen algebraischen Primdivisor. . . .	101.	99—141
Theorie der unendlich dünnen Strahlenbündel.	102.	273—303
Ueber die Darstellung der Zahlen eines Gattungsbereiches für einen beliebigen Primdivisor.	103.	230—237
Ueber Gattungen, welche durch Composition aus zwei anderen Gattungen entstehen.	105.	329—344
Zur Theorie der linearen Formen.	107.	241—245
Anwendung der Theorie der Modulsysteme auf ein Problem der Optik.	108.	140—143
Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen und der algebraischen Integrale. Erste Abhandlung.	109.	1— 42
Ueber die Gleichungen, mit deren Hülfe man die säcularen Störungen der Planeten bestimmt.	110.	180—183
Ch. Hermite in Paris.		
Sur les polynômes de *Legendre*. (Extrait d'une lettre adressée à M. *F. Caspary*).	107.	80— 83
W. Heymann in Plauen i. V.		
Bemerkung über elliptische Integrale.	103.	87— 88
Zur Theorie der Differenzengleichungen.	109.	112—117
David Hilbert in Königsberg i. Pr.		
Ueber die Discriminante der im Endlichen abbrechenden hypergeometrischen Reihe.	103.	337—345
Ueber die Irreducibilität ganzer rationaler Functionen mit ganzzahligen Coefficienten.	110.	104—129

	Band	Seite
F. Hofmann in München.		
Zwei geometrische Beweise eines Satzes von *Hesse*.	102.	175—184
A. Hurwitz in Zürich.		
Ueber die *Schröter*sche Construction der ebenen Curven dritter Ordnung. (Aus einem an Herrn *H. Schröter* gerichteten Briefe.). .	107.	141—147
Ueber den Vergleich des arithmetischen und des geometrischen Mittels.	108.	266—268
P. Jaerisch in Hamburg.		
Allgemeine Integration der Elasticitätsgleichungen für die Schwingungen und das Gleichgewicht isotroper Rotationskörper.	104.	177—210
Wilhelm Killing in Münster i. W.		
Ueber die Grundlagen der Geometrie.	109.	121—186
A. Kneser in Dorpat.		
Arithmetische Begründung einiger algebraischer Fundamentalsätze. . .	102.	20— 55
Ein neuer Beweis der Unmöglichkeit, allgemeine Gleichungen höheren Grades algebraisch aufzulösen.	106.	48— 64
J. Knoblauch in Berlin.		
Ueber Fundamentalgrössen in der Flächentheorie.	103.	25— 39
Ueber die Bedingung für die Isometrie der Krümmungscurven. . . .	103.	40— 43
C. Koehler in Heidelberg.		
Beweis eines Satzes aus der Analysis Situs.	109.	118—120
Leo Königsberger in Heidelberg.		
Beweis von der Unmöglichkeit der Existenz eines anderen Functionaltheorems als des *Abel*schen. (Fortsetzung des Aufsatzes im Band 100 S. 121.)	101.	1— 72
Untersuchungen über die Existenz eines Functionaltheorems. . . .	102.	224—236
Ueber die für eine homogene lineare Differentialgleichung dritter Ordnung zwischen den Fundamentalintegralen und deren Ableitungen stattfindenden algebraischen Beziehungen.	103.	274—320
Der *Cauchy*sche Satz von der Existenz der Integrale einer Differentialgleichung.	104.	174—176
Ueber eine Determinantenbeziehung in der Theorie der Differentialgleichungen.	105.	170—179
Ueber die Integrale partieller Differentialgleichungsysteme beliebiger Ordnung.	109.	261—340
Ernst Kötter in Berlin.		
Ueber diejenigen Polyeder, die bei gegebener Gattung und gegebenem Volumen die kleinste Oberfläche besitzen. Erste Abhandlung. .	110.	198—229
Fritz Kötter in Berlin.		
Anwendung der *Abel*schen Functionen auf ein Problem der Statik biegsamer, unausdehnbarer Flächen.	103.	44— 74
Ueber die Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit. . . .	109.	51— 81 89—111

	Band	Seite
G. Kohn in Wien.		
Ueber die Berührungskegelschnitte und Doppeltangenten der allgemeinen Curve vierter Ordnung.	107.	1— 50
W. Krimphoff in Paderborn.		
Neue geometrische Darstellung der lemniskatischen Function. . . .	110.	73— 77
L. Kronecker in Berlin †.		
Ueber den Zahlbegriff.	101.	337—355
Bemerkungen über die *Jacobi*schen Thetaformeln.	102.	260—272
Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste. (Aus einem Aufsatze in No. XLVIII der Sitzungsberichte der Berliner Akademie von 1885.)	104.	348—351
Paul du Bois-Reymond.	104.	352—354
Bemerkungen über die Darstellung von Reihen durch Integrale. . .	105.	157—159
Summirung der *Gauss*schen Reihen $\sum_{h=0}^{h=n-1} e^{\frac{2h^2\pi i}{n}}$	105.	267—268
Bemerkungen über die Darstellung von Reihen durch Integrale. (Fortsetzung des auf S. 157—159 abgedruckten Aufsatzes.)	105.	345—354
Bemerkungen über die von *Gauss* mit $[x]$ bezeichnete arithmetische Function einer reellen Grösse x.	106.	346—348
Reduction der Systeme von n^2 ganzzahligen Elementen.	107.	135—136
Anwendung der Modulsysteme auf Fragen der Determinantentheorie. .	107.	254—261
Ueber eine Stelle in *Jacobi*s Aufsatz „Observatiunculae ad theoriam aequationum pertinentes“. (Auszug aus einem Schreiben an Herrn *Weierstrass.*)	107.	349—352
Sophie von Kowalevsky.	108.	88
Ueber die Zeit und die Art der Entstehung der *Jacobi*schen Thetaformeln.	108.	325—334
Eine analytisch-arithmetische Formel.	108.	348
E. Lampe in Berlin.		
Ueber eine Maximalaufgabe zur angeblichen Dreitheilung eines Winkels von *Averdieck.*	105.	355—356
Georg Landsberg in Berlin.		
Ueber relativ adjungirte Minoren.	109.	225—230
Zur Theorie der periodischen Kettenbrüche.	109.	231—237
M. Lerch in Prag.		
Ueber die Nichtdifferentiirbarkeit gewisser Functionen.	103.	126—138
R. von Lilienthal in Bonn.		
Zur Krümmungstheorie der Flächen.	104.	341—344
R. Lipschitz in Bonn.		
Bemerkungen über eine Gattung vielfacher Integrale. Auszug eines an Herrn *L. Kronecker* gerichteten Schreibens.	101.	214—226
Untersuchung der Eigenschaften einer Gattung von unendlichen Reihen.	105.	127—156
Bemerkung zu dem Aufsatze: Untersuchung der Eigenschaften einer Gattung von unendlichen Reihen.	106.	27— 29

	Band	Seite
L. Maurer in Strassburg i. E.		
Ueber Invariantentheorie.	107.	89—116
A. Meyer in Zürich.		
Ueber einen Satz von Dirichlet.	103.	98—117
Zur Theorie der indefiniten ternären quadratischen Formen. . . .	108.	125—139
H. Minkowski in Bonn.		
Zur Theorie der positiven quadratischen Formen.	101.	196—202
Ueber die Bedingungen, unter welchen zwei quadratische Formen mit rationalen Coefficienten in einander rational transformirt werden können. (Auszug aus einem an Herrn *Adolf Hurwitz* gerichteten Briefe.)	106.	5— 26
Ueber die positiven quadratischen Formen und über kettenbruchähnliche Algorithmen.	107.	278—297
D. Mirimanoff in Genf.		
Sur une question de la théorie des nombres.	109.	82— 88
Eugen Netto in Giessen.		
Untersuchungen aus der Theorie der Substitutionen-Gruppen. . . .	103.	321—336
Anwendung der Modulsysteme auf eine elementare algebraische Frage.	104.	321—340
Ueber den gemeinsamen Theiler zweier ganzer Functionen einer Veränderlichen.	106.	81— 88
Anwendung der Modulsysteme auf eine Frage der Determinantentheorie.	108.	144—146
Anwendung der Modulsysteme auf einen geometrischen Satz und auf das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen.	110.	184—187
Bemerkungen zu dem Aufsatze des Herrn *G. Landsberg* („Zur Theorie der periodischen Kettenbrüche“.)	110.	349—352
Vilfredo Pareto in Fiesole.		
Sur les fonctions génératrices d'*Abel*.	110.	290—323
Joseph Perott in Gra-Thumiac (Morbihan).		
Sur l'équation $t^2 - Du^2 = -1$.	102.	185—223
S. Pincherle in Bologna.		
Sur la nature arithmétique des coefficients des séries intégrales des équations différentielles linéaires.	103.	84— 86
Geminiano Pirondini in Parma.		
Sur la détermination des lignes dont le rapport de la courbure à la torsion est une fonction donnée de l'arc.	109.	238—260
L. Pochhammer in Kiel.		
Ueber die Differentialgleichung der allgemeinen hypergeometrischen Reihe mit zwei endlichen singulären Punkten.	102.	76—159
Ueber drei lineare Differentialgleichungen vierter Ordnung.	104.	116—151

	Band	Seite
Ueber eine Klasse von Functionen einer complexen Variablen, welche die Form bestimmter Integrale haben.	104.	152—173
Ueber ein vielfaches, auf *Euler*sche Integrale reducirbares Integral. .	107.	246—253
Ueber eine lineare Differentialgleichung *n*ter Ordnung mit einem endlichen singulären Punkte.	108.	50— 87
Ueber die Reduction der Differentialgleichung der Reihe $\mathfrak{F}(\varrho_1, \varrho_2, ..., \varrho_{n-1}; x)$.	110.	188—197

Preisaufgaben.

Preisaufgabe der Fürstlich *Jablonowski*schen Gesellschaft zu Leipzig für das Jahr 1889.	103.	75— 76
Preisaufgaben der Fürstlich *Jablonowski*schen Gesellschaft zu Leipzig für die Jahre 1893 und 1894.	108.	179—180

Th. Reye in Strassburg i. E.

Ueber lineare Mannigfaltigkeiten projectiver Ebenenbüschel und collinearer Bündel oder Räume. I.	104.	211—240
Ebendarüber. II.	106.	30— 47
Ebendarüber. III.	106.	315—329
Ebendarüber. IV.	107.	162—178
Ebendarüber. V., VI.	108.	89—124

H. Rosenow in Berlin.

Ueber Invariantensysteme, welche zur Charakterisirung der verschiedenen Klassen bilinearer Formen dienen.	108.	1— 24

F. Rudio in Zürich.

Ueber primitive Gruppen.	102.	1— 8
Ueber eine specielle Fläche vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt. .	104.	85— 88

Paul Schafheitlin in Berlin.

Ueber die Integraldarstellung der allgemeineren hypergeometrischen Reihe.	103.	89— 97
Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten.	106.	285—314

W. Scheibner in Leipzig.

Ueber die Producte von drei und vier Thetafunctionen.	102.	255—259
Ueber eine Transformationsformel für Doppelintegrale.	103.	77— 83

Ludwig Schlesinger in Berlin.

Zur Theorie der *Fuchs*schen Functionen.	105.	181—232
Ueber die bei den linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung auftretenden Primformen.	110.	130—157
Ueber lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung, für welche die Umkehrungsfunction von endlicher Vieldeutigkeit ist.	110.	265—289

F. Schottky in Marburg.

Ueber eine specielle Function, welche bei einer bestimmten linearen Transformation ihres Arguments unverändert bleibt.	101.	227—272
Zur Theorie der *Abel*schen Functionen von vier Variabeln.	102.	304—352
Ueber specielle *Abel*sche Functionen vierten Ranges.	103.	185—203

	Band	Seite
Ueber die Beziehungen zwischen den sechszehn Thetafunctionen von zwei Variabeln.	105.	233—249
Eine algebraische Untersuchung über Thetafunctionen von drei Argumenten.	105.	269—297
Ueber die charakteristischen Gleichungen symmetrischer ebener Flächen und die zugehörigen *Abel*schen Functionen.	106.	199—268
Zur Definition des Systems der 4^2 geraden und ungeraden Thetafunctionen.	107.	117—134
Das Interpolationsproblem für elliptische Functionen.	107.	189—195
Theorie der elliptisch-hyperelliptischen Functionen von vier Argumenten.	108.	147—178 193—255
Verhalten des Logarithmus einer elliptischen Function.	108.	342—345
Ueber das Additionstheorem der Cotangente und der Function $\zeta(u) = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}$.	110.	324—337

P. H. Schoute in Groningen.

Ein *Steiner*sches Problem.	101.	154—161

H. Schroeter in Breslau †.

Zurückführung der *Grassmann*schen Definitionen der Curve dritter Ordnung auf die von *Chasles*, *Cayley* und *Hesse* angegebenen Erzeugungsweisen.	104.	62— 84
Die *Hesse*sche Configuration $(12_4, 16_3)$.	108.	269—312
Elementare Construction der Figur dreier in desmischer Lage befindlichen Tetraeder.	109.	341—357

Robert Schumacher in Augsburg.

Die Punktsysteme auf der Geraden und ihre Anwendung zur Erzeugung der algebraischen ebenen Curven.	110.	230—264

Friedrich Schur in Dorpat.

Ueber die sogenannten vollständigen Systeme von homogenen linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.	108.	313—324

K. Schwering in Düren.

Beitrag zur Theorie gewisser complexer Zahlen.	102.	56— 75
Multiplication der lemniskatischen Function $\operatorname{sinam} u$.	107.	196—240
Zerfällung der lemniskatischen Theilungsgleichung in vier Factoren. .	110.	42— 72

Eduard Selling in Würzburg.

Ueber eine Formel für empirische Zahlenreihen, insbesondere zum Ersatz der Sterbe- und Invaliditäts-Tafeln.	106.	193—198

M. Simon in Strassburg i. E.

Elementargeometrische Ableitung der Parallelenconstruction in der absoluten Geometrie.	107.	84— 86
Die Trigonometrie in der absoluten Geometrie.	109.	187—198

	Band	Seite
P. Stäckel in Halle a. S.		
Zur Theorie der eindeutigen Functionen.	106.	189—192
Ueber die Differentialgleichungen der Dynamik und den Begriff der analytischen Aequivalenz dynamischer Probleme.	107.	319—348
W. Stahl in Berlin.		
Die Raumcurve vierter Ordnung zweiter Art und die desmische Fläche zwölfter Ordnung vierter Klasse.	101.	73— 98
Ueber die rationale ebene Curve vierter Ordnung.	101.	300—325
Ueber die Fundamentalinvolutionen auf rationalen Curven.	104.	38— 61
Ueber die rationale ebene Curve vierter Ordnung. Fortsetzung. Siehe dieses Journal Bd. 101 S. 300.	104.	302—320
Ueber projective involutorische Gebilde.	107.	179—188
O. Staude in Rostock.		
Ueber bedingt periodische Functionen eines beschränkt veränderlichen complexen Argumentes und Anwendungen derselben auf Mechanik.	105.	298—328
M. A. Stern in Zürich.		
Zur Theorie der Function $E(x)$.	102.	9— 19
Beweis eines *Liouville*schen Satzes.	105.	250—266
Zur Theorie der Function $E(x)$.	106.	337—345
Rudolph Sturm in Breslau.		
Ueber Strahlencongruenzen von gleichem Bündel- und Feldgrade. . .	101.	162—195
Rein geometrische Untersuchungen über algebraische Minimalflächen. .	105.	101—126
Heinrich Schröter (Nekrolog).	109.	358—360
F. Tano in Rom.		
Sur quelques théorèmes de *Dirichlet*.	105.	160—169
J. Thomae in Jena.		
Ueber Integrale zweiter Gattung.	101.	326—336
Ueber die Function $W\left(\begin{matrix}\alpha, & \beta, & \gamma, \\ \alpha', & \beta', & \gamma',\end{matrix}\ n\right)$ für singuläre Werthe ihrer Parameter.	110.	78—103
L. W. Thomé in Greifswald.		
Bemerkung zur Theorie der linearen Differentialgleichungen.	101.	203—208
Bemerkung zur Theorie der linearen Differentialgleichungen.	103.	346—347
Ueber eine Anwendung der Theorie der linearen Differentialgleichungen auf die algebraischen Functionen.	104.	1— 31
Ueber eine Anwendung der Theorie der linearen Differentialgleichungen auf nichthomogene lineare Differentialgleichungen.	107.	51— 79
Ueber eine Anwendung der Theorie der linearen Differentialgleichungen zur Bestimmung des Geschlechtes einer beliebigen algebraischen Function.	108.	335—341

	Band	Seite
K. Th. Vahlen in Berlin.		
Bemerkung zur vollständigen Darstellung algebraischer Raumcurven. .	108.	346—347
J. Weingarten in Berlin.		
Ueber eine Eigenschaft der Flächen, bei denen der eine Hauptkrümmungsradius eine Function des anderen ist.	103.	184
H. Züge in Lingen.		
Das Potential homogener ringförmiger Körper, insbesondere eines Ringkörpers mit Kreisquerschnitt.	104.	89—101
Das Potential eines homogenen Ringkörpers mit elliptischem Querschnitt.	107.	148—161

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Unter Mitwirkung der Herren

Weierstrass und **von Helmholtz**

herausgegeben

von

L. Fuchs.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich Preussischer Behörden.

Band 110.

Heft III.

Ausgegeben den 11. October.

Berlin, 1892.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

Verlag von **Georg Reimer** in Berlin,

zu beziehen durch jede Buchhandlung.

	M. Pf.
Baer, O., Eléments d'algèbre à l'usage des classes moyennes du collège royal français. 1885 geb.	2.50
— — Eléments de géométrie plane à l'usage des éléves du collège royal français. 1887 geb.	3.—
Ball, Rob. S., theoretische Mechanik starrer Systeme. Auf Grund der Methoden und Arbeiten Ball's herausgegeben von H. Gravelius. Mit 2 Abbildungen. 8. 1889	14.—
Borchardt, C. W., gesammelte Werke. Auf Veranlassung der Königl. Preuss. Akademie der Wissenschaften herausgeg. von G. Hettner. Mit Borchardt's Bildniss. 4. 1888	17.—
Budde, E., Allgemeine Mechanik der Punkte und starren Systeme. Ein Lehrbuch für Hochschulen. I. Band: Mechanik der Punkte und Punktsysteme. 8. 1890	10.—
— — II. Band. Mechanische Summen und starre Gebilde. 8. 1891	13.—
Crelle, A., Rechentafeln, welche alles Multipliciren und Dividiren mit Zahlen unter Tausend ganz ersparen, bei grösseren Zahlen aber die Rechnung erleichtern und sicherer machen. Mit einem Vorwort von C. Bremiker. A. u. d. T. — Tables de calcul etc. 6te Stereotyp-Ausgabe. 1891	15.—
Dirichlet, G. Lejeune, Werke. Herausgegeben auf Veranlassung der Königl. Preuss. Akademie der Wissenschaften von L. Kronecker. I. Band. Mit Dirichlet's Bildniss. 4. 1889 . . .	21.—
Eisenstein, G., mathemat. Abhandlungen, besonders aus dem Gebiete der höheren Arithmetik und der elliptischen Functionen. Mit einer Vorrede von Gauss. 4. 1847	4.—
— Tabelle der reducirten positiven ternären quadratischen Formen nebst den Resultaten neuer Forschungen über diese Formen in besond. Rücksicht auf ihre tabellarische Rechnung. 4. 1851	2.25
Emmerich, Dr. A., Die Brocardschen Gebilde und ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten und Kreisen des Dreiecks. Mit 50 Figuren im Text und einer lithographischen Tafel. 1891	5.—
Förster, W., (Direktor der Königl. Sternwarte) Sammlung von Vorträgen und Abhandlungen. (Zweite Folge.) 8. 1887	6.—
geb.	7.—
Fortschritte, die, der Physik. Dargestellt von der physikalischen Gesellschaft zu Berlin. 8.	
XLIr Jahrgang:	
1. Abth.: Physik der Materie. Redigirt von Dr. E. Budde. 1891	11.—
2. Abth.: Physik des Aethers. Redigirt von Dr. E. Budde. 1891	18.—
3. Abth.: Physik der Erde. Redigirt von Prof. Dr. B. Schwalbe. 1891	22.—
XLIIr Jahrgang:	
1. Abth.: Physik der Materie. Redigirt von Dr. E. Budde. 1892	13.—
2. Abth.: Physik des Aethers. Redigirt von Dr. E. Budde. 1892	17.—
Gravelius, H., Fünfstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln für die Decimaltheilung des Quadranten, mit ausführlichen Tafeln zum Uebergang von der neuen Theilung des Quadranten in die alte und umgekehrt. Nebst vierstelligen Tafeln der Zahlenwerthe der trigonometrischen Functionen, sowie gewöhnlichen Logarithmentafeln und Quadrattafeln. Mit einem Vorworte von Professor Dr. W. Förster, Direktor der Königl. Sternwarte zu Berlin. 8. 1886. geb.	6.—
Heine, E., Handbuch der Kugelfunctionen. 2. Auflage.	
Erster Band. Theorie. 1878	8.—
Zweiter Band. Anwendungen. 1881	6.—
Jacobi, C. G. J., gesammelte Werke. Auf Veranlassung der Königl. Preuss. Akademie der Wissenschaften.	
I. Band herausgegeben von C. W. Borchardt. Mit dem Bildniss Jacobi's. 1881	18.—
II.—VII. Band herausgeg. von K. Weierstrass. 1882—1891	99.—
Supplementband. Vorlesungen über Dynamik. Herausgeg. von E. Lottner. 1884	10.—
Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Herausgegeben von C. Ohrtmann, F. Müller und A. Wangerin. 8.	
XX. Band (Jahrgang 1888) Heft 1. 1890 Herausgeg. von E. Lampe.	13.—
Heft 2. 1891 „ „ „	7.50
Heft 3. 1891 „ „ „	10.50
XXI. Band. (Jahrgang 1889) Heft 1. 1892 „ „ „	13.—
Heft 2. 1892 „ „ „	8.—
Heft 3. 1892 „ „ „	13.—

Verlag von **Georg Reimer** in Berlin,

zu beziehen durch jede Buchhandlung.

	M. Pf.
Joachimsthal, F., Elemente der analytischen Geometrie der Ebene. Dritte Auflage, verbessert und durch einen Anhang von Aufgaben und deren Lösungen vermehrt von O. Hermes. Mit 8 Tafeln. 1883	3.60
Journal für die reine und angewandte Mathematik. Herausgegeben von L. Kronecker und K. Weierstrass. Als Fortsetzung des von A. L. Crelle (1826—1856) u. C. W. Borchardt (1856—1880) herausgeg. Journals. Band 109. 4. 1892. à Band (4 Hefte)	12.—
— — Inhalt und Namenverzeichniss der Bände 1—100 (1826 bis 1887). 4. 1887	12.—
Kayser, H. und **C. Runge,** über die Spectren der Elemente. I. Mit 7 Tafeln. 4. 1888	6.—
— — II. Mit 2 Tafeln. 4. 1889	4.—
— — III. Mit 1 Tafel. 4. 1890	3.50
— — IV. Mit 2 Tafeln. 4. 1891	4.80
— — V. Mit 1 Tafel. 4. 1892	5.—
Kötter, E., Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der algebraischen ebenen Curven. Gekrönte Preisschrift. 4. 1887	20.—
Kramer, Aug., Allgemeine Theorie der zwei- und dreiteiligen astronomischen Fernrohr-Objective. Mit 2 Tafeln. 1885	10.—
Kronecker, L., Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen. Festschrift zu Herrn E. E. Kummers 50jährigem Doctor-Jubiläum am 10. Sept. 1881. Angefügt ist eine neue Ausgabe der am 10. Sept. 1845 erschienenen Inauguraldissersation: de unitatibus complexis. (Abdr. a. d. Journ. f. d. reine u. angew. Mathematik Bd. 92.) 1882	6.—
— über bilineare Formen mit vier Variabeln. 1884	5.50
Lehmann-Filhés, R., die Bestimmung von Meteorbahnen nebst verwandten Aufgaben. Herausgegeben mit Unterstützung der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften. Mit einer Tafel. 1883	5.—
Mehler, F. G., Hauptsätze der Elementar-Mathematik zum Gebrauche an Gymnasien und Realgymnasien. Mit einem Vorworte von Prof. Dr. Schellbach. 17. Auflage. 8. 1892	1.50
geb.	1.80
Meissel, E., Tafel der Bessel'schen Funktionen I_k^0 und I_k^1 von $k = 0$ bis $k = 15.5$ berechnet. 4. 1889	2.—
Mittheilungen, mathematische und naturwissenschaftliche aus den Sitzungsberichten der Königl. Preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 1.—10. Jahrgang. 8. 1882—1891 à	8.—
Schellbach, K. H., Neue Elemente der Mechanik, dargestellt und bearbeitet von G. Arendt. Mit 12 Tafeln. 1860	5.50
— die Lehre von den elliptischen Integralen und den Theta-Functionen. 1864	6.—
— über die Zukunft der Mathematik an unseren Gymnasien. 8. 1887	—.80
Schwalbe, B., Griechisches Elementarbuch. Grundzüge des Griechischen zur Einführung in das Verständniss der aus dem Griechischen stammenden Fremdwörter. 8. 1887	2.40
Steiner's J., gesammelte Werke. Auf Veranlassung der Königl. Preuss. Akademie der Wissenschaften herausg. von K. Weierstrass.	
I. Band mit 44 Tafeln und Steiner's Bildniss. 1881	16.—
II. Band mit 23 Tafeln. 1882	18.—
Verhandlungen der physikalischen Gesellschaft zu Berlin im Jahre 1891. Zehnter Jahrgang. Herausgegeben von Dr. A. Koenig. 8. 1892	2.—
Verhandlungen der im Herbst 1890 in Freiburg i. B. abgehaltenen Conferenz der permanenten Commission der internationalen Erdmessung. Redigirt von A. Hirsch. Zugleich mit den Specialberichten über die Fortschritte der Erdmessung und den Berichten der Vertreter der einzelnen Staaten über die Arbeiten in ihren Ländern. Mit 9 Tafeln. 4. 1891	8.—
Weber, H., Theorie der Abel'schen Functionen vom Geschlecht 3. 1876	6.—
Wolff, J. T., photometrische Beobachtungen an Fixsternen aus den Jahren 1876—1883. 1884	10.—

Band 110. Heft III.

Inhaltsverzeichniss.

A. Gutzmer. Bemerkung über die *Jacobi*sche Thetaformel. . . . . Seite 177

K. Hensel. Ueber die Gleichungen, mit deren Hülfe man die säcularen Störungen der Planeten bestimmt. . . . . — 180

E. Netto. Anwendung der Modul-Systeme auf einen geometrischen Satz und auf das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen. . . . . — 184

L. Pochhammer. Ueber die Reduction der Differentialgleichung der Reihe $\mathfrak{F}(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1}; x)$. . . . . — 188

E. Kötter. Ueber diejenigen Polyeder, die bei gegebener Gattung und gegebenem Volumen die kleinste Oberfläche besitzen. Erste Abhandlung. — 198

R. Schumacher. Die Punktsysteme auf der Geraden und ihre Anwendung zur Erzeugung der algebraischen ebenen Curven. . . . . — 230

Sendungen von Beiträgen für das Journal erbittet die Redaction **ausschliesslich** unter der Adresse:

An die Redaction des Journals für die reine und angewandte Mathematik, Verlagsbuchhandlung von Georg Reimer. Berlin S.W., Anhaltstrasse 12.

4122 c